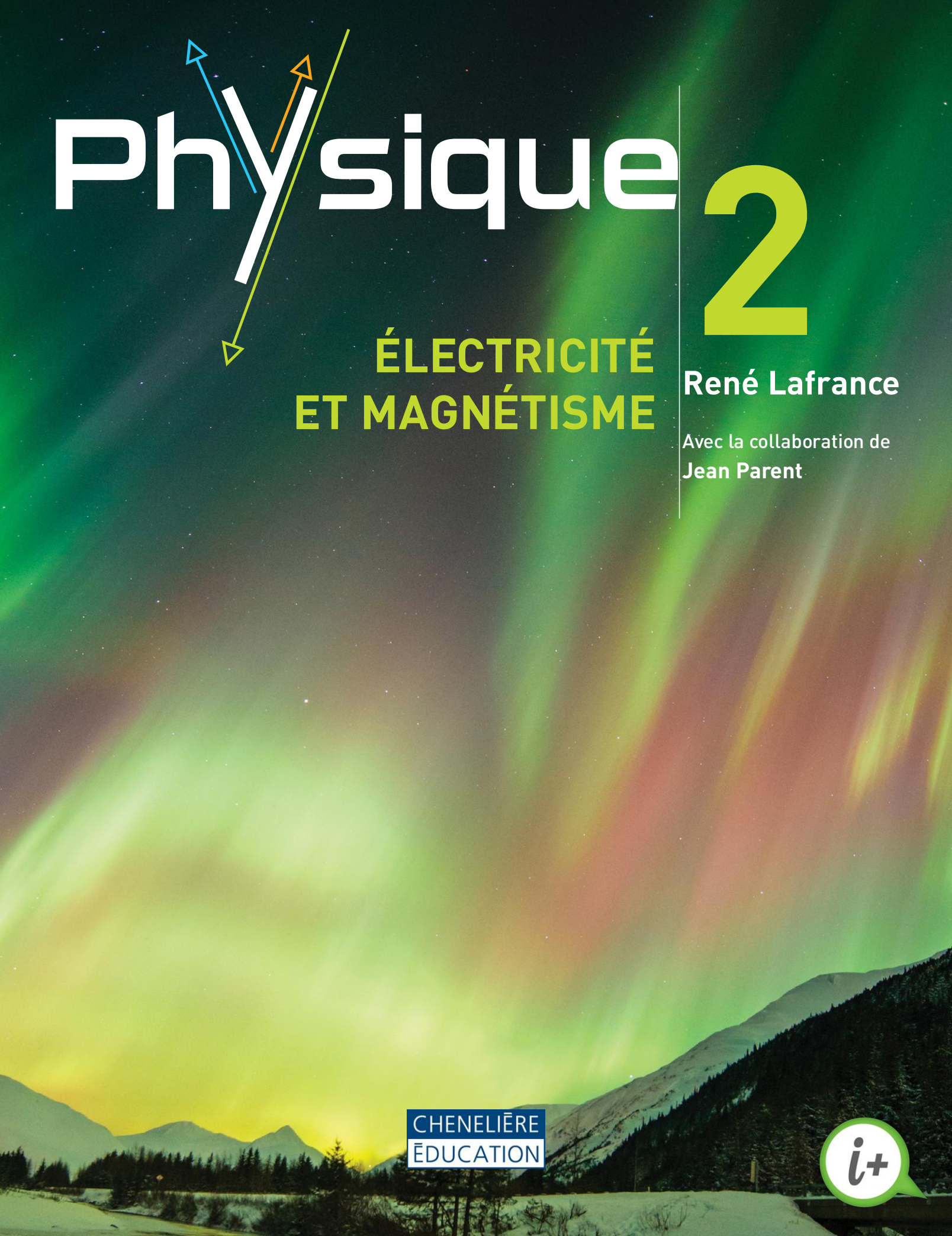
Physique 2

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

René Lafrance

Avec la collaboration de
Jean Parent



CHENELIÈRE ÉDUCATION

Physique 2

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

René Lafrance

Avec la collaboration de
Jean Parent

Révision scientifique des épreuves
Maxime Verreault, Cégep de Sainte-Foy

Rédaction des capsules « Un peu d'histoire »
Jean-Louis Trudel, CIRST et Université d'Ottawa

Rédaction des exercices et des solutionnaires en ligne
Geneviève Caron, Collège Montmorency

Rédaction des défis animés en ligne
Jean Parent, Collège de Bois-de-Boulogne

Rédaction des problèmes synthèse en ligne
Alexandre April, Cégep Garneau
Olivier Tardif-Paradis, Cégep Garneau

Achetez en ligne ou en librairie
En tout temps, simple et rapide!
www.cheneliere.ca

CHENELIÈRE ÉDUCATION

Physique 2
Électricité et magnétisme

René Lafrance

© 2014 TC Média Livres Inc.

Conception éditoriale : Sophie Gagnon
Édition : Martine Rhéaume et Marie Victoire Martin
Coordination : Jean-Pascal Baillie, Célia Chalfoun et Alexandra Soyeux
Recherche iconographique : Julie Saindon
Révision linguistique : Ginette Laliberté
Correction d'épreuves : Marie Le Toullec et Zérofôte
Conception graphique : Pige Communication
Illustrations : Bertrand Lachance et Michel Rouleau
Conception de la couverture : Micheline Roy
Impression : TC Imprimeries Transcontinental

Coordination éditoriale du matériel complémentaire Web : Martine Rhéaume
Coordination du matériel complémentaire Web : Célia Chalfoun

Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Lafrance, René, 1968-

Physique

Comprend un index.
Sommaire : 1. Mécanique – 2. Électricité et magnétisme – 3. Ondes, optique et physique moderne.
Pour les étudiants du niveau collégial.

ISBN 978-2-7650-3357-8 (vol. 1)
ISBN 978-2-7650-3546-6 (vol. 2)
ISBN 978-2-7650-3726-2 (vol. 3)

1. Physique – Manuels d'enseignement supérieur. I. Lafrance, René, 1968- . Mécanique. II. Lafrance, René, 1968- . Électricité et magnétisme. III. Lafrance, René, 1968- . Ondes, optique et physique moderne. I. Titre. II. Titre : Mécanique. III. Titre : Électricité et magnétisme. IV. Titre : Ondes, optique et physique moderne.

QC21.3.L33 2014 530 C2014-940299-6

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada
Téléphone : 514 273-1066
Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324
info@cheneliere.ca

TOUS DROITS RÉSERVÉS.
Toute reproduction du présent ouvrage, en totalité ou en partie, par tous les moyens présentement connus ou à être découverts, est interdite sans l'autorisation préalable de TC Média Livres Inc.
Toute utilisation non expressément autorisée constitue une contrefaçon pouvant donner lieu à une poursuite en justice contre l'individu ou l'établissement qui effectue la reproduction non autorisée.

ISBN 978-2-7650-3546-6

Dépôt légal : 1er trimestre 2014
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

2 3 4 5 6 ITIB 22 21 20 19 18

Gouvernement du Québec – Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres – Gestion SODEC.

Ce projet est financé en partie par le gouvernement du Canada

Le matériel complémentaire mis en ligne dans notre site Web est réservé aux résidants du Canada, et ce, à des fins d'enseignement uniquement.

L'achat en ligne est réservé aux résidants du Canada.

Avant-propos

Mon but, en écrivant cette collection de manuels de physique, a été d'obtenir un texte scientifique à la fois accessible et rigoureux. J'ai donc utilisé un style simple, avec des explications concises et précises, et de nombreux schémas et encadrés pour bien faire ressortir les résultats importants. Les concepts sont expliqués un à la fois, et les exemples sont placés immédiatement après ces explications.

La physique repose sur quelques principes de base qui sont ensuite généralisés à des situations complexes. Pour cette raison, j'emploie une méthode par intégration. La théorie est bâtie graduellement à partir de notions déjà vues en utilisant une suite logique. De même, on mentionne au lecteur que des notions déjà abordées sont reprises plus loin dans le manuel. La méthode par intégration permet d'établir les liens entre les concepts, tout en revenant sur les notions déjà vues.

Le texte et les équations mathématiques suivent une formulation rigoureuse. Les explications reposent sur une notation mathématique intuitive et complète. Les quantités scalaires et les quantités vectorielles sont bien différenciées, autant dans le texte que dans les équations. Les vecteurs sont toujours exprimés à l'aide de vecteurs unitaires adaptés à la situation (vecteurs cartésiens, vecteurs polaires pour le mouvement de rotation, vecteurs textuels comme $\overrightarrow{\text{vers la droite}}$).

La physique est aussi une discipline idéale pour développer une méthode de résolution de problèmes. Je suis conscient qu'il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre tous les problèmes. Par contre, je trouve important qu'un étudiant puisse avoir un modèle, pour ensuite développer sa propre stratégie, selon le type de problème. Bien des étudiants arrivant du secondaire ont l'impression que les problèmes de physique se résolvent « quand on connaît la bonne formule ». Pour contrer cela, je mets d'abord l'accent sur l'analyse qualitative, par l'entremise d'un schéma ou d'un diagramme. La stratégie de résolution ne se termine pas avec la réponse, mais par la validation, c'est-à-dire par un jugement critique porté sur le résultat.

Le tome 2 de cet ouvrage porte sur l'électricité et le magnétisme. Le but premier est la compréhension des phénomènes électriques et magnétiques à partir du concept de champ. Pour cette raison, je porte beaucoup d'attention à l'interaction exercée par les champs électrique et magnétique sur les particules chargées. J'utilise une approche vectorielle pour représenter et calculer les champs. Cette méthode peut sembler plus complexe qu'une méthode scalaire, mais elle est plus rigoureuse et simplifie grandement le calcul des intégrales, aucun changement de variable n'étant requis. Le calcul d'une intégrale se résume alors à regarder la solution dans une table. Dans l'étude des circuits, les formules particulières sont obtenues à partir des lois générales de Kirchhoff.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Jean-François Bojanowski, qui m'a invité avec un groupe de professeurs de physique à réfléchir au projet de publication d'une collection de livres de physique. Je remercie les membres de ce groupe : Yves Carbonneau, André De Bellefeuille, Alexandre Fortier, Jean Parent, ainsi que Pierre Lafleur pour sa participation. Dans ce groupe, nous avons réfléchi et échangé des idées sur ce que devrait contenir un bon manuel de physique pour l'enseignement collégial. La structure de la collection est le résultat de ces discussions. Parmi ce groupe d'enseignants, je remercie particulièrement André De Bellefeuille pour m'avoir encouragé à commencer l'écriture du livre de mécanique, et pour avoir révisé les premiers chapitres.

J'ai profité de discussions avec un grand nombre de collègues physiciens enseignants durant ma carrière, particulièrement Jacques Bridet, Tommaso Donato, Daniel Fortier, Olivier Major, Normand Painchaud, Donald Pelletier, Julie Quenneville et Vincent Stelluti. Je remercie aussi grandement mes collègues du Collège de Bois-de-Boulogne qui ont utilisé et commenté des versions préliminaires de l'ouvrage : Adama Diallo, Merlin Delaval-Lebel, Christian Gervais, Oliver Langlois, Jonathan Laverdière, Alexandre Lemerle et Martin Périard. Je remercie aussi les étudiants qui ont fait des commentaires et des suggestions sur les versions préliminaires et qui ont permis d'améliorer cette collection. De plus, je tiens à remercier particulièrement mes collègues Delphine Quievy et Marie-Josée Lim pour leurs commentaires et leurs encouragements continus. Finalement, ce travail n'aurait pas été possible sans la rétroaction constante de mon collaborateur Jean Parent, qui a été présent dès le début du projet.

Je remercie Sophie Gagnon, éditrice conceptrice chez Chenelière Éducation, qui a cru à ce projet très rapidement et qui a permis que cette collection voie le jour. Je veux la remercier pour tous ses efforts. Je remercie aussi Marie Victoire Martin qui a travaillé au début du travail d'édition et Martine Rhéaume qui a pris le relais avec brio, ainsi que toute son équipe de coordination éditoriale, dirigée par Dominique Lefort et assurée par Jean-Pascal Baillie, Alexandra Soyeux et Célia Chalfoun.

Plusieurs personnes se sont greffées à la réalisation du projet final. Je veux remercier Mohammed-Hedi Boukhatem, Yves Carbonneau, Geneviève Caron, Sophie Descoteaux, Richard Haince, Jean Lacombe et Guillaume Trudel qui ont évalué les versions préliminaires et qui ont fait des suggestions pour améliorer le texte. Merci à Jean-Louis Trudel pour la rédaction des rubriques historiques. Je remercie également Geneviève Caron et Maxime Verreault pour leur collaboration dans la révision, les exercices et les solutionnaires. Je remercie aussi François Vervaet, Michel Bisson-Viens, Alexandre April et Oliver Tardif-Paradis pour avoir collaboré à l'élaboration du matériel complémentaire.

Pour terminer, j'ai travaillé plusieurs années sur ce projet. La réalisation de ce dernier n'a été possible qu'avec le soutien de ma famille. Je tiens à dire un gros merci à mes filles Angélique, Marie, Geneviève et Charlotte, qui ont accepté d'avoir un papa qui travaille tout le temps, et qui ont donné de leur temps pour prendre des photos et faire des commentaires sur des versions préliminaires. Finalement, mon épouse Catherine Bergeron a été essentielle, pour son soutien moral et grammatical. Sans toi Catherine, il n'y aurait que du papier blanc. Merci de tout cœur.

Présentation du manuel

Ouverture de chapitre

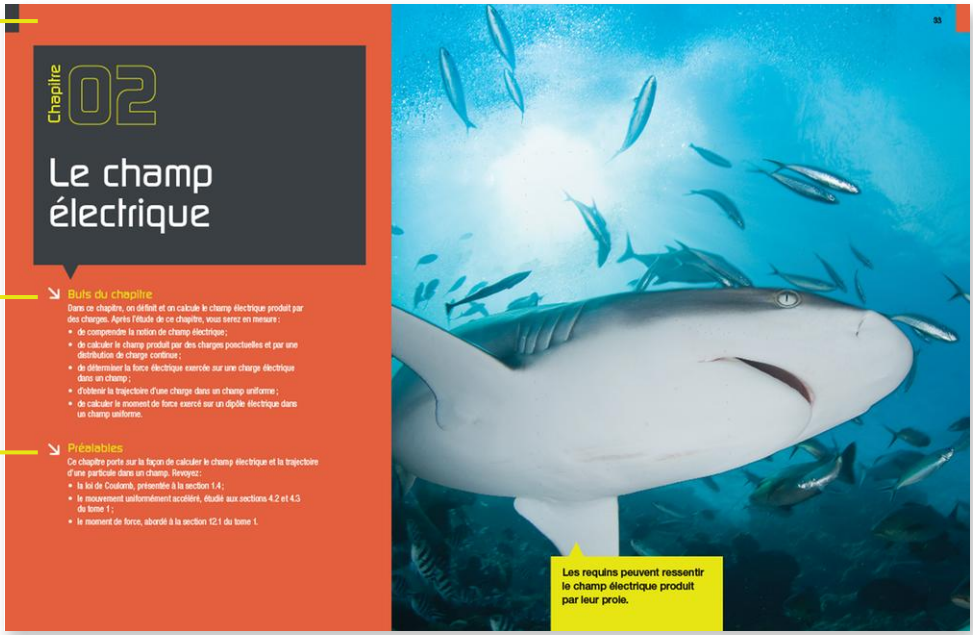
Une photographie accompagnée d'une légende illustre une situation que la matière du chapitre permet d'expliquer.

Buts du chapitre

Les buts du chapitre indiquent clairement les objectifs d'apprentissage visés. Ils facilitent le premier contact avec la matière et la révision.

Préalables

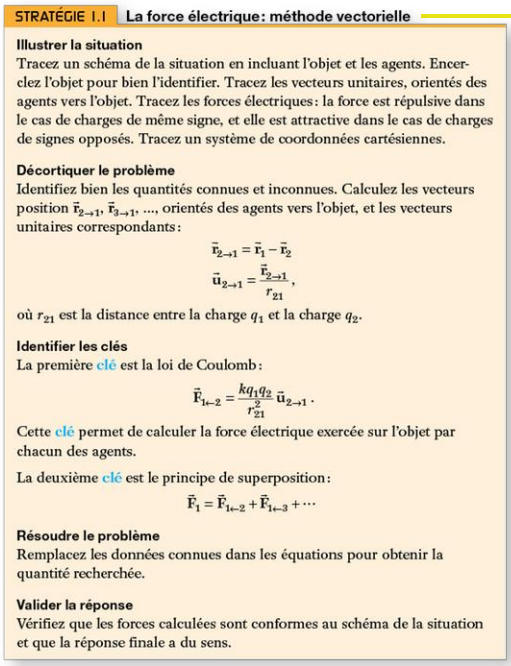
Les préalables précisent quelles notions doivent être maîtrisées ou révisées afin de pouvoir comprendre la matière et d'atteindre les objectifs d'apprentissage. Ainsi, le lecteur peut rapidement mettre à jour ses connaissances et établir des liens entre les notions.



Rubriques

Stratégie

La rubrique Stratégie expose et précise la stratégie de résolution de problème qui est utilisée dans tous les exemples résolus. Elle présente au lecteur une approche systématique de la résolution de problème qui favorise son autonomie.



STRATÉGIE 1.1 La force électrique : méthode vectorielle

Illustrer la situation

Tracez un schéma de la situation en incluant l'objet et les agents. Encerclez l'objet pour bien l'identifier. Tracez les vecteurs unitaires, orientés des agents vers l'objet. Tracez les forces électriques : la force est répulsive dans le cas de charges de même signe, et elle est attractive dans le cas de charges de signes opposés. Tracez un système de coordonnées cartésiennes.

Décortiquer le problème

Identifiez bien les quantités connues et inconnues. Calculez les vecteurs position $\vec{r}_{2\to1}$, $\vec{r}_{3\to1}$, ..., orientés des agents vers l'objet, et les vecteurs unitaires correspondants :

$$\vec{r}_{2\to1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{u}_{2\to1} = \frac{\vec{r}_{2\to1}}{r_{21}},$$

où r_{21} est la distance entre la charge q_1 et la charge q_2.

Identifier les clés

La première clé est la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1\leftarrow2} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{2\to1}.$$

Cette clé permet de calculer la force électrique exercée sur l'objet par chacun des agents.

La deuxième clé est le principe de superposition :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\leftarrow2} + \vec{F}_{1\leftarrow3} + \cdots$$

Résoudre le problème

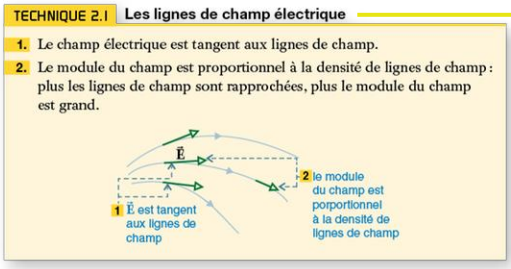
Remplacez les données connues dans les équations pour obtenir la quantité recherchée.

Valider la réponse

Vérifiez que les forces calculées sont conformes au schéma de la situation et que la réponse finale a du sens.

Technique

La rubrique Technique présente l'explication de certaines tâches précises, qui sont ensuite illustrées dans un exemple. Elle permet de préciser certaines étapes de la stratégie de résolution de problème dans des contextes particuliers.



TECHNIQUE 2.1 Les lignes de champ électrique

1. Le champ électrique est tangent aux lignes de champ.
2. Le module du champ est proportionnel à la densité de lignes de champ : plus les lignes de champ sont rapprochées, plus le module du champ est grand.

Exemple

Dans chaque exemple, présenté en détail, la stratégie de résolution de problème est utilisée. Les exemples sont souvent illustrés de façon réaliste et de façon schématique.

Figures réalistes et figures schématiques

Des figures réalistes permettent au lecteur d'ancrer la situation dans le concret, tandis que les figures schématiques permettent de poursuivre la résolution de problème en tenant compte de l'essentiel. Lorsque c'est nécessaire, certaines figures contiennent des annotations qui viennent compléter l'explication de la légende.

EXEMPLE 6.4 La résistance dans un serpentin

On forme un serpentin en enroulant un fil de nichrome (un alliage de nickel et de chrome) autour d'un cylindre de carton ayant un rayon de 5,0 cm. Le fil a un diamètre de 1,0 mm, et le serpentin comporte 25,0 spires. On branche le serpentin à une pile de 1,5 V.

a. Quel est le module du champ électrique dans le fil ?
b. Quelle est la résistance du fil ?
c. Quel est le courant dans le fil ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 6.17 illustre une partie du serpentin, c'est-à-dire le fil enroulé sur le cylindre.

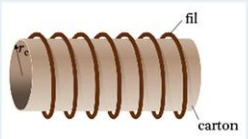


FIGURE 6.17
Le fil est enroulé autour d'un cylindre de rayon r_c. Chaque spire a une longueur de $2\pi r_c$.

Décortiquer le problème

La résistivité du nichrome est donnée dans le tableau 6.1 de la page 199.

Connues	Inconnues
$\rho = 1{,}08 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$	E
$N = 25{,}0$	R_{fil}
$d_{\text{fil}} = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}$	i
$\Delta V = 1{,}50\ \text{V}$	
$r_c = 0{,}050\ \text{m}$	

$$E = \frac{1{,}5\ \text{V}}{7{,}854\ \text{m}} = 0{,}19\ \text{V/m}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Pour calculer la résistance du fil, la clé est l'équation 6.23 :

$$R_{\text{fil}} = \frac{\rho \ell}{A}\,,$$

où $A = \pi r_{\text{fil}}^2 = \pi d_{\text{fil}}^2/4$ est **l'aire de la section du fil** (et non le rayon du cylindre de carton).

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$R_{\text{fil}} = \frac{4\rho\ell}{\pi d_{\text{fil}}^2} = \frac{4\,(1{,}08 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m})\,7{,}854\ \text{m}}{\pi\,(0{,}001\,0\ \text{m})^2} = 10{,}8\ \Omega = 11\ \Omega\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La clé est l'équation 6.24, reliant la différence de potentiel et le courant :

$$i_{\text{fil}} = \frac{\Delta V}{R_{\text{fil}}}\,.$$

Remarques et mises en garde

Aux endroits appropriés, des remarques sont ajoutées afin de fournir une information complémentaire, alors que des mises en garde préviennent des erreurs courantes.

REMARQUE

La loi de Coulomb est similaire à la loi de la gravitation universelle de Newton. La force gravitationnelle et la force électrique dépendent toutes les deux de l'inverse de la distance au carré.

MISE EN GARDE

Le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$ est un vecteur déplacement. En général, le vecteur déplacement $\vec{\mathbf{r}}_{i\to f}$ se calcule de façon vectorielle en soustrayant la position initiale de la position finale c'est-à-dire $\vec{\mathbf{r}}_{i\to f} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$.

Formules et définitions

Formules encadrées

Les équations essentielles sont encadrées afin d'attirer l'attention du lecteur.

où $0 \le \phi \le 180°$ représente l'angle entre la vitesse et le champ magnétique. On voit que le module a la forme du module d'un produit vectoriel. De plus, la force est perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique. La force magnétique est obtenue au moyen d'un produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\,. \qquad (9.2)$$

Pour une charge positive, on obtient le sens de $\vec{\mathbf{F}}_m$ à l'aide de la règle de la main droite pour le produit vectoriel (*voir la figure 9.3*) : on place les doigts

Définitions

Des termes en marge sont définis dans des encadrés, à l'aide de mots ou d'équations, annonçant au lecteur un terme important.

De la même façon, pour une configuration de charges électriques produisant un potentiel électrique, on trace les surfaces équipotentielles.

Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est une surface dont les points sont tous au même potentiel électrique.

Tableaux et encadrés

Tableaux

Des tableaux mettent en relation certaines données dont le lecteur pourra se servir pour résoudre les problèmes.

TABLEAU 5.1

Les valeurs approximatives de la constante diélectrique κ et de la rigidité diélectrique E_{max} à 20 °C

Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)	Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)
Air	1,00059	3	Plexiglas	3,4	
Eau	80,4		Polyéthylène	2,25	
Germanium	16		Polystyrène	2,6	24
Glycérine	42,5		Porcelaine	6 à 8	
Méthanol	33,6		PVC	3,4	40
Mica	3 à 6	150	Teflon	2,1	60
Papier	3	16	Verre	4 à 7	10 à 14

Encadrés

Les résultats importants et les limites des modèles et des approximations sont mis en relief dans des encadrés colorés.

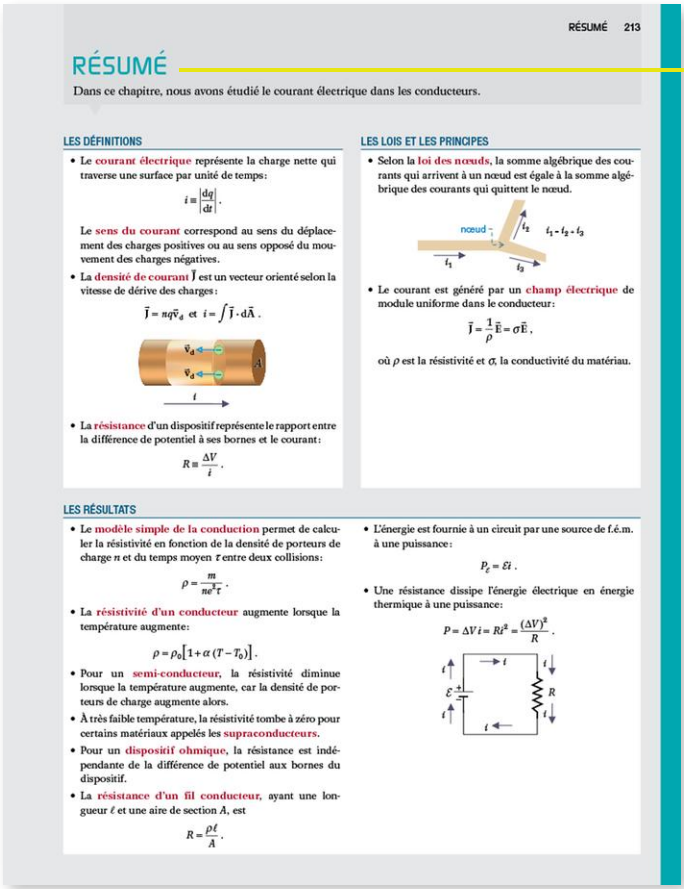
On peut résumer ainsi le mécanisme de Faraday lorsqu'une charge q_2 subit une force électrique exercée par une charge q_1 :

- Une charge q_1 produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$.
- Une charge q_2 plongée dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ subit une force électrique.

La figure 2.3 illustre une configuration plus complexe, avec une sphère chargée. Puisqu'un objet chargé produit un champ électrique, il doit exister un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ autour des objets chargés de la configuration. Pour mesurer le champ à un point quelconque $\mathcal{P}$, on place une charge-test positive q_0 à cet endroit, comme à la figure 2.3a. La charge q_0 joue le rôle d'une sonde. Le champ électrique est défini comme étant la force électrique par unité de charge :

Résumé

Les résumés de fin de chapitre, sur une seule page, constituent une synthèse de la matière. Les concepts importants du chapitre y sont repris de façon succincte et sont regroupés par types ; ils s'avèrent des outils de compréhension et de révision très utiles.



RÉSUMÉ 213

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le courant électrique dans les conducteurs.

LES DÉFINITIONS

- Le **courant électrique** représente la charge nette qui traverse une surface par unité de temps :

$$i \equiv \left|\frac{dq}{dt}\right|.$$

Le **sens du courant** correspond au sens du déplacement des charges positives ou au sens opposé du mouvement des charges négatives.

- La **densité de courant** $\vec{J}$ est un vecteur orienté selon la vitesse de dérive des charges :

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \text{ et } i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

- La **résistance** d'un dispositif représente le rapport entre la différence de potentiel à ses bornes et le courant :

$$R \equiv \frac{\Delta V}{i}.$$

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Selon la **loi des nœuds**, la somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui quittent le nœud.

nœud : $i_1 = i_2 + i_3$

- Le courant est généré par un **champ électrique** de module uniforme dans le conducteur :

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E},$$

où ρ est la résistivité et σ, la conductivité du matériau.

LES RÉSULTATS

- Le **modèle simple de la conduction** permet de calculer la résistivité en fonction de la densité de porteurs de charge n et du temps moyen τ entre deux collisions :

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}.$$

- La **résistivité d'un conducteur** augmente lorsque la température augmente :

$$\rho = \rho_0\left[1 + \alpha(T - T_0)\right].$$

- Pour un **semi-conducteur**, la résistivité diminue lorsque la température augmente, car la densité de porteurs de charge augmente alors.
- À très faible température, la résistivité tombe à zéro pour certains matériaux appelés les **supraconducteurs**.
- Pour un **dispositif ohmique**, la résistance est indépendante de la différence de potentiel aux bornes du dispositif.
- La **résistance d'un fil conducteur**, ayant une longueur ℓ et une aire de section A, est

$$R = \frac{\rho\ell}{A}.$$

- L'énergie est fournie à un circuit par une source de f.é.m. à une puissance :

$$P_\mathcal{E} = \mathcal{E}i.$$

- Une résistance dissipe l'énergie électrique en énergie thermique à une puissance :

$$P = \Delta V i = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}.$$

Un peu d'histoire

Une capsule historique est présentée au début de quatre chapitres. Elle met en évidence les contextes de certaines découvertes et souligne l'importance de la contribution de personnalités de la physique.

UN PEU D'HISTOIRE

Le chercheur solitaire qui charmait les foules

« À quoi ça sert ? » Cette question revient souvent lorsqu'une nouveauté scientifique est annoncée. En 1816, Michael Faraday, âgé de 25 ans, est chargé de parler devant une société savante londonienne de l'oxygène et des autres éléments récemment identifiés par des chimistes tels qu'Antoine Lavoisier et Humphry Davy. Faraday répond à cette interrogation de la salle en reprenant les propos arrivés à Benjamin Franklin au sujet de l'utilité des premiers ballons : « Eh ! à quoi bon l'enfant qui vient de naître ? » Et Faraday d'ajouter que c'est la tâche du chercheur de s'efforcer de rendre utiles les trouvailles de la science.

Cette préoccupation domine la carrière de Faraday. Fils de forgeron, il travaille d'abord pour un relieur. Il développe sa curiosité en lisant, et sa dextérité dans l'atelier où il peut appliquer jusqu'à mille coups de maillet sans se reposer. En 1812, un client du relieur lui offre des places pour assister à des conférences de Davy. Faraday prend des notes abondantes et les relie sous la forme d'un volume qu'il présente au conférencier. Blessé par une explosion de laboratoire qui l'empêche de prendre des notes, Davy l'embauche à titre de secrétaire. Engagé ensuite comme assistant à l'Institution royale de Londres, Faraday aide Davy à isoler l'iode et liquéfier le chlore.

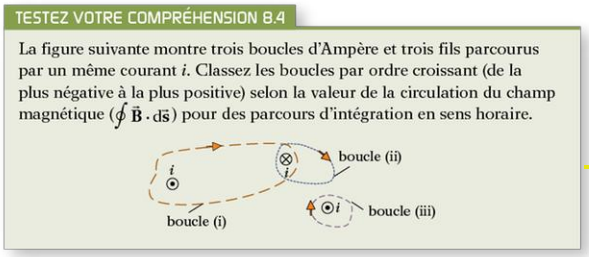
À cette époque au Royaume-Uni, la science est un passe-temps pour amateurs. La plupart des savants sont des militaires, des pasteurs protestants ou des médecins. Le poste modeste de Faraday lui permet néanmoins de réaliser ses propres expériences et de se dédier à la science. Il augmente ses revenus en enfonçant des analyses chimiques pour des entrepreneurs et le gouvernement anglais, pour lequel il travaille aussi comme conseiller scientifique sur des sujets aussi variés que l'amélioration des phares, la qualité de l'avoine fournie aux bagnards et l'utilisation de paratonnerres sur les navires.

En 1820, Ørsted annonce qu'un courant électrique affecte une aiguille aimantée et plusieurs physiciens français examinent ce nouveau phénomène. En rédigeant un compte rendu des événements, Faraday ignore en 1821 un dispositif capable d'engendrer la rotation continue d'un conducteur sous l'action d'un aimant et, symétriquement, celle d'un aimant sous l'action d'un conducteur. C'est le principe du moteur électrique, mais le sujet ne passionne pas l'Institution royale. Faraday ne poursuivra son investigation de l'électromagnétisme qu'après la mort de Davy, en 1829.

En 1831, Faraday découvre l'induction en montrant qu'un électroaimant crée un courant dans un conducteur approprié. Il apporte la preuve que ce nouveau courant électrique est de même nature que l'électricité issue du frottement ou d'une pile. Ces recherches préparent l'unification de l'électricité et du magnétisme. Afin de démontrer cette unité de tous les phénomènes électriques, Faraday se penche sur leurs effets chimiques. En 1833, après avoir consulté des collègues, il propose une réforme du vocabulaire de l'électricité et introduit de nouveaux termes, dont anode, cathode, électrode, électrolyte, anion, cation, ion et diélectrique, qui sont encore employés aujourd'hui.

Vulgarisateur habile, il donne des conférences qui arrivent jusqu'à 1000 personnes. Pourtant, Faraday préfère travailler seul dans son laboratoire. Des heures ou des jours peuvent s'écouler sans qu'il adresse plus de quelques mots à son assistant. Reconnu comme un des meilleurs expérimentateurs de son temps, c'est un des derniers grands physiciens à procéder de manière souvent empirique, sans se référer à des équations chiffrées. À partir de 1855, James Clerk Maxwell traduit sa théorie à base de champs et de lignes de force en termes mathématiques, à la grande satisfaction du vieux savant. S'il ne vit pas assez longtemps pour assister au triomphe de l'électricité utile, Faraday n'aura jamais cessé de travailler pour améliorer la connaissance des phénomènes électriques, la clé de leur utilité.

Michael Faraday, 1791-1867


TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.4

La figure suivante montre trois boucles d'Ampère et trois fils parcourus par un même courant i. Classez les boucles par ordre croissant (de la plus négative à la plus positive) selon la valeur de la circulation du champ magnétique ($\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$) pour des parcours d'intégration en sens horaire.

Exercices de niveaux variés

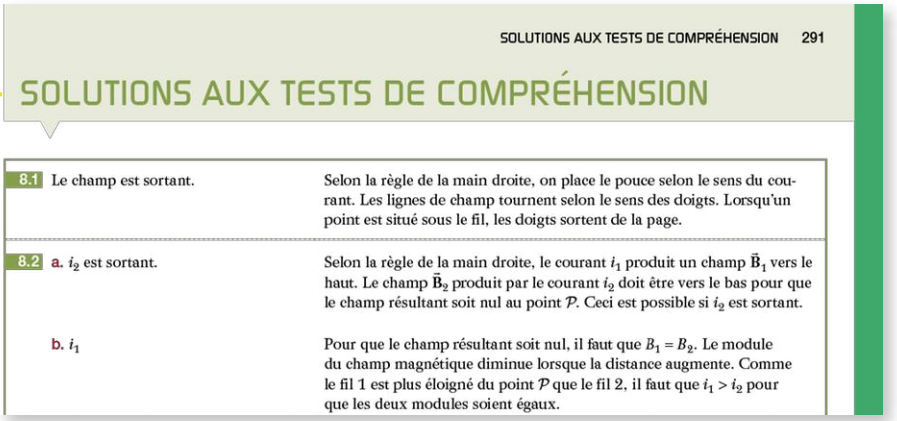
Chaque chapitre contient plusieurs exercices de niveaux variés, qui couvrent l'ensemble de la matière. En voici les différents types :

Testez votre compréhension

Ces questions qualitatives simples sont insérées à des endroits opportuns dans les chapitres ; elles permettent de tester la compréhension des notions qui viennent tout juste d'être vues.

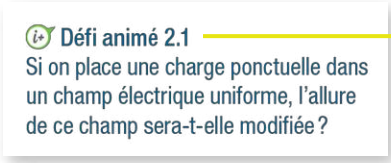
Solutions aux tests de compréhension

Les solutions aux tests de compréhension sont disponibles à la fin de chaque chapitre. Le lecteur peut donc évaluer sa compréhension lui-même et revenir sur les notions moins bien maîtrisées, au besoin.



SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

8.1 Le champ est sortant.	Selon la règle de la main droite, on place le pouce selon le sens du courant. Les lignes de champ tournent selon le sens des doigts. Lorsqu'un point est situé sous le fil, les doigts sortent de la page.
8.2 a. i_2 est sortant.	Selon la règle de la main droite, le courant i_1 produit un champ $\vec{B}_1$ vers le haut. Le champ $\vec{B}_2$ produit par le courant i_2 doit être vers le bas pour que le champ résultant soit nul au point $\mathcal{P}$. Ceci est possible si i_2 est sortant.
b. i_1	Pour que le champ résultant soit nul, il faut que $B_1 = B_2$. Le module du champ magnétique diminue lorsque la distance augmente. Comme le fil 1 est plus éloigné du point $\mathcal{P}$ que le fil 2, il faut que $i_1 > i_2$ pour que les deux modules soient égaux.


Défi animé 2.1

Si on place une charge ponctuelle dans un champ électrique uniforme, l'allure de ce champ sera-t-elle modifiée ?

Défis animés

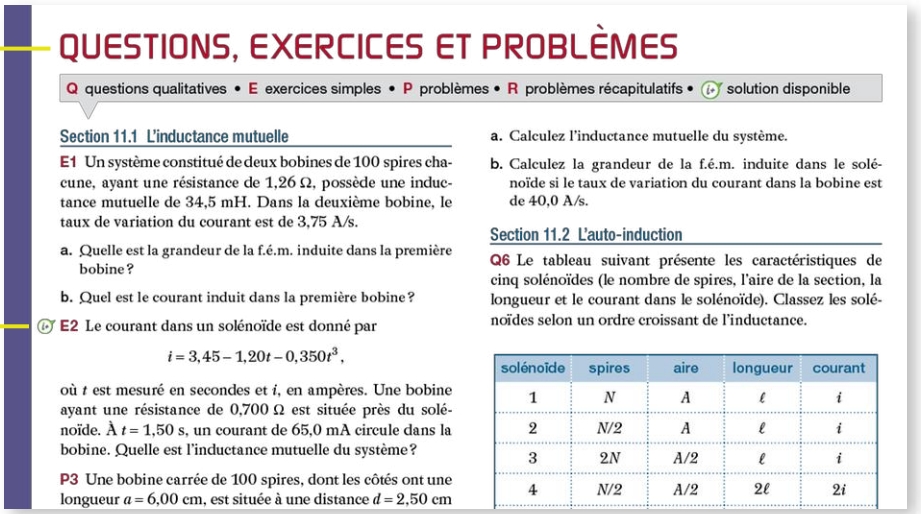
On trouve parfois en marge une question en lien avec la matière. Pour y répondre, l'étudiant est appelé à se rendre sur interactif pour réaliser la manipulation nécessaire. Il s'agit d'une manipulation dirigée des simulations interactives de l'Université de Boulder au Colorado.

Questions, exercices et problèmes

À la fin des chapitres, les exercices sont divisés en quatre niveaux de difficulté : les questions qualitatives (Q), les exercices simples (E), les problèmes (P) et les problèmes récapitulatifs (R). Les réponses, y compris les schémas, se trouvent en fin de manuel.

Solutions disponibles à l'étudiant

Pour certaines questions et certains exercices et problèmes, les solutions complètes et détaillées sont disponibles pour l'étudiant sur interactif. Elles reprennent la démarche de résolution de problème utilisée dans tout le manuel.


QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • E exercices simples • P problèmes • R problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 11.1 L'inductance mutuelle

E1 Un système constitué de deux bobines de 100 spires chacune, ayant une résistance de 1,26 Ω, possède une inductance mutuelle de 34,5 mH. Dans la deuxième bobine, le taux de variation du courant est de 3,75 A/s.

a. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite dans la première bobine ?

b. Quel est le courant induit dans la première bobine ?

E2 Le courant dans un solénoïde est donné par

$$i = 3{,}45 - 1{,}20t - 0{,}350t^3,$$

où t est mesuré en secondes et i, en ampères. Une bobine ayant une résistance de 0,700 Ω est située près du solénoïde. À $t = 1{,}50$ s, un courant de 65,0 mA circule dans la bobine. Quelle est l'inductance mutuelle du système ?

P3 Une bobine carrée de 100 spires, dont les côtés ont une longueur $a = 6{,}00$ cm, est située à une distance $d = 2{,}50$ cm

a. Calculez l'inductance mutuelle du système.

b. Calculez la grandeur de la f.é.m. induite dans le solénoïde si le taux de variation du courant dans la bobine est de 40,0 A/s.

Section 11.2 L'auto-induction

Q6 Le tableau suivant présente les caractéristiques de cinq solénoïdes (le nombre de spires, l'aire de la section, la longueur et le courant dans le solénoïde). Classez les solénoïdes selon un ordre croissant de l'inductance.

solénoïde	spires	aire	longueur	courant
1	N	A	ℓ	i
2	$N/2$	A	ℓ	i
3	$2N$	$A/2$	ℓ	i
4	$N/2$	$A/2$	2ℓ	$2i$

Table des matières

Partie 1 • L'électrostatique

Chapitre 01

La charge électrique 2

1.1 Quelques expériences simples 5
1.2 Les propriétés de la charge électrique 7
1.3 Les isolants et les conducteurs 10
1.4 La loi de Coulomb 15
Résumé 26
Questions, exercices et problèmes 27

Chapitre 02

Le champ électrique 32

2.1 La notion de champ 34
2.2 Le champ de charges ponctuelles 37
2.3 Le champ électrique d'un dipôle 41
2.4 Les distributions continues de charge 44
2.5 Le champ produit par les anneaux, les disques et les plans 53
2.6 Les lignes de champ 60
2.7 Le mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électrique 62
2.8 Un dipôle dans un champ électrique 67
Résumé 70
Questions, exercices et problèmes 71

Chapitre 03

Le théorème de Gauss 80

3.1 La symétrie 83
3.2 Le flux électrique 86
3.3 Le théorème de Gauss 91
3.4 Le théorème de Gauss en action 94
3.5 Les conducteurs en équilibre électrostatique 102
3.6 Le champ électrique dans les diélectriques 107
Résumé 110
Questions, exercices et problèmes 111

Chapitre 04

Le potentiel électrique 118

4.1 L'énergie potentielle électrique 120
4.2 Le potentiel électrique 125
4.3 Les surfaces équipotentielles 130
4.4 Le potentiel de charges ponctuelles 131
4.5 L'énergie potentielle de charges ponctuelles 135
4.6 Le potentiel d'une distribution continue 137
4.7 Le calcul du champ électrique à partir du potentiel 141
4.8 Le potentiel des conducteurs en équilibre électrostatique 144
4.9 Les sources de différence de potentiel 148
4.10 L'énergie potentielle associée à un dipôle dans un champ électrique 151
Résumé 153
Questions, exercices et problèmes 154

Partie 2 • Les circuits

Chapitre 05

Les condensateurs 162

5.1 La capacité d'un condensateur 164
5.2 Le calcul de la capacité 166
5.3 L'énergie emmagasinée dans un condensateur 171
5.4 L'association de condensateurs 174
Résumé 182
Questions, exercices et problèmes 183

Chapitre 06

Le courant électrique 188

6.1 Le courant électrique 190
6.2 Le champ électrique et la conduction 195
6.3 La résistivité et la température 200
6.4 Le courant dans les fils conducteurs 203
6.5 La résistance et la loi d'Ohm 207
6.6 La puissance dans les circuits électriques 210
Résumé 213
Questions, exercices et problèmes 214

Chapitre 07

Les circuits à courant continu 218

7.1 Les dispositifs électriques et les diagrammes 220
7.2 Les lois de Kirchhoff 220
7.3 Les piles réelles 224
7.4 L'association de résistances 226
7.5 Les instruments de mesure 233
7.6 Les circuits à plusieurs sources de f.é.m. 234
7.7 Les circuits RC 237
Résumé 243
Questions, exercices et problèmes 244

Partie 3 • Le magnétisme

Chapitre 08

Le champ magnétique 252

8.1 Les aimants et le champ magnétique 255
8.2 La loi de Biot-Savart 260
8.3 Le champ magnétique d'un fil infini 265
8.4 Les boucles de courant et les dipôles magnétiques 267
8.5 Le théorème d'Ampère 271
8.6 Le champ magnétique produit par les solénoïdes 278
Résumé 284
Questions, exercices et problèmes 285

Chapitre 09

La force magnétique 292

9.1 La force magnétique sur une charge en mouvement 294
9.2 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique 297
9.3 Quelques applications liées à la force magnétique 301
9.4 L'effet Hall 307
9.5 La force magnétique sur les fils 311
9.6 Les dipôles magnétiques dans un champ magnétique 315
9.7 Le magnétisme des atomes 320
9.8 Les propriétés magnétiques des matériaux 324
Résumé 327
Questions, exercices et problèmes 328

Partie 4 • L'induction électromagnétique et le courant alternatif

Chapitre 10

L'induction électromagnétique 336

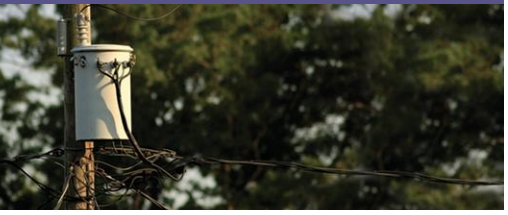
10.1 La découverte de Faraday 339
10.2 Le flux magnétique 340
10.3 La loi de Faraday 343
10.4 La loi de Lenz 345
10.5 La f.é.m. induite dans un conducteur en mouvement 348
10.6 Les générateurs 353
10.7 Le champ électrique induit 355
10.8 Le théorème d'Ampère-Maxwell 359
10.9 Les équations de Maxwell 363
Résumé 366
Questions, exercices et problèmes 367

Chapitre 11

L'inductance 374

11.1 L'inductance mutuelle 376
11.2 L'auto-induction 379
11.3 Le circuit RL 382
11.4 L'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction 387
11.5 Les oscillations dans un circuit LC 391
11.6 Les oscillations amorties dans un circuit RLC 395
Résumé 399
Questions, exercices et problèmes 400

Chapitre 12



Les circuits à courant alternatif 406

12.1 Les circuits à courant alternatif 408
12.2 Les résistances dans les circuits à courant alternatif 411
12.3 Les condensateurs dans les circuits à courant alternatif 414
12.4 Les bobines d'induction dans les circuits à courant alternatif 416
12.5 Le circuit RLC en série 419
12.6 La puissance dans les circuits à courant alternatif 426
12.7 Les transformateurs 429
12.8 Les circuits redresseurs 433
Résumé 435
Questions, exercices et problèmes 436

Annexes

A Le système international d'unités. 443
B Les constantes fondamentales 446
C Les données utiles. 447
D Quelques données astronomiques. 449
E Les formules mathématiques 450
F Les propriétés des éléments. 454
G Le tableau périodique des éléments 456

Réponses aux questions et exercices 457
Crédits 470
Index 471

Liste des techniques et des stratégies

Techniques

2.1 Les lignes de champ électrique 60
3.1 Un conducteur en équilibre électrostatique 105
5.1 Les circuits de condensateurs 177
7.1 Les circuits de résistances ayant une seule source 231
10.1 Le sens du courant induit dans une boucle 346

Stratégies

1.1 La force électrique : méthode vectorielle 21
1.2 La force électrique : méthode scalaire 24
2.1 Le champ électrique de charges ponctuelles 39
2.2 Le champ produit par une distribution continue de charge 48
2.3 Une charge dans un champ uniforme 63
3.1 Le champ à l'aide du théorème de Gauss 95
4.1 Le potentiel produit par une distribution continue de charge 138
7.1 Les circuits et l'application des lois de Kirchhoff 235

Chapitre 01

La charge électrique

Buts du chapitre

Ce chapitre aborde l'électrostatique en s'intéressant d'abord à la charge électrique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de connaître les propriétés de la charge électrique ;
- de comprendre qualitativement le comportement des conducteurs et des isolants ;
- de calculer la force électrique exercée entre des particules chargées.

Préalables

Ce chapitre porte sur la façon de calculer la force électrique, qui est une quantité vectorielle. Revoyez :

- les vecteurs et l'algèbre vectorielle, étudiés aux sections 2.1 et 2.3 du tome 1 ;
- la stratégie de résolution de problèmes, présentée à la section 1.8 du tome 1.

Après avoir frotté le ballon sur les cheveux, il y a une attraction électrique entre les cheveux et le ballon.

L'exceptionnelle précision de Coulomb

La conquête anglaise du Canada aura permis à Charles-Augustin Coulomb de décrocher sa première mission importante comme ingénieur. Quand les Britanniques décident de conserver la Nouvelle-France, acquise de haute lutte, ils laissent aux Français quelques îles des Antilles, dont la Martinique. Pour assurer la défense de ces colonies entourées d'ennemis, le roi de France envoie Coulomb superviser le renforcement des fortifications. Le jeune ingénieur passe ainsi huit années loin des siens. Membre d'une nouvelle génération d'ingénieurs initiés aux pratiques scientifiques, il accumule les observations et les expériences. À son retour au pays, il soumet plusieurs rapports à l'Académie royale des sciences.

En 1777, l'Académie crée un prix pour l'amélioration des boussoles et l'explication des variations quotidiennes du champ magnétique terrestre. Le sujet intéresse naturellement Coulomb. La boussole est un outil de travail essentiel pour l'arpentage ou l'orientation des édifices. En traversant l'Atlantique, Coulomb a également pu en apprécier l'importance pour la navigation.

Coulomb remplace d'abord l'aiguille traditionnelle posée sur un pivot par une aiguille aimantée suspendue à un fil de soie. Il a étudié les propriétés mécaniques de la soie et a établi que celle-ci ne s'opposera pas aux faibles forces engendrées par les fluctuations du champ magnétique. Ce qu'il a oublié, c'est que la soie est un isolant. Pour éliminer l'influence de l'électricité statique qui perturbe les mouvements de l'aiguille, il faut une mise à la terre. Coulomb utilise donc un fil métallique et découvre que le moment de force est proportionnel à l'angle de torsion. Il en tire la balance à torsion, d'une sensibilité sans précédent, et s'en servira pour mesurer la force de l'électricité.

Qu'est-ce que l'électricité ? Au 18e siècle, personne ne connaît la réponse à cette question. L'électricité partage des caractéristiques déroutantes avec le magnétisme et la chaleur. Invisible et impalpable, elle a aussi un poids indétectable. Les savants la comparent à un fluide capable de couler d'un corps à un autre. L'invention de la bouteille de Leyde, en 1745, part de l'idée qu'on pourrait accumuler l'électricité dans un récipient fermé pour réduire son « évaporation », c'est-à-dire la perte progressive de l'électrisation des corps chargés par friction. C'est le premier condensateur.

Parfois, les substances électrisées s'attirent. Parfois, elles se repoussent. Les savants anglais croient que l'électricité se compose d'un fluide unique, tandis que les savants français soutiennent qu'il s'agit de deux fluides différents. À l'époque de Coulomb, la plupart des expériences sur l'électricité restent qualitatives. Presque personne n'a fait passer l'électricité dans la catégorie des phénomènes mesurables, mais plusieurs résultats indiquent que l'attraction des corps chargés s'exerce de la même manière que l'attraction gravitationnelle. En 1785, la balance à torsion de Coulomb révèle que la répulsion entre les charges électriques varie bel et bien selon l'inverse du carré des distances. Avec un instrument moins précis, un pendule à torsion muni d'un fil de soie, le savant complète la démonstration en obtenant une attraction selon l'inverse du carré des distances.

Les mesures de Coulomb semblent trop exactes pour être vraies. Hors de la France, ses contemporains sont sceptiques. Plusieurs historiens ont depuis tenté de reproduire ses expériences, sans grand succès. Les résultats dépendent si étroitement des matériaux employés et de la procédure suivie que certains le soupçonnent d'avoir sélectionné l'appareillage qui donnerait les résultats recherchés. En fait, peu d'expérimentateurs modernes ont mis le même soin à maîtriser toutes les conditions de l'expérience, substituant du plastique à la cire d'époque, par exemple. Coulomb a consacré des mois à l'étude des matériaux, à la mesure de petites forces et au perfectionnement de sa balance. La récompense de ses multiples expériences, c'est qu'il peut affirmer avec confiance qu'il a déterminé les lois gouvernant les forces électrique et magnétique. Et qu'il a raison.

Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806

La force électrique est une force à distance exercée sur les objets ayant une charge électrique. Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés de la charge électrique. À l'aide du modèle atomique, nous verrons d'où vient la charge lorsqu'on frotte deux objets ensemble. Nous allons aussi distinguer les isolants des conducteurs. Ces deux types d'objets ont des propriétés différentes. Nous verrons aussi que lorsque les objets sont petits par rapport à la distance qui les sépare, la force peut être calculée simplement à l'aide d'une relation qui a la même forme que la loi de la gravitation universelle de Newton.

L'étude que nous faisons dans ce chapitre est une première étape dans l'étude de la force électrique. Dans les prochains chapitres, nous allons construire graduellement la théorie de l'électromagnétisme qui nous mènera vers une meilleure compréhension du monde qui nous entoure et des applications multiples de l'électricité dans la vie de tous les jours et dans les domaines scientifiques.

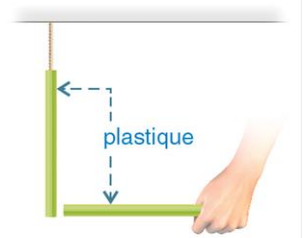
On amorce l'étude de l'interaction électromagnétique par de simples expériences comme celle où on frotte un ballon de fête contre des cheveux. Comme le montre la photo de l'ouverture du chapitre, il y a alors une force entre les cheveux et le ballon. Il est aussi possible de placer le ballon contre un mur et de le lâcher. Si le ballon a été suffisamment frotté contre les cheveux, il pourra rester en équilibre. Ce phénomène a été observé plusieurs siècles avant Jésus-Christ : on avait remarqué que des morceaux d'ambre, une résine fossilisée qu'on peut voir à la figure 1.1, attiraient de petits morceaux de paille après avoir été frottés vigoureusement avec un vêtement. D'ailleurs, le mot *électricité* est un dérivé du mot ambre (*ηλεκτρον*) en grec.

FIGURE 1.1
L'ambre peut être chargé par frottement avec de la laine.

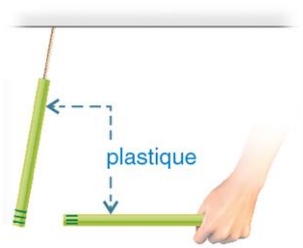
I.I Quelques expériences simples

Par une journée où l'air était sec, vous avez probablement déjà ressenti une sensation désagréable en touchant une poignée de porte en métal. En frottant vos pieds sur un plancher recouvert d'un tapis, vous avez accumulé une charge électrique. Lorsque vous avez touché la poignée de porte, cette charge s'est déplacée rapidement en vous donnant un choc électrique.

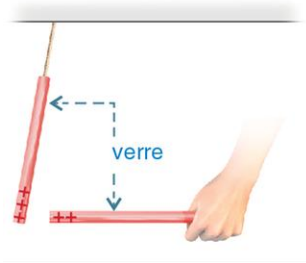
Pour connaître les propriétés de la charge électrique, on peut mener quelques expériences élémentaires à l'aide de tiges de plastique, de verre et de métal munies d'une poignée de bois. On a aussi besoin de morceaux de laine et de soie ainsi que de la ficelle.



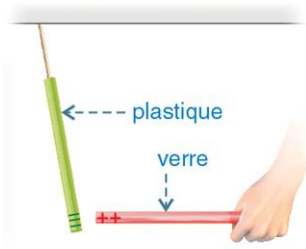
Expérience 1 : On approche une tige de plastique d'une autre tige de plastique suspendue. Les tiges n'ont été frottées ni avec de la laine ni avec de la soie. Les tiges restent immobiles. Il n'y a donc aucune force entre les deux tiges. On dit que les tiges sont neutres.



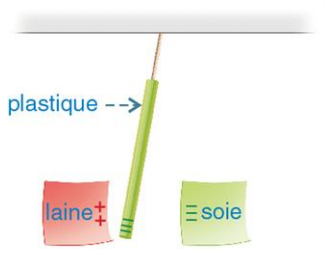
Expérience 2 : On frotte deux tiges de plastique avec de la laine. Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges.



Expérience 3 : On frotte deux tiges de verre avec de la soie. Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges.



Expérience 4 : On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de plastique avec de la laine. On suspend la tige de plastique. Lorsqu'on approche la tige de verre, il y a une attraction entre les tiges.



Expérience 5 : On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de plastique avec de la laine. On suspend la tige de plastique entre les deux matières. La tige de plastique est attirée par la laine utilisée pour charger la tige. De plus, la tige est repoussée par la soie ayant servi à charger la tige de verre.

Dans ces expériences, le module de la force est plus grand lorsqu'on diminue la distance entre les tiges ou lorsqu'on frotte plus longtemps les tiges.

Ces expériences montrent que les tiges acquièrent respectivement une charge électrique nette lorsqu'on les frotte avec de la laine ou de la soie. Elles démontrent aussi que les objets chargés exercent l'un sur l'autre une force à distance qu'on appelle la *force électrique*. Cette force est soit attractive (*voir l'expérience 4*), soit répulsive (*voir les expériences 2 et 3*). L'expérience 5 prouve que la laine devient aussi chargée après avoir été frottée sur le plastique. La laine se comporte comme la tige de verre et attire la tige de plastique. De plus, la soie ayant servi à charger une tige de verre repousse la tige de plastique. Elle se comporte comme le plastique.

On peut électriser d'autres objets par frottement. Ces derniers se comportent alors comme la tige de verre ou comme la tige de plastique. Ceci montre qu'il y a deux types de charge : celle qui est portée par la tige de verre et celle qui est portée par la tige de plastique. Jusqu'au 18^{e} siècle, on emploie les expressions *électricité vitreuse* pour décrire la charge portée par la tige de verre et *électricité résineuse* pour la charge portée par le plastique, car à cette époque, on utilise plutôt de l'ambre, qui se comporte comme le plastique.

C'est le physicien américain Benjamin Franklin (1706-1790) qui énonce la convention utilisée aujourd'hui : la charge de la tige de verre frottée avec de la soie est positive, et celle de la tige de plastique frottée avec de la laine est négative. Lorsqu'on frotte le verre avec de la soie, le verre devient chargé positivement et la soie devient chargée négativement. De même, si on frotte du plastique avec de la laine, le plastique devient chargé négativement et la laine devient chargée positivement.

L'analyse de ces expérience nous apprend ce qui suit.

Les objets chargés exercent les uns sur les autres une force à distance appelée la **force électrique.** Cette force a les propriétés suivantes :

- La force est attractive lorsque les charges sont opposées (un objet chargé positivement et un objet chargé négativement), et elle est répulsive lorsque les charges ont le même signe (deux objets chargés positivement ou deux objets chargés négativement).
- Le module de la force diminue lorsque la distance entre les charges augmente.

1.2 Les propriétés de la charge électrique

La découverte des propriétés de l'atome faite durant la première moitié du 20e siècle a permis de comprendre l'origine de l'électricité. Ces propriétés seront expliquées dans le tome 3. Pour l'instant, on utilise un modèle rudimentaire pour interpréter les résultats obtenus dans les expériences de la section précédente.

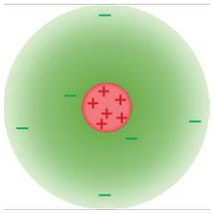


FIGURE 1.2
L'atome est constitué d'un noyau compact et d'un nuage électronique.

L'atome est composé d'un noyau massif et compact (de l'ordre de 10^{-14} m) entouré d'*électrons* (*voir la figure 1.2*). Le noyau est constitué de *protons* et de *neutrons*. Les électrons n'ont pas de trajectoires bien définies, mais ils forment un nuage électronique dont le diamètre est de l'ordre de 10^{-10} m.

La quantification de la charge

Les particules ont des propriétés intrinsèques : chaque particule a une masse bien définie et une charge électrique (*voir le tableau 1.1*). Le neutron est neutre, il n'a pas de charge électrique. Selon la convention de Franklin, le proton a une charge positive et l'électron, une charge négative. On a déterminé, grâce à des mesures très précises, que le proton et l'électron ont des charges opposées, dont la valeur absolue est égale. La charge du proton est appelée la *charge élémentaire*, et elle est représentée par e. La charge de l'électron est alors $-e$. Dans le SI, la charge se mesure en coulombs (C) (nous verrons plus tard de quelle façon est définie cette unité). Dans ce système d'unités, la valeur de la charge élémentaire est

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}\ . \qquad (1.1)$$

TABLEAU 1.1
La masse et la charge des constituants de l'atome

Particule	Masse (kg)	Charge
Électron	$9{,}109 \times 10^{-31}$	$-e$
Proton	$1{,}673 \times 10^{-27}$	$+e$
Neutron	$1{,}675 \times 10^{-27}$	0

Il existe d'autres particules subatomiques dans l'Univers. Diverses expériences ont montré que la charge est quantifiée.

La charge de toute particule est égale à un multiple entier de la charge élémentaire.

Quantification de la charge

Si on représente par q la charge d'une particule, alors $q = Ne$, où N est un entier positif, négatif ou nul*.

* Nous verrons au tome 3 que les protons et les neutrons sont constitués de particules appelées *quarks*, qui peuvent avoir une charge $+2e/3$ ou $-e/3$. Cependant, ces particules élémentaires sont toujours regroupées pour former des particules ayant une charge égale à un multiple entier de la charge élémentaire.

La matière qui nous entoure est formée d'atomes. Les atomes neutres possèdent autant d'électrons que de protons. Les expériences de la section 1.1 doivent être expliquées en fonction des électrons et des protons. Si un objet possède N_p protons et N_e électrons, alors sa charge nette est

$$q = N_p e + N_e(-e) = (N_p - N_e)e\,. \tag{1.2}$$

Un objet devient chargé lorsqu'il acquiert ou cède des électrons. En effet, les protons sont liés très fortement dans les noyaux. Cependant, certains des électrons peuvent être arrachés d'un atome. C'est l'*ionisation*. L'atome devient alors un *ion positif*. Certains atomes peuvent aussi accueillir un électron supplémentaire et devenir un *ion négatif*.

On obtient les possibilités suivantes :

- $N_e = N_p$: la charge nette de l'objet est nulle, car celui-ci a autant de protons que d'électrons. On dit alors que l'objet est neutre.
- $N_e < N_p$: la charge nette de l'objet est positive, car celui-ci possède moins d'électrons que de protons. On dit que l'objet est chargé positivement.
- $N_e > N_p$: la charge nette de l'objet est négative, car celui-ci possède plus d'électrons que de protons. On dit que l'objet est chargé négativement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.1

On frotte un ballon de fête contre des cheveux. Les cheveux deviennent chargés positivement, et le ballon devient chargé négativement. Lequel des énoncés suivants est vrai ?

(i) Le frottement entre les cheveux et le ballon crée des électrons sur le ballon et des protons sur les cheveux.

(ii) Le frottement entre les cheveux et le ballon entraîne un transfert de protons du ballon vers les cheveux.

(iii) Le frottement entre les cheveux et le ballon entraîne un transfert d'électrons du ballon vers les cheveux.

(iv) Le frottement entre les cheveux et le ballon entraîne un transfert d'électrons des cheveux vers le ballon.

(v) Le frottement entre les cheveux et le ballon entraîne un transfert de protons des cheveux vers le ballon.

La conservation de la charge

Outre le fait d'être quantifiée, une autre propriété de la charge électrique est qu'elle est conservée :

Principe de conservation de la charge

La charge électrique ne peut pas être créée ni détruite. La charge nette d'un système fermé doit demeurer constante.

Les expériences précédentes font intervenir l'échange d'électrons entre les objets. Le principe de conservation de la charge est plus général. Certaines particules subatomiques sont instables et se désintègrent. Par exemple, le neutron

libre se transforme en proton, en émettant un électron et un neutrino (une particule subatomique de très faible masse et de charge nulle) :

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}\,.$$

Par convention, on place en exposant la charge des particules, exprimée en fonction de la charge élémentaire. Dans la désintégration précédente, la charge électrique initiale est nulle et la charge électrique finale est nulle. La charge est bien conservée.

Il est aussi possible de créer des particules dans les grands accélérateurs de particules en convertissant de l'énergie en masse (selon la célèbre équation d'Einstein $E_0 = mc^2$). Cependant, lorsqu'on crée une particule de charge négative, une particule de charge positive est créée en même temps. La *création de paires* consiste par exemple à produire un électron (e^-) et un *positron* (e^+) à partir d'un rayon gamma (γ) de haute énergie :

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+\,.$$

Le positron (aussi appelé *positon*) est l'antiparticule de l'électron, une particule ayant la même masse que l'électron, mais une charge $+e$. Le rayon gamma a une charge nulle. Il se transforme en deux particules, de telle sorte que la somme des charges électriques est égale à zéro.

La transformation inverse de la création de paires est l'annihilation : lorsqu'un électron et un positron se rencontrent, ils disparaissent en produisant deux rayons gamma :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma\,.$$

Dans ce cas aussi, la charge est conservée.

EXEMPLE I.1 La radioactivité d'un détecteur de fumée

Les détecteurs de fumée possèdent habituellement un élément radioactif, l'américium. Les noyaux de l'isotope utilisé contiennent 95 protons et 146 neutrons. Un noyau se désintègre de la façon suivante :

$$^{241}_{95}\mathrm{Am} \rightarrow {}^{237}_{Z}\mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,.$$

Selon la notation utilisée en physique nucléaire, l'indice du bas représente le nombre de protons et l'indice du haut, le nombre de nucléons d'un noyau, c'est-à-dire la somme du nombre de protons et du nombre de neutrons. Quel est l'isotope $^{237}_{Z}\mathrm{X}$?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Dans l'équation de désintégration de l'énoncé, les indices inférieurs représentent la charge des noyaux correspondants, exprimés en fonction de la charge élémentaire, car chaque proton a une charge $q = +e$.

Connues		Inconnue
$q_i = 95e$	$q_f = Ze + 2e$	$^{237}_{Z}\mathrm{X}$

Identifier la clé

La **clé** est la conservation de la charge électrique :

$$q_i = q_f\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous trouvons la charge de l'isotope X :

$$95e = Ze + 2e \Rightarrow Z = 93\,.$$

Selon le tableau périodique de l'annexe G, l'élément qui possède 93 protons est le neptunium. Donc, l'isotope cherché est

$$^{237}_{Z}\mathrm{X} = {}^{237}_{93}\mathrm{Np}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien à la question en trouvant l'isotope recherché.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.2

Les situations suivantes présentent des réactions entre particules subatomiques. On place en exposant la charge de la particule, en fonction de la charge élémentaire. Donnez la charge de la particule sans exposant dans chacune des réactions.

a. $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda + K^0$

b. $\pi^+ + p^+ \rightarrow \Sigma + K^+$

c. $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}$

d. $\Delta \rightarrow p^+ + \pi^+$

TABLEAU 1.2

Une série triboélectrique : lorsqu'on met en contact deux matériaux neutres, le matériau situé plus haut dans le tableau devient chargé positivement et le matériau situé plus bas devient chargé négativement.

Fourrure de lapin
Verre
Cheveux
Nylon
Laine
Fourrure de chat
Coton
Soie
Polyester
Polyvinylchloré (PVC)
Polyéthylène
Caoutchouc
Teflon

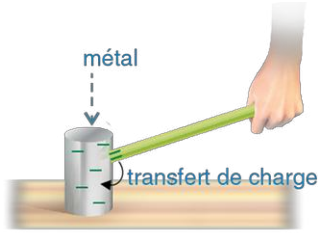
La triboélectricité

Les expériences 2 à 5 ont permis d'obtenir des objets chargés en frottant deux objets l'un sur l'autre. La *triboélectricité* consiste à mettre en contact deux objets pour qu'ils deviennent chargés, par l'échange d'électrons entre eux, l'un positivement et l'autre négativement. Le frottement augmente le nombre d'électrons transférés puisque la surface de contact entre les deux objets est plus grande. Si on frotte une tige de plastique avec de la laine, des électrons sont transférés de la laine au plastique ; la laine devient chargée positivement et le plastique devient chargé négativement. De la même façon, lorsqu'on frotte une tige de verre avec de la soie, il y a transfert d'électrons du verre à la soie. La soie devient chargée négativement, et le verre devient chargé positivement. Les expériences 2 à 5 montrent alors que les objets dont la charge est de signe opposé s'attirent, et que les objets dont la charge est de même signe se repoussent.

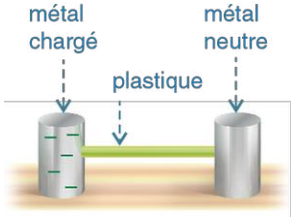
Il est possible d'utiliser différents matériaux pour obtenir des objets chargés. Certains matériaux ont tendance à donner des électrons, alors que d'autres ont tendance à recevoir des électrons. On peut obtenir une *série triboélectrique* en classant les matériaux selon leur affinité à donner des électrons. Le tableau 1.2 offre un exemple d'une série triboélectrique : lorsqu'on frotte deux matériaux de cette série, le matériau qui est situé plus haut dans le tableau devient chargé positivement (il perd des électrons), et le matériau situé plus bas devient chargé négativement (il gagne des électrons).

1.3 Les isolants et les conducteurs

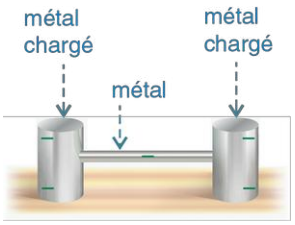
Les prochaines expériences démontrent qu'on peut séparer les matériaux en deux types : les conducteurs et les isolants.



Expérience 6 : Une tige de plastique chargée négativement est mise en contact avec un cylindre métallique. Le cylindre devient chargé négativement.



Expérience 7 : On place une tige de plastique neutre entre le cylindre chargé à l'expérience 6 et un autre cylindre métallique. Le deuxième cylindre métallique reste neutre.



Expérience 8 : On place une tige métallique entre le cylindre chargé à l'expérience 6 et un autre cylindre métallique neutre. Le deuxième cylindre devient chargé négativement.

Dans l'expérience 6, le contact entre la tige et le cylindre permet le transfert d'une partie de la charge négative de la tige vers le cylindre. Une partie des électrons se déplacent de la tige vers le cylindre. Cette expérience montre qu'il est possible de charger un objet en le mettant en contact avec un objet déjà chargé.

Les expériences 7 et 8 montrent la différence entre un conducteur et un isolant. Le plastique est un *isolant*. La charge ne se déplace pas dans la tige de plastique de l'expérience 7, car les électrons du plastique sont liés fortement à leur atome. Ils ne peuvent pas se déplacer hors de l'atome, comme le montre la figure 1.3. Le verre et le caoutchouc sont aussi des isolants.

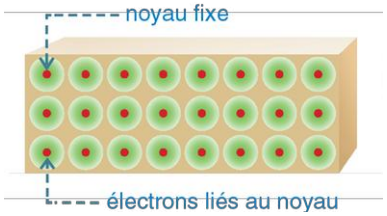


FIGURE 1.3
Dans un isolant, tous les électrons sont fortement liés à un atome particulier, et les nuages électroniques ne se superposent pas.

La tige de métal de l'expérience 8 permet à de la charge de circuler du cylindre de gauche au cylindre de droite. Les métaux sont des *conducteurs*. Lorsque les atomes d'un métal sont liés dans un réseau cristallin, les nuages électroniques se superposent, et les électrons de valence sont partagés parmi tous les atomes du métal. Ces électrons, qu'on appelle les *électrons de conduction*, peuvent se déplacer presque librement dans tout le métal, comme le montre la figure 1.4. En plaçant une tige métallique entre le cylindre chargé et le cylindre neutre, on permet aux électrons de se déplacer dans les trois conducteurs (qui n'en forment alors qu'un seul). On obtient une situation d'équilibre lorsque la charge est répartie entre les conducteurs.

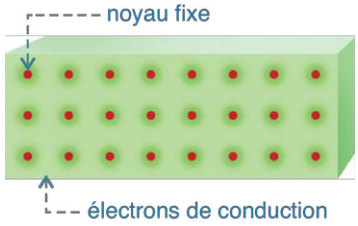


FIGURE 1.4
Dans un conducteur, les nuages électroniques se superposent, et les électrons de conduction sont partagés entre les atomes. Ils peuvent se déplacer dans tout le métal.

REMARQUE

On pourrait croire, en observant l'expérience 8, que les électrons du cylindre chargé se déplacent de la gauche vers la droite jusqu'au deuxième cylindre. Ce n'est pas le cas. En fait, tous les électrons de conduction se déplacent très légèrement, en exerçant une force électrique répulsive sur les autres électrons. La situation d'équilibre est donc atteinte très rapidement.

L'air conduit légèrement, surtout s'il est humide. Un objet chargé va perdre sa charge graduellement en la partageant avec l'air. Il est possible de décharger un objet en le mettant en contact avec le sol, comme l'illustre la figure 1.5. C'est ce qu'on appelle une *mise à la terre*. Le sol n'est pas aussi bon conducteur qu'un métal,

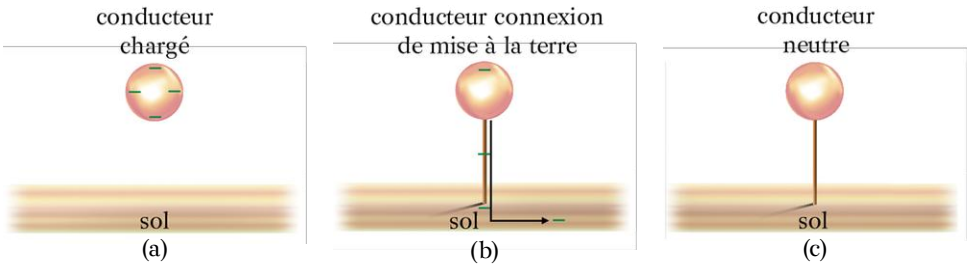


FIGURE 1.5
(a) Un conducteur chargé, avec la charge distribuée sur sa surface. (b) Le conducteur est relié au sol à l'aide d'un fil conducteur. La charge se déplace dans le sol. (c) Le conducteur devient neutre après un très petit intervalle de temps.

mais il peut contenir une grande quantité de charges supplémentaires. En mettant un objet à la terre, celui-ci partage ses électrons avec le sol en entier. À l'équilibre, l'objet devient neutre, car les charges excédentaires vont se répartir dans la terre.

Il est important de mettre à la terre certains appareils et certains circuits afin d'empêcher qu'une charge excédentaire s'accumule sur l'appareil. On verra au chapitre 4 qu'un excès de charge produit une *différence de potentiel électrique* entre l'objet et la terre. La troisième connexion d'une prise de courant est la mise à la terre. Cette fiche est souvent reliée à un élément de plomberie métallique qui est en contact avec le sol. Pour indiquer une mise à la terre, on utilise habituellement le symbole ⏚.

EXEMPLE 1.2 Deux sphères conductrices en contact

Deux sphères conductrices sont identiques : elles ont le même rayon. La première sphère porte une charge de 6,0 nC et la deuxième, une charge de –9,0 nC. Les deux sphères sont rapprochées jusqu'à ce qu'elles se touchent, puis elles sont éloignées. Quelle est la charge de chaque sphère après qu'elles ont été éloignées l'une de l'autre ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 1.6 illustre l'état initial, lorsque les sphères sont en contact et l'état final.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$q_{1i} = 6{,}0$ nC	$q_{2i} = -9{,}0$ nC	q_{1f}	q_{2f}

En plaçant les sphères conductrices en contact, cela permet à la charge de se déplacer d'une sphère à l'autre. À l'équilibre, chaque sphère doit avoir la même charge, car les sphères sont identiques. Donc,

$$q_{1f} = q_{2f} \,. \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est la conservation de la charge :

$$q_{1i} + q_{2i} = q_{1f} + q_{2f} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

En insérant l'équation (i) dans l'équation (ii) et en isolant q_{1f}, nous obtenons

$$q_{1i} + q_{2i} = 2q_{1f} \Rightarrow q_{1f} = \frac{q_{1i} + q_{2i}}{2}$$

$$q_{1f} = \frac{6{,}0 \text{ nC} - 9{,}0 \text{ nC}}{2} = -1{,}5 \text{ nC}$$

$$q_{2f} = q_{1f} = -1{,}5 \text{ nC} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La charge sur chaque sphère doit être négative, car, au départ, la charge nette du système est négative.

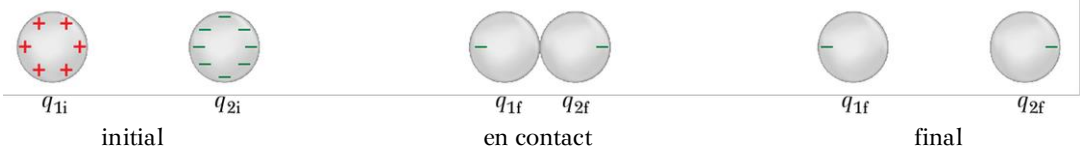


FIGURE 1.6
Le schéma de la situation pour l'exemple 1.2

L'induction électrique dans les conducteurs

Jusqu'à présent, nous avons observé la force électrique entre deux objets chargés. Peut-on observer une force entre un objet chargé et un objet neutre ? La figure 1.7a montre l'effet obtenu lorsqu'on approche un objet chargé positivement d'un conducteur neutre. Des électrons de ce dernier seront attirés par la

charge positive située à gauche et ils vont s'accumuler sur la surface gauche du conducteur. Comme le conducteur est neutre, il y aura des ions positifs excédentaires sur la surface opposée. Une séparation de la charge se produit donc dans le conducteur neutre. C'est de l'*induction électrique*.

Le conducteur subit deux forces de sens opposés : la force attractive sur les charges négatives et la force répulsive sur les charges positives. Étant donné que les charges négatives sont plus rapprochées de la tige chargée, la force attractive a un plus grand module que la force répulsive, ce qui fait que la force résultante sur le conducteur est attractive. Si on approche plutôt une tige chargée négativement du conducteur, comme le montre la figure 1.7b, on obtient aussi une force attractive. Cette fois-ci, les électrons de conduction du conducteur sont repoussés vers la surface la plus éloignée, en laissant des ions positifs sur la surface du conducteur du côté de la tige. Il y a encore deux forces et à nouveau, la force attractive a un module plus grand, car cette force s'exerce sur des charges plus rapprochées de la tige.

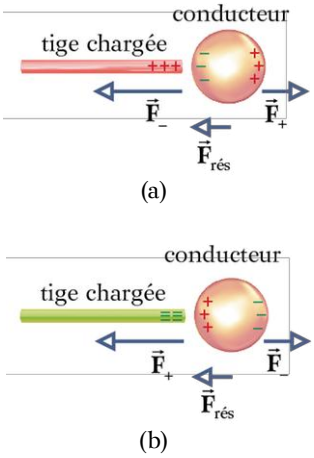


FIGURE 1.7
L'induction électrique produit une force résultante attractive sur le conducteur.

L'induction électrique permet de charger un conducteur en utilisant une mise à la terre. La figure 1.8 montre les étapes à suivre :

1° On approche un objet chargé d'un conducteur mis à la terre. Cela induit une charge sur le conducteur de signe opposé à la charge de l'objet.

2° On enlève la mise à la terre pendant que l'objet chargé est gardé près du conducteur.

3° On éloigne finalement l'objet chargé. Le conducteur a maintenant une charge nette opposée à la charge de l'objet utilisé.

L'ordre des étapes est important. Si on éloigne l'objet chargé avant de couper la mise à la terre, le conducteur va alors redevenir neutre, la terre fournissant la charge nécessaire pour annuler celle qui est déjà présente sur le conducteur.

FIGURE 1.8
Les trois étapes pour charger un conducteur par induction

L'électroscope

L'*électroscope* est un appareil simple permettant d'observer la charge électrique. Il est constitué de deux feuillets d'or ou d'aluminium dans un boîtier, reliés par une tige conductrice à une sphère conductrice extérieure (*voir la figure 1.9*). Lorsqu'on approche un objet chargé négativement de la sphère (*voir la figure 1.10a*), les électrons de l'électroscope sont poussés vers les feuillets et ceux-ci deviennent chargés négativement par induction électrique ; les feuillets se repoussent. Si on

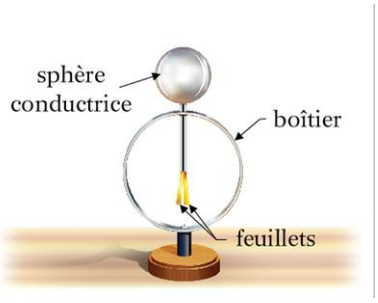


FIGURE 1.9
Un électroscope à feuille

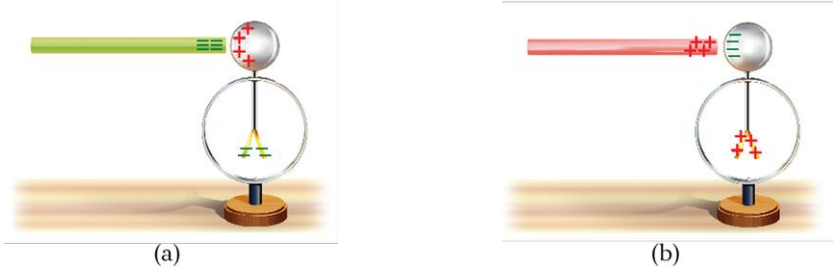
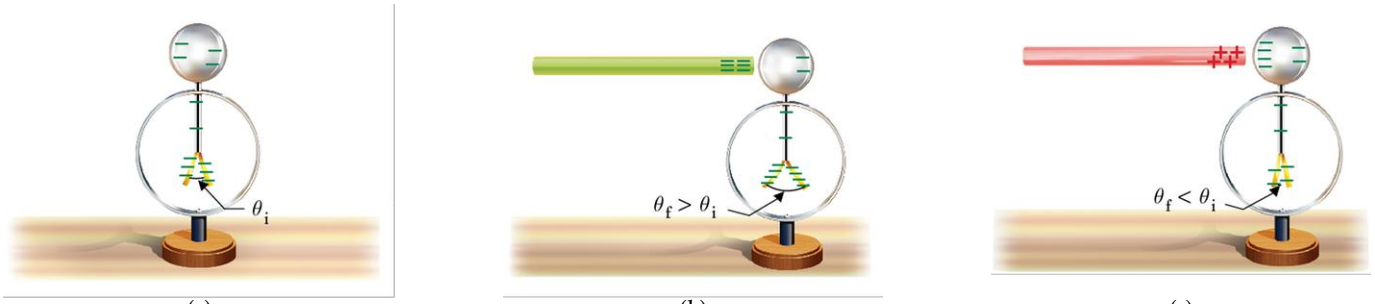


FIGURE 1.10
(a) On approche un objet négatif ; (b) on approche un objet positif ; dans les deux cas, les feuillets de l'électroscope se repoussent.

approche plutôt un objet chargé positivement (*voir la figure 1.10b*), les électrons se dirigent cette fois-ci vers la sphère. Les feuillets sont chargés positivement et ils vont aussi se repousser. L'électroscope n'indique pas le signe de la charge dans cette utilisation.

Pour connaître le signe de la charge portée par un objet, on doit d'abord charger l'électroscope avec une charge de signe connu, comme le montre la figure 1.11a où l'électroscope est chargé négativement. Les feuillets se repoussent et forment un angle initial θ_i. Si on approche un objet chargé négativement, comme à la figure 1.11b, les électrons de l'électroscope sont poussés vers les feuillets. La force de répulsion est plus grande et les feuillets forment un angle $\theta_f > \theta_i$. Si au contraire on approche un objet positif, comme à la figure 1.11c, alors des électrons sont attirés vers la sphère, en laissant moins d'électrons sur les feuillets. Les feuillets se repoussent moins et forment un angle $\theta_f < \theta_i$.



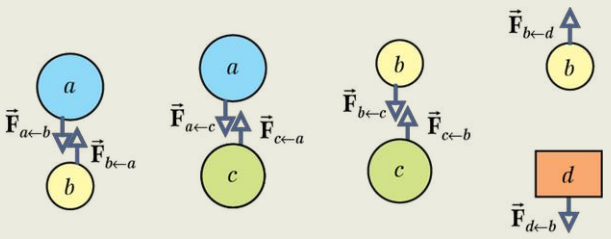
(a) (b) (c)

FIGURE 1.11
(a) L'électroscope initialement chargé permet de connaître la charge d'un objet, (b) qu'il soit chargé négativement ou (c) qu'il soit chargé positivement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.3

La figure ci-dessous illustre quatre objets et leurs interactions. L'objet *a* est un morceau de plastique chargé négativement, et l'objet *b* est un morceau de verre chargé positivement.

a. Quel est le signe de la charge des autres objets ?
b. L'interaction entre *a* et *d* est-elle attractive ou répulsive ?
c. L'interaction entre *c* et *d* est-elle attractive ou répulsive ?



La polarisation dans les isolants

Défi animé 1.1
Un objet chargé peut-il être attiré par un objet neutre ?

La force électrique s'exerce aussi entre un objet chargé et un isolant neutre. C'est le cas lorsqu'un morceau de plastique frotté avec de la laine attire de petits bouts de papier, ou lorsqu'un ballon de fête qui a été frotté sur des cheveux reste collé au mur. Dans ce cas, le ballon est chargé, mais le mur est neutre. Cette force s'exerce même si les électrons du mur restent liés aux atomes.

Regardons d'abord en détail les forces qui s'exercent sur un atome qui se trouve près d'une charge négative extérieure, comme le montre la figure 1.12.

Le noyau positif subit une force vers la gauche, et les électrons formant le nuage électronique subissent une force vers la droite. En conséquence, le nuage électronique va se déplacer très légèrement vers la droite. Le centre de ce nuage ne correspond plus au centre du noyau (la figure est exagérée pour faciliter la visualisation). Il y a une séparation de charge. L'atome est équivalent à deux charges opposées séparées par une petite distance, ce qu'on appelle un *dipôle électrique*. L'atome est *polarisé*. L'atome subit alors une légère force résultante vers la charge extérieure.

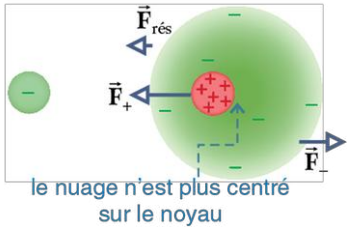


FIGURE 1.12
La charge négative extérieure polarise l'atome et exerce une force résultante attractive.

Revenons à l'exemple du ballon de fête qu'on approche d'un mur. Le ballon ayant été frotté sur des cheveux, il devient chargé négativement. Si on le place contre un mur, cela polarise les atomes près de la surface du mur, de telle sorte que la distance entre les noyaux positifs et le ballon est plus faible que la distance entre les nuages électroniques et le ballon (*voir la figure 1.13*). Il y a une petite force attractive entre le mur et le ballon.

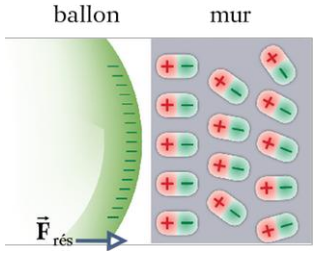


FIGURE 1.13
La polarisation des atomes du mur est responsable de l'attraction entre le mur et le ballon de fête.

I.4 La loi de Coulomb

Les expériences de la section 1.1 ont montré que les objets chargés exercent une force électrique les uns sur les autres. Cette force est attractive lorsque les charges sont de signes opposés, et elle est répulsive lorsque les charges sont de même signe. De plus, le module de cette force augmente si on augmente la valeur des charges ou si on diminue la distance entre les objets.

La relation entre la quantité de charge, la distance et la force a été découverte par le physicien et ingénieur français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) (*voir la figure 1.14*). Coulomb a découvert que, pour deux charges ponctuelles immobiles, le module de la force est proportionnel au produit des charges et inversement proportionnel au carré de la distance entre les charges.

FIGURE 1.14
Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), physicien et ingénieur français

Prenons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 immobiles séparées par une distance r, comme le montre la figure 1.15. La charge q_1 subit une force $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ exercée par la charge q_2, et la charge q_2 subit une force $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ exercée par la charge q_1. Les forces $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ et $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ forment une paire action-réaction : elles ont le même module et des orientations opposées. Selon la découverte de Coulomb, le module est

$$F_{1\leftarrow 2} = F_{2\leftarrow 1} = \left| \frac{kq_1q_2}{r^2} \right|,$$

où on insère une valeur absolue, car le module d'une force est toujours positif alors que les charges peuvent être positives ou négatives.

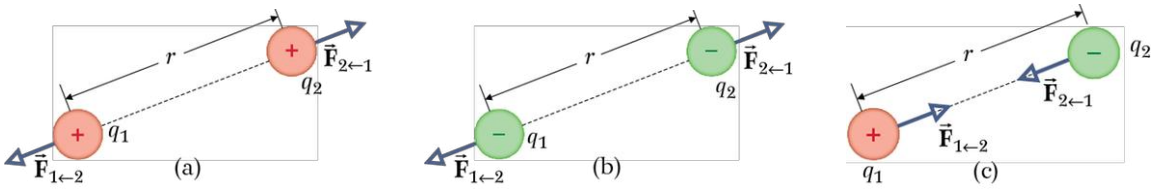


FIGURE 1.15
(a) Deux charges positives se repoussent ; (b) deux charges négatives se repoussent ; (c) deux charges opposées s'attirent.

Dans le système international, la charge est mesurée en coulombs (C). Le coulomb est défini à partir de l'unité du courant électrique, l'ampère, notion qui sera abordée au chapitre 6. La constante de proportionnalité k est appelée la *constante de Coulomb* et sa valeur est :

$$k = 8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 . \tag{1.3}$$

La théorie de l'électromagnétisme repose sur l'étude des champs électriques et des champs magnétiques et non sur les forces. Les équations fondamentales du champ électrique sont plus simples lorsqu'on utilise une constante ϵ_0, appelée la *constante électrique* ou la *permittivité du vide* :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) . \tag{1.4}$$

La valeur précise de cette constante est donnée à l'annexe B.

Il est donc possible de calculer le module de la force électrique à l'aide des équations équivalentes suivantes :

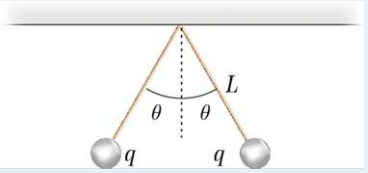
$$F_{1\leftarrow 2} = F_{2\leftarrow 1} = \left| \frac{kq_1q_2}{r^2} \right| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \right| . \tag{1.5}$$

REMARQUE

La loi de Coulomb est similaire à la loi de la gravitation universelle de Newton. La force gravitationnelle et la force électrique dépendent toutes les deux de l'inverse de la distance au carré.

EXEMPLE 1.3 Des conducteurs suspendus

Deux petites sphères conductrices sont suspendues à l'aide de ficelles non conductrices de longueur $L = 30{,}0$ cm. Chaque sphère a une masse de 100 g. Lorsque les sphères portent chacune une charge q, elles se repoussent de telle sorte que l'angle entre chaque ficelle et la verticale est $\theta = 1{,}20°$, comme le montre la figure ci-contre. Calculez la charge q.



SOLUTION

Illustrer la situation

Nous traçons le diagramme des forces sur la sphère de droite à la figure 1.16. Les sphères ont des charges identiques : elles se repoussent.

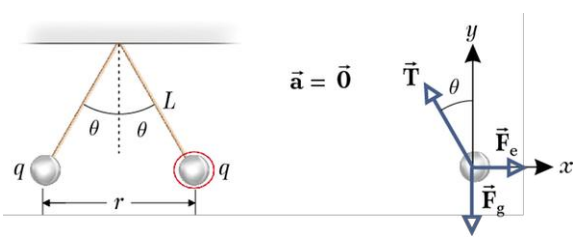


FIGURE 1.16
Le diagramme des forces pour la sphère de droite

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L = 0{,}300$ m $\quad m = 0{,}100$ kg	q
$\theta = 1{,}20°$	

Le système est en équilibre. Nous obtenons la distance entre les charges à l'aide du schéma :

$$\sin\theta = \frac{r/2}{L} = \frac{r}{2L}$$

$$\Rightarrow r = 2L \sin\theta = 2 \times 0{,}300 \text{ m} \sin(1{,}20°) = 0{,}0126 \text{ m} . \tag{i}$$

Identifier la clé

La première **clé** est la première loi de Newton, car la sphère est en équilibre :

$$\sum F_x = -T \sin\theta + F_e = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0\,. \qquad \text{(iii)}$$

La deuxième **clé** est la loi de Coulomb. Le module de la force électrique est donné par l'équation 1.5 :

$$F_e = \left|\frac{kq_1q_2}{r^2}\right| = \frac{kq^2}{r^2}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons d'abord T dans l'équation (iii) :

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}\,.$$

Nous insérons ce résultat ainsi que l'équation (iv) dans l'équation (ii) :

$$-mg\tan\theta + \frac{kq^2}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{r^2 mg\tan\theta}{k}}$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{(0{,}0126)^2 \times 0{,}100 \times 9{,}81\tan(1{,}20°)}{8{,}99\times10^9}}$$

$$= \pm 1{,}90\times10^{-8}\,\text{C} = \pm 19{,}0\ \text{nC}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les deux réponses sont valides. Les sphères peuvent avoir chacune une charge positive ou chacune une charge négative, car, dans les deux cas, les deux sphères vont se repousser.

La forme vectorielle de la loi de Coulomb

Pour obtenir l'orientation de la force, on se base sur le fait que la force est attractive dans le cas de charges de signes opposés et qu'elle est répulsive dans le cas de charges de même signe. Ceci peut être écrit de façon algébrique en tenant compte des signes des charges : la multiplication de deux charges de même signe implique que $q_1q_2 > 0$, alors que la multiplication de charges de signes opposés implique que $q_1q_2 < 0$. On ajoute ensuite un vecteur unitaire comme on l'a fait au chapitre 13 du tome 1 dans le cas de la force gravitationnelle. Pour calculer la force $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2}$, exercée sur la charge q_1 par la charge q_2, on a recours au vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1}$, orienté de q_2 (l'agent) vers q_1 (l'objet), comme l'illustre la figure 1.17. Avec ce vecteur unitaire, la force exercée sur la charge q_1 par q_2 est

$$\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1}\,. \qquad (1.6)$$

Loi de Coulomb

La figure 1.17 à la page suivante montre les trois possibilités en fonction des signes de q_1 et de q_2.

- Lorsque les deux charges sont positives, $q_1q_2 > 0$. La force est répulsive, c'est-à-dire que $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2}$ a le même sens que le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1}$ (*voir la figure 1.17a, à la page suivante*).
- Lorsque les deux charges sont négatives, $q_1q_2 > 0$. La force est répulsive, c'est-à-dire que $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2}$ a le même sens que $\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1}$ (*voir la figure 1.17b, à la page suivante*).
- Lorsque les charges sont de signes opposés, $q_1q_2 < 0$. La force est attractive, c'est-à-dire que $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2}$ est de sens opposé à $\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow1}$ (*voir la figure 1.17c, à la page suivante*).

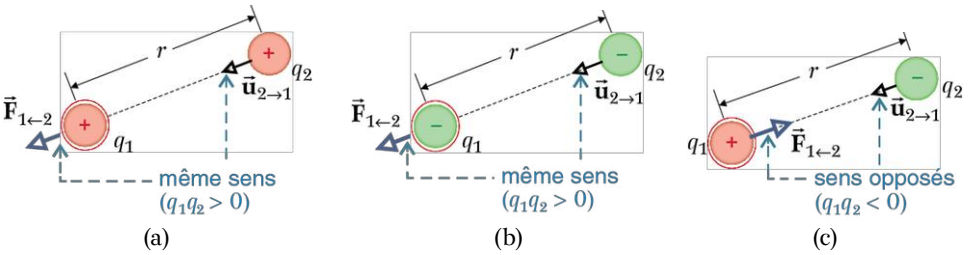


FIGURE 1.17
La relation entre le vecteur unitaire $\vec{u}_{2\to1}$ et la force $\vec{F}_{1\leftarrow2}$ dans les différentes situations

MISE EN GARDE

Dans l'équation 1.6, il n'y a pas de valeur absolue. Cette équation donne la force électrique exercée sur une charge, y compris l'orientation. Le signe des charges est important pour donner le sens de la force en fonction du vecteur unitaire.

Le vecteur unitaire

Pour calculer le vecteur $\vec{u}_{2\to1}$, nous considérons d'abord le vecteur déplacement $\vec{r}_{2\to1}$, orienté de la charge 2 (l'agent) vers la charge 1 (l'objet, qui est encerclé en rouge). Ce vecteur s'exprime en fonction de vecteurs position $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Comme l'indique la figure 1.18a, les vecteurs $\vec{r}_{2\to1}$, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ forment un triangle, ce qui implique qu'ils sont reliés par une somme vectorielle :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}_{2\to1} .$$

En isolant $\vec{r}_{2\to1}$, on obtient

$$\vec{r}_{2\to1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 . \tag{1.7}$$

Il est aussi possible d'exprimer le vecteur $\vec{r}_{2\to1}$ en fonction de ses composantes cartésiennes, comme l'illustre la figure 1.18b :

$$\vec{r}_{2\to1} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \tag{1.8}$$

$$= (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k} . \tag{1.9}$$

On calcule finalement le vecteur unitaire en divisant le vecteur $\vec{r}_{2\to1}$ par son module :

$$\vec{u}_{2\to1} = \frac{\vec{r}_{2\to1}}{r} = \frac{\Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} . \tag{1.10}$$

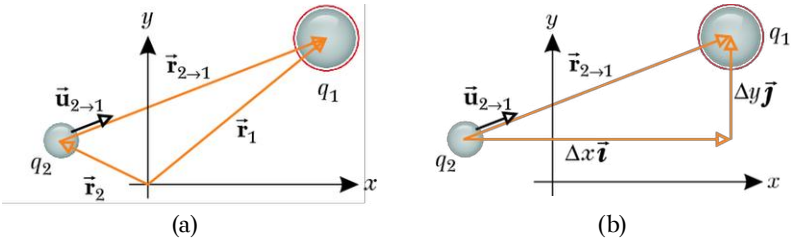


FIGURE 1.18
(a) Le vecteur $\vec{r}_{2\to1}$ en fonction de $\vec{r}_1$ et de $\vec{r}_2$. (b) Le vecteur $\vec{r}_{2\to1}$ décomposé selon ses composantes cartésiennes.

MISE EN GARDE

Le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$ est un vecteur déplacement. En général, le vecteur déplacement $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}$ se calcule de façon vectorielle en soustrayant la position initiale de la position finale c'est-à-dire $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}}$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION I.4

Une charge q_1 est située à la position $\vec{\mathbf{r}}_1 = 2{,}0\vec{\imath}$ cm, et une charge q_2 est située à la position $\vec{\mathbf{r}}_2 = (7{,}0\vec{\imath} + 4{,}0\vec{\jmath})$ cm.

a. Calculez $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$ et $\vec{\mathbf{u}}_{2\to1}$.

b. Calculez $\vec{\mathbf{r}}_{1\to2}$ et $\vec{\mathbf{u}}_{1\to2}$.

Le principe de superposition

Lorsque plusieurs charges exercent une force sur une charge q_1, la force électrique résultante est obtenue à l'aide du *principe de superposition* : comme le montre la figure 1.19, on calcule la somme vectorielle des forces exercées sur q_1 :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2} + \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow3} + \cdots \qquad (1.11)$$

Principe de superposition

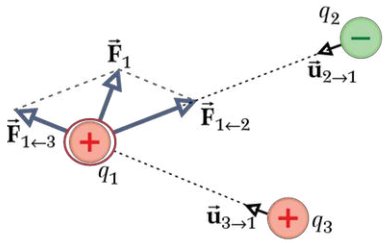


FIGURE I.19

La force résultante exercée sur q_1 est la somme vectorielle des forces appliquées sur cette charge.

EXEMPLE I.4 Une charge à l'équilibre

Une charge $q_1 = -3{,}0$ nC est placée à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes. Une deuxième charge $q_2 = 1{,}5$ nC est placée sur l'axe des x, à 25,0 cm à droite de q_1. À quelle position faut-il placer une troisième charge pour qu'elle soit à l'équilibre ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 1.20 illustre le schéma de la situation pour trois endroits possibles où placer q_3 : à gauche de q_1 (*voir la figure 1.20a*), entre les deux charges (*voir la figure 1.20b*) ou à droite de q_2 (*voir la figure 1.20c*).

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$q_1 = -3{,}0$ nC	$q_2 = 1{,}5$ nC	x
$L = 0{,}250$ m		

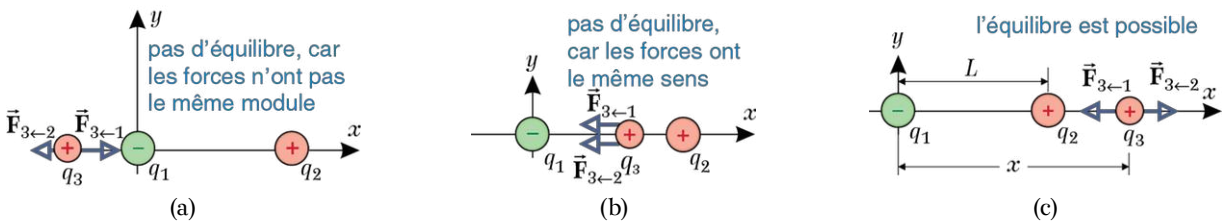


FIGURE I.20

Les positions sur l'axe des x pour q_3

Nous ne pouvons obtenir de situation d'équilibre ailleurs que sur l'axe des x, car, pour les autres points, les forces $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 1}$ et $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 2}$ ne sont pas parallèles. La force résultante ne peut donc être nulle si q_3 est placée ailleurs que sur l'axe des x.

Identifier la clé

La **clé** est que q_3 est en équilibre si elle subit une force résultante nulle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 1} + \vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 2} = \vec{\mathbf{0}}\,. \qquad \text{(i)}$$

Il faut donc que les deux forces aient le même module et des sens opposés. Ceci est impossible dans la situation de la figure 1.20a car, dans ce cas, le module de $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 1}$ est toujours plus grand que le module de $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow 2}$. En effet, les modules des forces sont dans cette région :

$$F_{3\leftarrow 1} = \left|\frac{kq_1q_3}{r_{13}^2}\right|$$

$$F_{3\leftarrow 2} = \left|\frac{kq_2q_3}{r_{23}^2}\right|,$$

avec $|q_1| > |q_2|$ et $r_{13} < r_{23}$. Donc, pour $F_{3\leftarrow 1}$, le numérateur est plus grand et le dénominateur est plus petit, ce qui donne nécessairement un nombre plus grand que pour $F_{3\leftarrow 2}$. Il est également impossible d'obtenir l'équilibre dans la situation illustrée à la figure 1.20b, car les forces ont le même sens. Il reste à analyser la situation de la figure 1.20c.

La charge q_3 est placée à une position x, donc à une distance $x - L$ de q_2. Nous calculons le module de chaque force à l'aide de l'équation 1.5. Nous obtenons

$$\left|\frac{kq_1q_3}{x^2}\right| = \left|\frac{kq_2q_3}{(x-L)^2}\right|. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs, en simplifiant les termes qui apparaissent dans les deux membres de l'équation :

$$\frac{3{,}0}{x^2} = \frac{1{,}5}{(x-L)^2}$$

$$\Rightarrow 2{,}0 = \left(\frac{x}{x-L}\right)^2.$$

Nous calculons la racine carrée de chaque membre :

$$\frac{x}{x-0{,}250} = \sqrt{2{,}0}$$

$$x = \sqrt{2{,}0}x - 0{,}250\sqrt{2{,}0}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{2{,}0} - 1) = 0{,}250\sqrt{2{,}0}$$

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}250\sqrt{2{,}0}}{\sqrt{2{,}0} - 1} = 0{,}85 \text{ m}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous obtenons bien $x > L$, c'est-à-dire une position à droite de q_2. Remarquez que nous avons gardé seulement la racine positive car, selon le schéma, nous devons avoir $x > L$, avec x et L des longueurs positives.

REMARQUE

La position d'équilibre se trouve toujours plus près de la charge dont la valeur absolue est plus petite. De plus, cette position ne dépend pas de la valeur de q_3.

La méthode vectorielle

Lorsque des charges sont situées dans un plan, il est important de bien calculer l'orientation des forces et d'appliquer l'algèbre vectorielle pour trouver la force résultante exercée sur une particule. La stratégie suivante donne les étapes importantes pour résoudre les problèmes à l'aide d'une méthode vectorielle dans laquelle on emploie le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{2\rightarrow 1}$ et l'algèbre vectorielle.

La méthode vectorielle peut être utilisée dans les problèmes réels avec des charges situées dans l'espace en trois dimensions. Nous verrons aussi au chapitre 2 que cette méthode simplifie les calculs mathématiques dans le cas d'objets chargés qui ne sont pas ponctuels.

STRATÉGIE I.1 La force électrique : méthode vectorielle

Illustrer la situation

Tracez un schéma de la situation en incluant l'objet et les agents. Encerclez l'objet pour bien l'identifier. Tracez les vecteurs unitaires, orientés des agents vers l'objet. Tracez les forces électriques : la force est répulsive dans le cas de charges de même signe, et elle est attractive dans le cas de charges de signes opposés. Tracez un système de coordonnées cartésiennes.

Décortiquer le problème

Identifiez bien les quantités connues et inconnues. Calculez les vecteurs position $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$, $\vec{\mathbf{r}}_{3\to1}$, ..., orientés des agents vers l'objet, et les vecteurs unitaires correspondants :

$$\vec{\mathbf{r}}_{2\to1} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{2\to1} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}}{r_{21}},$$

où r_{21} est la distance entre la charge q_1 et la charge q_2.

Identifier les clés

La première **clé** est la loi de Coulomb :

$$\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2}\vec{\mathbf{u}}_{2\to1}\,.$$

Cette **clé** permet de calculer la force électrique exercée sur l'objet par chacun des agents.

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2} + \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow3} + \cdots$$

Résoudre le problème

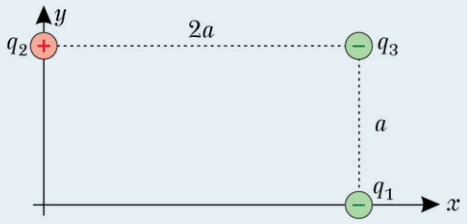
Remplacez les données connues dans les équations pour obtenir la quantité recherchée.

Valider la réponse

Vérifiez que les forces calculées sont conformes au schéma de la situation et que la réponse finale a du sens.

EXEMPLE I.5 La force sur une charge : méthode vectorielle

Trois charges sont situées dans un plan, comme le montre la figure ci-contre. Les charges sont $q_1 = -1{,}80$ µC, $q_2 = 3{,}50$ µC et $q_3 = -1{,}40$ µC. De plus, $a = 5{,}20$ cm. Calculez la force résultante exercée sur la charge q_1. Exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.



SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est illustré à la figure 1.21 de la page suivante. Remarquez que les deux vecteurs unitaires sont orientés de q_2 vers q_1 et de q_3 vers q_1 respectivement, car l'objet est la charge q_1.

Pour les forces, $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow2}$ est orientée vers la charge q_2, car q_1 et q_2 ont des signes opposés, alors que la force $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow3}$ est vers le bas parce que les charges q_1 et q_3 ont le même signe.

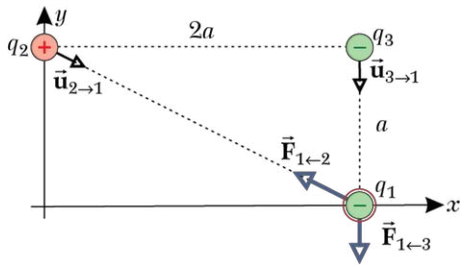


FIGURE 1.21
Le diagramme de la situation de l'exemple 1.5

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$q_1 = -1{,}80\ \mu C$	$q_2 = 3{,}50\ \mu C$	$\vec{F}_1$
$q_3 = -1{,}40\ \mu C$	$a = 0{,}0520\ m$	

Le vecteur $\vec{r}_{2\to1}$, qui va de q_2 vers q_1, est un vecteur ayant une composante vers la droite et une composante vers le bas :

$$\vec{r}_{2\to1} = 2a\vec{i} - a\vec{j}.$$

La distance entre q_2 et q_1 correspond au module de ce vecteur :

$$r_{21} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}\,a. \qquad \text{(i)}$$

De même, le vecteur position $\vec{r}_{3\to1}$ est orienté vers le bas :

$$\vec{r}_{3\to1} = -a\vec{j}.$$

La distance entre q_3 et q_1 est $r_{31} = a$. Nous calculons ensuite les vecteurs unitaires :

$$\vec{u}_{2\to1} = \frac{\vec{r}_{2\to1}}{r_{21}} = \frac{2a\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{5}\,a} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \qquad \text{(ii)}$$

$$\vec{u}_{3\to1} = \frac{\vec{r}_{3\to1}}{r_{31}} = \frac{-a\vec{j}}{a} = -\vec{j}. \qquad \text{(iii)}$$

Identifier la clé

La première **clé** est la loi de Coulomb, pour calculer $\vec{F}_{1\leftarrow2}$ et $\vec{F}_{1\leftarrow3}$:

$$\vec{F}_{1\leftarrow2} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{2\to1} = \frac{kq_1q_2}{5a^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) \qquad \text{(iv)}$$

$$\vec{F}_{1\leftarrow3} = \frac{kq_1q_3}{r_{31}^2}\vec{u}_{3\to1} = \frac{kq_1q_3}{a^2}(-\vec{j}). \qquad \text{(v)}$$

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\leftarrow2} + \vec{F}_{1\leftarrow3}. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons les forces, en insérant les valeurs connues :

$$\vec{F}_{1\leftarrow2} = (8{,}99\times10^9)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) \times\frac{(-1{,}80\times10^{-6})(3{,}50\times10^{-6})}{5\,(0{,}052)^2}$$
$$= (-3{,}747\vec{i} + 1{,}873\vec{j})\ \text{N}$$
$$\vec{F}_{1\leftarrow3} = (8{,}99\times10^9)(-\vec{j}) \times\frac{(-1{,}80\times10^{-6})(-1{,}40\times10^{-6})}{(0{,}052)^2}$$
$$= -8{,}378\,\vec{j}\ \text{N}.$$

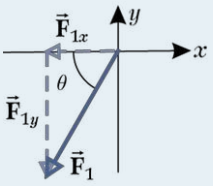
Nous insérons ensuite ces résultats dans l'équation (vi) :

$$\vec{F}_1 = (-3{,}747\vec{i} + 1{,}873\vec{j}) - 8{,}378\vec{j}$$
$$= (-3{,}747\vec{i} - 6{,}505\vec{j})\,\text{N}. \qquad \text{(vi)}$$

C'est la force que nous cherchons, mais notre travail n'est pas terminé. Nous devons exprimer le vecteur en fonction du module et de l'orientation, comme il est demandé dans l'énoncé de l'exemple. Nous calculons d'abord le module :

$$F_1 = \sqrt{(F_{1x})^2 + (F_{1y})^2}$$
$$= \sqrt{(-3{,}747)^2 + (-6{,}505)^2} = 7{,}51\,\text{N}. \qquad \text{(vii)}$$

Pour l'orientation, nous déplaçons le vecteur jusqu'à l'origine du système de coordonnées cartésiennes, comme l'illustre la figure ci-dessous.



Le vecteur a une composante x négative et une composante y négative. L'angle θ est

$$\theta = \arctan\left(\frac{|F_{1y}|}{|F_{1x}|}\right) = \arctan\left(\frac{6{,}505}{3{,}747}\right) = 60{,}1°.$$

Donc, la force exercée sur la charge 1 est

$$\vec{F}_1 = 7{,}51\ \text{N}$$
$$\text{à } 60{,}1° \text{ au-dessous de la partie négative de l'axe des } x.$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous avons donné la force selon la forme désirée. L'orientation est conforme au schéma de la situation.

EXEMPLE I.6 Deux charges dans l'espace

Une charge q_1 de 2,0 µC se trouve à la position (2,0 ; –3,0 ; 5,0) cm. Une deuxième charge q_2 de 3,0 µC se trouve à la position (–4,0 ; –2,0 ; 3,0) cm.

a. Calculez la force exercée sur la charge 2 par la charge 1.

b. Quel est le module de la force exercée sur la charge 2 par la charge 1 ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Il est plus difficile de visualiser la position des charges en trois dimensions. Nous illustrons la situation à la figure 1.22, en traçant des lignes parallèles aux axes pour nous aider.

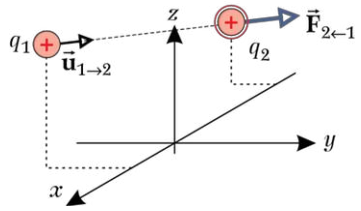


FIGURE 1.22
Le schéma de la situation pour l'exemple 1.6

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$q_1 = 2{,}0\times10^{-6}$ C	$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow1}$
$q_2 = 3{,}0\times10^{-6}$ C	$F_{2\leftarrow1}$
$\vec{\mathbf{r}}_1 = (0{,}020\vec{\imath} - 0{,}030\vec{\jmath} + 0{,}050\vec{k})$ m	
$\vec{\mathbf{r}}_2 = (-0{,}040\vec{\imath} - 0{,}020\vec{\jmath} + 0{,}030\vec{k})$ m	

Pour résoudre un problème en trois dimensions, nous devons utiliser la méthode vectorielle. Nous calculons d'abord le vecteur déplacement, de q_1 vers q_2 :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_{1\to2} &= \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\\ &= (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}\\ &= (-0{,}040 - 0{,}020)\vec{\imath} + (-0{,}020 + 0{,}030)\vec{\jmath}\\ &\quad + (0{,}030 - 0{,}050)\vec{k}\\ &= (-0{,}060\vec{\imath} + 0{,}010\vec{\jmath} - 0{,}020\vec{k})\ \text{m}. \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

Le module de ce vecteur donne la distance entre les deux charges :

$$r_{12} = \sqrt{(0{,}060)^2 + (0{,}010)^2 + (0{,}020)^2} = 0{,}064\,0\ \text{m}. \qquad \text{(ii)}$$

Le vecteur unitaire se calcule en divisant le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{1\to2}$ par son module :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}_{1\to2} &= \frac{\vec{\mathbf{r}}_{1\to2}}{r_{12}} = \frac{-0{,}060}{0{,}064}\vec{\imath} + \frac{0{,}010}{0{,}064}\vec{\jmath} + \frac{-0{,}020}{0{,}064}\vec{k}\\ &= -0{,}937\vec{\imath} + 0{,}156\vec{\jmath} - 0{,}312\vec{k}. \qquad \text{(iii)}\end{aligned}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La clé est la loi de Coulomb :

$$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow1} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\vec{\mathbf{u}}_{1\to2}. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (iv) :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow1} &= (8{,}99\times10^9)(-0{,}937\vec{\imath} + 0{,}156\vec{\jmath} - 0{,}312\vec{k})\\ &\quad\times\frac{(2{,}0\times10^{-6})(3{,}0\times10^{-6})}{(0{,}064\,0)^2}\\ &= (-12\vec{\imath} + 2{,}1\vec{\jmath} - 4{,}1\vec{k})\ \text{N}. \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

SOLUTION b.

Résoudre le problème

Nous calculons le module :

$$F_{2\leftarrow1} = \sqrt{(F_{2\leftarrow1,x})^2 + (F_{2\leftarrow1,y})^2 + (F_{2\leftarrow1,z})^2}$$

$$F_{2\leftarrow1} = \sqrt{(-12)^2 + (2{,}1)^2 + (4{,}1)^2} = 13\ \text{N}.$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Nous avons arrondi les réponses à deux chiffres significatifs pour respecter la précision donnée dans l'énoncé.

La méthode scalaire

Il est possible de calculer la force électrique sur une charge ponctuelle en calculant d'abord le module des forces, puis les différentes composantes. Cette méthode scalaire peut simplifier les calculs dans certaines situations simples,

mais elle complique le calcul dans le cas des objets non ponctuels et les problèmes en trois dimensions. Voici la stratégie relative à cette méthode. Nous résoudrons à nouveau l'exemple 1.5 en utilisant cette fois-ci la méthode scalaire.

STRATÉGIE 1.2 La force électrique : méthode scalaire

Illustrer la situation

Tracez le diagramme des forces pour l'objet sur lequel sont exercées les forces électriques. Entourez l'objet pour bien l'identifier, tracez les forces électriques exercées par les agents en respectant l'orientation des forces : la force entre deux charges de même signe est répulsive, et la force exercée entre deux charges de signes opposés est attractive.

Décortiquer le problème

Écrivez les données connues et les inconnues.

Identifier la clé

La première **clé** est la version scalaire de la loi de Coulomb (l'équation 1.5) :

$$F_{1\leftarrow 2} = \left| \frac{kq_1q_2}{r^2} \right|.$$

Calculez le module de chaque force électrique exercée sur l'objet par un agent.

À l'aide du schéma, déterminez les composantes cartésiennes de chaque force. Calculez ensuite la force résultante :

$$F_{\text{rés},x} = \sum F_x = F_{1\leftarrow 2,x} + F_{1\leftarrow 3,x} + \cdots$$

$$F_{\text{rés},y} = \sum F_y = F_{1\leftarrow 2,y} + F_{1\leftarrow 3,y} + \cdots$$

Résoudre le problème

Remplacez les valeurs pour obtenir la force $\vec{\mathbf{F}}_1$:

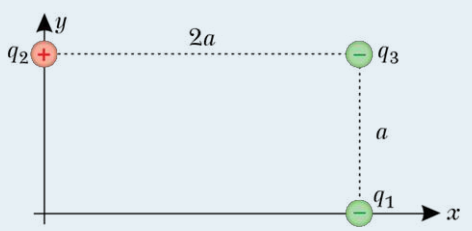
$$\vec{\mathbf{F}}_1 = F_{1x}\vec{\imath} + F_{1y}\vec{\jmath}.$$

Valider la réponse

Vérifiez que la réponse a du sens, en vous référant au besoin au diagramme des forces.

EXEMPLE 1.7 La force sur une charge : méthode scalaire

Trois charges sont situées dans un plan, comme le montre la figure ci-contre. Les charges sont $q_1 = -1{,}80$ µC, $q_2 = 3{,}50$ µC et $q_3 = -1{,}40$ µC. De plus, $a = 5{,}20$ cm. Calculez le module et l'orientation de la force résultante exercée sur la charge 1.



SOLUTION

Illustrer la situation

Le diagramme des forces est présenté à la figure 1.23.

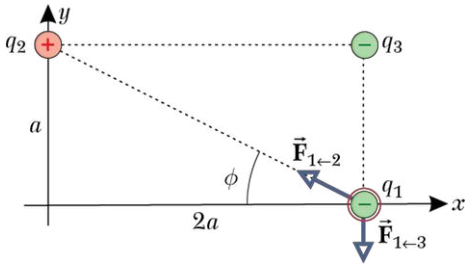


FIGURE 1.23
Le diagramme des forces pour l'exemple 1.7

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$q_1 = -1{,}80\times10^{-6}\ \text{C}$	$\vec{\mathbf{F}}_1$
$q_2 = 3{,}50\times10^{-6}\ \text{C}$	
$q_3 = -1{,}40\times10^{-6}\ \text{C}$	
$a = 0{,}0520\ \text{m}$	

L'angle ϕ est obtenu par l'expression :

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{2a}\right) = 26{,}57^\circ . \qquad \text{(i)}$$

La distance entre q_1 et q_2 se calcule à l'aide du théorème de Pythagore :

$$r_{12} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}\,a . \qquad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

La première **clé** est la loi de Coulomb, sous la forme scalaire, pour calculer $F_{1\leftarrow 2}$ et $F_{1\leftarrow 3}$:

$$F_{1\leftarrow 2} = \left|\frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\right| = \left|\frac{8{,}99\times10^9(-1{,}80\times10^{-6})(3{,}5\times10^{-6})}{5(0{,}052)^2}\right| = 4{,}189\ \text{N} \qquad \text{(iii)}$$

$$F_{1\leftarrow 3} = \left|\frac{kq_1q_3}{r_{13}^2}\right| = \left|\frac{8{,}99\times10^9(-1{,}80\times10^{-6})(-1{,}40\times10^{-6})}{(0{,}052)^2}\right| = 8{,}378\ \text{N} . \qquad \text{(iv)}$$

Ensuite, nous décomposons les forces selon leurs composantes cartésiennes, en utilisant le schéma.

composante x

$$F_{1\leftarrow 2,x} = -F_{1\leftarrow 2}\cos\phi = -3{,}747\ \text{N}$$
$$F_{1\leftarrow 3,x} = 0{,}000\ \text{N}$$

composante y

$$F_{1\leftarrow 2,y} = F_{1\leftarrow 2}\sin\phi = 1{,}873\ \text{N}$$
$$F_{1\leftarrow 3,y} = -F_{1\leftarrow 3} = -8{,}378\ \text{N}$$

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$F_{1x} = F_{1\leftarrow 2,x} + F_{1\leftarrow 3,x} \qquad \text{(v)}$$
$$F_{1y} = F_{1\leftarrow 2,y} + F_{1\leftarrow 3,y} . \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

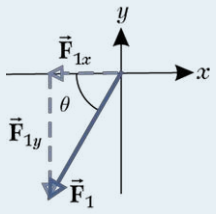
Nous insérons les composantes cartésiennes dans les équations (v) et (vi) :

$$F_{1x} = -3{,}747 + 0{,}000 = -3{,}747\ \text{N}$$
$$F_{1y} = 1{,}873 - 8{,}378 = -6{,}505\ \text{N} .$$

Nous calculons le module :

$$F_1 = \sqrt{(-3{,}747)^2 + (-6{,}505)^2} = 7{,}51\ \text{N} . \quad \text{(réponse)}$$

Pour calculer l'orientation, nous traçons d'abord le vecteur $\vec{\mathbf{F}}_1$, avec des composantes x et y négatives, de la manière suivante :



L'angle θ entre le vecteur et la partie négative de l'axe des x est

$$\theta = \arctan\left(\frac{6{,}505}{3{,}747}\right) = 60{,}1^\circ .$$

Donc, l'orientation est

$\theta = 60{,}1^\circ$ sous la partie négative de l'axe des x. (réponse)

Valider la réponse

Nous avons bien donné un module (positif) et une orientation. La réponse a du sens selon le diagramme des forces.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons présenté la charge électrique et la force électrique entre des charges immobiles.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

Il y a **deux types de charges**: la charge positive et la charge négative.

- La **charge est quantifiée**: tout objet a une charge $q = Ne$ avec N, un nombre entier, et e, la charge élémentaire:

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}\ .$$

- La **charge de la matière ordinaire** vient des protons (charge $+e$) et des électrons (charge $-e$).
- Un **objet est chargé** si on lui donne ou lui enlève des électrons. La charge d'un objet est

$$q = (N_\text{p} - N_\text{e})e\,.$$

- Un **objet est électriquement neutre** s'il possède autant d'électrons que de protons. Sa charge nette est nulle.
- La **charge est conservée**: dans un système fermé, la charge nette du système ne change pas.

Les objets chargés exercent les uns sur les autres une force électrique.

- La **force est attractive** si les objets ont des charges de signes opposés.
- La **force est répulsive** si les objets ont des charges de même signe.
- Le **module de la force augmente** si la charge des objets augmente ou si la distance entre les objets diminue.

On divise les matériaux en deux types: **les isolants et les conducteurs**.

- La charge se déplace facilement à l'intérieur des conducteurs.
- La charge se déplace très difficilement dans un isolant.

Les objets chargés attirent les objets neutres.

- Pour un conducteur neutre, l'objet chargé crée une séparation de la charge par **induction électrique**.
- Pour un isolant neutre, l'objet chargé **polarise** l'isolant en créant des dipôles électriques dans l'isolant.

- Pour des charges immobiles, la force exercée sur une charge ponctuelle q_1 par une charge q_2 est donnée par la **loi de Coulomb**:

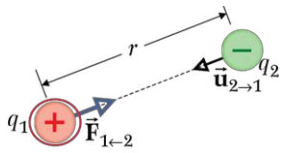
$$\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\,\vec{\mathbf{u}}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\,\vec{\mathbf{u}}_{2\to 1}\,,$$

où k est la constante de Coulomb et ϵ_0, la constante électrique:

$$k = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$
$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)\,.$$

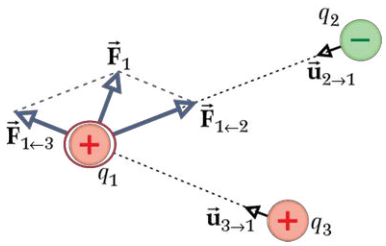
Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{2\to 1}$ est orienté de q_2 vers q_1:

$$\vec{\mathbf{u}}_{2\to 1} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_{2\to 1}}{|\vec{\mathbf{r}}_{2\to 1}|} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2}{r}\,.$$



- Lorsque plusieurs charges exercent une force sur une charge q_1, la **force électrique résultante** est donnée par le **principe de superposition**:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2} + \vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 3} + \cdots$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 1.2 Les propriétés de la charge électrique

Q1 Classez les systèmes suivants par ordre croissant de la charge nette (de la plus négative à la plus positive).

(i) Un noyau d'hélium ^4_2He (deux protons et deux neutrons) ;

(ii) Un électron ;

(iii) Un ion Na^+ ;

(iv) Une solution contenant une mole d'ion K^+ et une mole d'ion Cl^- ;

(v) Une tige de verre chargée, sur laquelle il manque quatre électrons.

E2 Une tige de plastique et un morceau de laine sont initialement neutres. On les frotte ensemble. La tige de plastique porte alors une charge de –1,5 nC.

a. Quelle est la charge portée par la laine ?

b. Combien d'électrons ont été transférés d'un objet à l'autre ?

E3 La *constante de Faraday F* représente la quantité de charge contenue dans une mole de charges élémentaires. Calculez la valeur de *F*, exprimée en C/mol.

P4 Une molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène (possédant huit protons) et de deux atomes d'hydrogène (possédant chacun un proton). Calculez la charge positive contenue dans 1,00 kg d'eau neutre. (Indice : Utilisez les données de l'annexe F).

P5 Trouvez l'élément X dans les réactions nucléaires qui suivent.

a. $^4_2\text{He} + {}^{60}_{28}\text{Ni} \rightarrow \text{n} + {}^{63}\text{X}$

b. $^{15}_7\text{N} + \text{p} \rightarrow {}^{12}\text{X} + {}^4_2\text{He}$

c. $^8_4\text{Be} \rightarrow {}^4\text{X} + {}^4\text{X}$

Section 1.3 Les isolants et les conducteurs

Q6 Un conducteur est mis à la terre. On approche de celui-ci un morceau de verre chargé positivement, sans que les deux se touchent.

a. On débranche la mise à la terre avant d'éloigner le morceau de verre. Quel est le signe de la charge du conducteur ?

b. On éloigne le morceau de verre, puis on débranche la mise à la terre. Quel est le signe de la charge du conducteur ?

Q7 Une sphère conductrice fixée à un support est chargée positivement. On suspend une deuxième sphère conductrice neutre près de la première (*voir la figure 1.24*).

a. Quel est le sens de la force électrique initiale sur la sphère de droite ?

b. Quel est le sens de la force électrique sur la sphère de droite si elle touche à celle de gauche ?

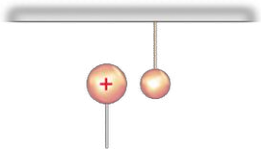


FIGURE 1.24 • Question 7

Q8 La figure 1.25 montre quatre groupes de deux sphères conductrices identiques avec leur charge initiale. On les met en contact, puis on les éloigne.

a. Classez les situations par ordre croissant de la charge sur la sphère de gauche après le contact (de la plus négative à la plus positive).

b. Classez les situations par ordre croissant de la charge transférée à la sphère de gauche (de la plus négative à la plus positive) durant le contact.

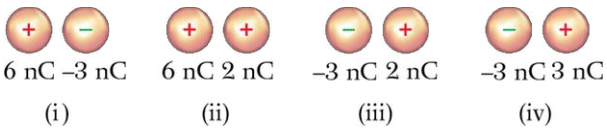


FIGURE 1.25 • Question 8

E9 On met en contact deux sphères conductrices identiques, puis on les sépare. La charge finale sur chaque sphère est de 4,5 µC. Si la première sphère était initialement neutre, quelle est la charge initiale de la deuxième ?

Section 1.4 La loi de Coulomb

Q10 On place des charges positives identiques q vis-à-vis des 12 chiffres d'une horloge circulaire de rayon R. On place une autre charge positive Q au centre de l'horloge.

a. Quelle est la force résultante sur la charge Q ?

b. On enlève la charge q vis-à-vis du chiffre 4. Quelle est la force résultante sur la charge Q ?

Q11 La figure 1.26 illustre quatre configurations constituées de charges positives $+q$ et négatives $-q$ situées sur l'axe des x. La distance entre les charges est constante. Classez les configurations par ordre croissant (du plus négatif au plus positif) de la composante de la force résultante sur la charge encerclée.

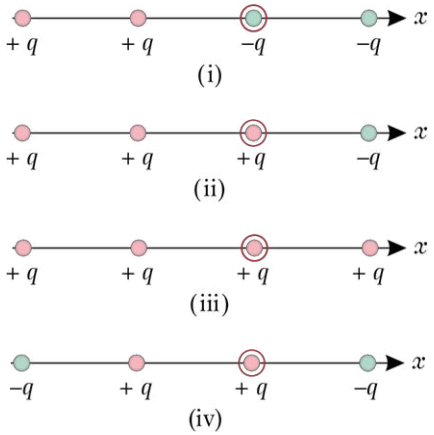


FIGURE 1.26 • Question 11

Q12 La figure 1.27 illustre deux charges ($q_1 = +2q$ et $q_2 = +q$) qui ne sont pas fixées. On veut placer une troisième charge à l'un des points illustrés (le point c est à mi-chemin entre les deux charges) pour que la configuration complète soit en équilibre.

a. À quel point doit-on placer une troisième charge q_3 pour que celle-ci soit en équilibre ?

b. Quel est le signe de la troisième charge q_3 pour que les autres charges soient en équilibre ?

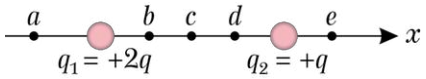


FIGURE 1.27 • Question 12

Q13 La figure 1.28 montre quatre configurations de trois charges. Classez ces configurations par ordre croissant selon le module de la force résultante exercée sur la charge positive $+Q$.

E14 Deux petites sphères ont des charges $q_1 = 150$ nC et $q_2 = 230$ nC respectivement. Quelle distance les sépare si elles se repoussent avec une force dont le module est de 0,24 N ?

E15 Deux sphères chargées s'attirent avec une force de 1,25 N quand elles sont séparées par une distance de 5,00 cm. Calculez la charge sur chaque sphère si le système est neutre.

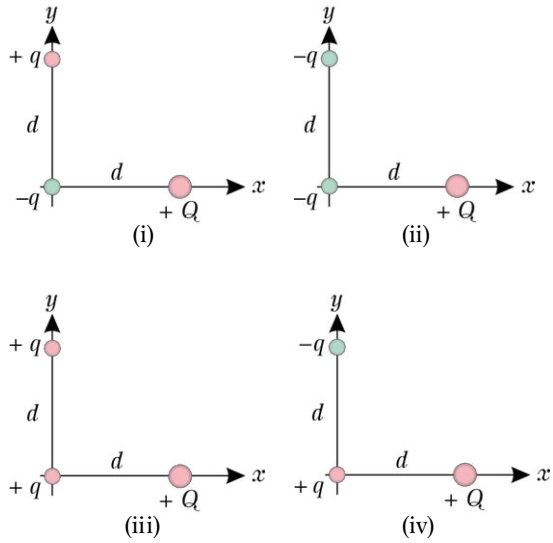


FIGURE 1.28 • Question 13

E16 Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron tourne autour d'un proton sur des orbites circulaires. Un électron se trouve sur l'orbite la plus rapprochée, dont le rayon est de 52,9 pm.

a. Déterminez le module de la force électrique exercée sur l'électron par le proton.

b. Calculez le rapport entre le module de la force électrique et le module de la force gravitationnelle qui sont exercées sur l'électron par le proton.

c. Calculez le rapport entre le module de la force électrique exercée sur l'électron par le proton et le module de la force gravitationnelle exercée sur un électron par la Terre, pour un électron à la surface de la planète.

(Indice : Utilisez les données de l'annexe B.)

E17 Deux rondelles sont placées sur une table à coussin d'air horizontale. La première rondelle a une charge de –2,50 µC et la deuxième, une charge de –1,90 µC. On immobilise les rondelles en les plaçant à une distance de 15,0 cm l'une de l'autre, puis on les laisse aller. L'accélération initiale de la première rondelle a un module de 2,30 m/s^2, et l'accélération initiale de la deuxième a un module de 4,50 m/s^2.

a. Quel est le module de la force initiale exercée sur la première rondelle ?

b. Quel est le module de la force initiale exercée sur la deuxième rondelle ?

c. Quelle est la masse de la première rondelle ?

d. Quelle est la masse de la deuxième rondelle ?

e. Quel est le module de l'accélération sur la première rondelle lorsque celle-ci se trouve à une distance de 30,0 cm de la deuxième rondelle ?

E18 Un grain de poussière porte une charge de $1{,}20 \times 10^{-12}$ C.

a. Calculez l'accélération d'un proton lorsque celui-ci se trouve à une distance de 5,00 mm à gauche du grain de poussière.

b. Calculez l'accélération d'un électron lorsque celui-ci se trouve à une distance de 5,00 mm à gauche du grain de poussière.

E19 Deux charges $q_1 = +4q$ et $q_2 = +q$ sont séparées par une distance d (*voir la figure 1.29*), et elles sont libres de se déplacer.

a. À quel endroit peut-on placer une troisième charge q_3 pour que celle-ci soit en équilibre ?

b. Quelle est la valeur de q_3 pour que l'ensemble de la configuration soit en équilibre.

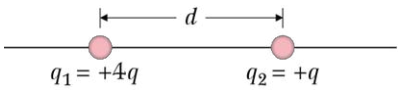


FIGURE 1.29 • Exercices 19 et 20

E20 Deux charges $q_1 = 108$ nC et $q_2 = 27{,}0$ nC sont séparées par une distance $d = 9{,}00$ cm (*voir la figure 1.29*), et elles sont libres de se déplacer.

a. À quel endroit peut-on placer une troisième charge q_3 pour que celle-ci soit en équilibre ?

b. Quelle est la valeur de q_3 pour que l'ensemble de la configuration soit en équilibre.

E21 La figure 1.30 illustre trois sphères chargées qui sont placées sur l'axe des x. La charge sur chaque sphère est $q_1 = 1{,}5$ µC, $q_2 = -2{,}0$ µC et $q_3 = -1{,}8$ µC. Calculez la force exercée sur la charge q_3 si $d = 2{,}0$ cm.

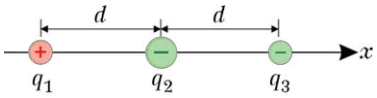


FIGURE 1.30 • Exercice 21

E22 La figure 1.31 illustre trois charges. Calculez les vecteurs unitaires indiqués ci-dessous.

a. $\vec{\mathbf{u}}_{1\to3}$

b. $\vec{\mathbf{u}}_{3\to1}$

c. $\vec{\mathbf{u}}_{2\to3}$

d. $\vec{\mathbf{u}}_{3\to2}$

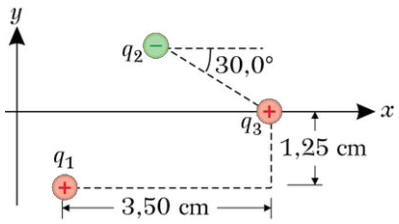


FIGURE 1.31 • Exercice 22

P23 Quatre charges sont placées aux coins d'un rectangle de côtés $a = 12{,}0$ cm et $b = 8{,}50$ cm (*voir la figure 1.32*). Calculez la force exercée sur la charge du coin inférieur gauche si $q = 2{,}00$ µC.

a. Exprimez votre réponse en fonction des vecteurs unitaires.

b. Exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.

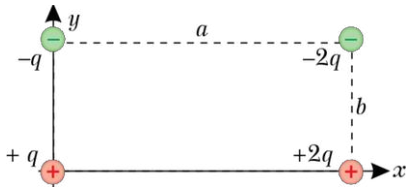


FIGURE 1.32 • Problème 23

P24 On place trois charges aux sommets d'un triangle équilatéral de côté $a = 10{,}0$ cm, comme l'illustre la figure 1.33. Calculez la force exercée sur la charge de gauche si $q = 1{,}00$ µC.

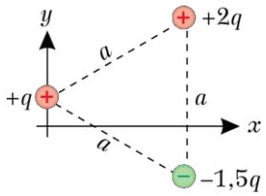


FIGURE 1.33 • Problème 24

P25 Quatre charges sont placées dans le plan des xy aux positions suivantes : $\vec{\mathbf{r}}_1 = 4{,}00\ \text{cm}\,\vec{\imath}$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = -3{,}50\ \text{cm}\,\vec{\jmath}$, $\vec{\mathbf{r}}_3 = (-1{,}50\,\vec{\imath} + 1{,}90\,\vec{\jmath})$ cm et $\vec{\mathbf{r}}_4 = (0{,}40\,\vec{\imath} + 0{,}50\,\vec{\jmath})$ cm. Les valeurs des charges sont $q_1 = 2{,}00$ µC, $q_2 = -1{,}80$ µC, $q_3 = -2{,}40$ µC et $q_4 = 1{,}10$ µC. Calculez la force exercée sur la charge q_1.

a. Exprimez votre réponse en fonction des vecteurs unitaires.

b. Exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.

P26 Un dipôle est constitué d'une charge $+q$ et d'une charge $-q$ séparées par une distance d. Le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ est orienté de la charge négative vers la charge positive, et son module est $p = qd$. On place une charge Q à une distance r du dipôle, comme le montre la figure 1.34.

a. Déterminez la force exercée sur la charge Q.

b. Donnez une approximation de la force exercée sur la charge Q si $r \gg d$.

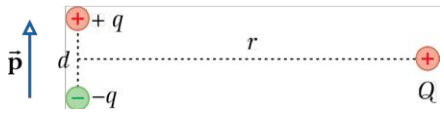


FIGURE 1.34 • Problème 26

P27 Deux sphères métalliques sont suspendues au bout de cordes. En équilibre, elles sont à la même hauteur, comme le montre la figure 1.35. La distance entre les sphères est de 5,75 cm lorsque $q_1 = -300$ nC et $q_2 = -200$ nC. Calculez les angles θ_1 et θ_2 entre les cordes et la verticale si la sphère 1 a une masse de 50,0 g et la sphère 2, une masse de 100 g.

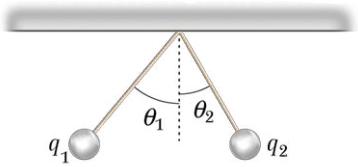


FIGURE 1.35 • Problème 27

P28 Deux sphères métalliques identiques chargées s'attirent avec une force de 52,4 N lorsqu'elles sont séparées par une distance de 12,0 cm. On place un fil conducteur entre les deux, puis on enlève le fil sans changer la distance. Les sphères se repoussent alors avec une force de 3,90 N.

a. Quelle est la charge finale sur chacune des sphères ?

b. Quelle est la charge initiale sur chaque sphère ?

P29 Une charge q_1 est placée au point de coordonnées (12,00 ; 8,50) cm. Une deuxième charge $q_2 = -410$ nC est placée au point de coordonnées (−4,00 ; 2,30) cm. On ajoute une troisième charge $q_3 = 200$ nC pour que la charge q_1 soit en équilibre. Quelles sont les coordonnées de la position de q_3 ?

P30 Trois charges sont placées sur les coins d'une boîte illustrée à la figure 1.36. Les dimensions de la boîte sont $e = 7{,}5$ cm, $L = 10{,}0$ cm et $h = 8{,}0$ cm.

a. Calculez le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{1\to3}$.

b. Calculez le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{1\to3}$.

c. Calculez le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{2\to3}$.

d. Calculez le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{2\to3}$.

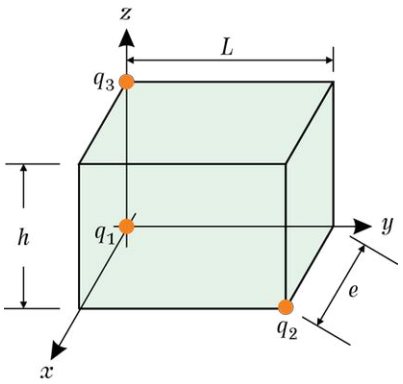


FIGURE 1.36 • Problèmes 30 et 31

P31 On place les charges $q_1 = 1{,}4$ µC, $q_2 = -2{,}3$ µC et $q_3 = 1{,}8$ µC sur les coins d'une boîte, comme le montre la figure 1.36. Les dimensions de la boîte sont $e = 7{,}5$ cm, $L = 10{,}0$ cm et $h = 8{,}0$ cm.

a. Calculez la force $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow1}$.

b. Calculez la force $\vec{\mathbf{F}}_{3\leftarrow2}$.

c. Calculez la force résultante exercée sur la charge q_3.

d. Déterminez le module de la force exercée sur la charge q_3.

P32 Une charge ponctuelle $q_1 = 4{,}50$ µC se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_1 = (2{,}00\vec{\imath} - 5{,}00\vec{\jmath} + 3{,}00\vec{k})$ cm. Une deuxième charge ponctuelle $q_2 = -2{,}30$ µC se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-2{,}00\vec{\imath} - 2{,}00\vec{\jmath} - 3{,}00\vec{k})$ cm. Un électron se situe à la position $\vec{\mathbf{r}} = (4{,}00\vec{\imath} + 4{,}00\vec{\jmath})$ cm.

a. Calculez la force exercée sur l'électron.

b. Quelle est l'accélération de l'électron ?

P33 Deux sphères identiques sont séparées par une distance r fixe. On veut répartir une charge totale positive Q entre les deux sphères, la première sphère ayant une charge q et la deuxième, une charge $Q - q$. Pour quelle valeur de q la force répulsive entre les sphères aura-t-elle le plus grand module ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

1.1	(iv)	Les protons sont fortement liés aux noyaux. Ce sont les électrons qui se déplacent lorsqu'on électrise les objets par frottement. Le ballon devient chargé négativement, ce qui indique qu'il a reçu des électrons des cheveux. Les cheveux ont perdu des électrons et sont donc chargés positivement.
1.2	**a.** $q_\Lambda = 0$	La charge est conservée : on doit avoir la même charge des deux côtés de l'équation de réaction.
	b. $q_\Sigma = +e$	
	c. $q_{\bar{\nu}} = 0$	
	d. $q_\Delta = +2e$	
1.3	**a.** $q_c = 0$ et c est conducteur, $q_d > 0$.	L'objet c est attiré à la fois par a et b qui ont des charges opposées, ce qui signifie que c est un conducteur neutre. L'objet d est repoussé par l'objet b, ce qui signifie que sa charge a le même signe que la charge de b.
	b. Elle est attractive.	Leurs charges sont de signes opposés.
	c. Elle est attractive.	L'objet c est un conducteur neutre. Il est attiré par tous les objets chargés.
1.4	**a.** $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1} = (-5{,}0\vec{\imath} - 4{,}0\vec{\jmath})$ cm $\vec{\mathbf{u}}_{2\to1} = -0{,}78\vec{\imath} - 0{,}63\vec{\jmath}$	On fait la soustraction $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$ pour calculer $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$. Dans le cas de $\vec{\mathbf{u}}_{2\to1}$, on divise par le module $r_{21} = 6{,}4$ cm.
	b. $\vec{\mathbf{r}}_{1\to2} = (5{,}0\vec{\imath} + 4{,}0\vec{\jmath})$ cm $\vec{\mathbf{u}}_{1\to2} = 0{,}78\vec{\imath} + 0{,}63\vec{\jmath}$	Le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{1\to2}$ est opposé au vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{2\to1}$.

Chapitre 02

Le champ électrique

Buts du chapitre

Dans ce chapitre, on définit et on calcule le champ électrique produit par des charges. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de comprendre la notion de champ électrique ;
- de calculer le champ produit par des charges ponctuelles et par une distribution de charge continue ;
- de déterminer la force électrique exercée sur une charge électrique dans un champ ;
- d'obtenir la trajectoire d'une charge dans un champ uniforme ;
- de calculer le moment de force exercé sur un dipôle électrique dans un champ uniforme.

Préalables

Ce chapitre porte sur la façon de calculer le champ électrique et la trajectoire d'une particule dans un champ. Revoyez :

- la loi de Coulomb, présentée à la section 1.4 ;
- le mouvement uniformément accéléré, étudié aux sections 4.2 et 4.3 du tome 1 ;
- le moment de force, abordé à la section 12.1 du tome 1.

Les requins peuvent ressentir le champ électrique produit par leur proie.

Nous avons vu au chapitre précédent que les charges électriques exercent une force électrique les unes sur les autres. Cette force est une force à distance : les objets chargés n'ont pas besoin de se toucher pour que la force soit exercée. Nous abordons dans ce chapitre le médiateur de la force électrique appelé le champ électrique. Chaque charge électrique produit autour d'elle un champ. De plus, lorsqu'une charge se trouve dans un champ, elle subit une force électrique.

Vous ne pouvez pas voir directement les champs électriques mais ils sont présents autour de vous. Les champs électriques sont importants autant dans le fonctionnement de votre cœur et de votre cerveau que dans celui de votre ordinateur et de votre écran de télévision. De même, lorsque vous parlez à un ami au téléphone, ce sont des champs électriques qui transportent l'information entre les deux appareils. Les champs électriques sont imperceptibles aux sens des humains, mais ils sont détectés par les requins et certains autres poissons*.

Le calcul de la force exercée sur un objet chargé peut être divisé en deux étapes : d'abord, nous allons voir comment calculer le champ électrique produit par des configurations de charges discrètes ou continues. Ensuite, nous allons calculer la force exercée sur l'objet chargé qui se trouve dans un champ électrique, et utiliser la mécanique afin d'étudier sa trajectoire.

Ce chapitre est une première étape dans l'étude du champ électrique. Le concept de champ est essentiel à la compréhension de l'électromagnétisme ainsi que des circuits électriques au niveau microscopique. De plus, l'étude de la lumière qui sera faite dans le tome 3 reposera notamment sur la notion de champ électrique, car la lumière est un phénomène électromagnétique.

2.1 La notion de champ

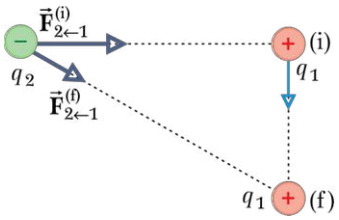


FIGURE 2.1
Lorsque q_1 se déplace, il faut que la force $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ change instantanément, selon la loi de Coulomb.

La force électrique est une force à distance, tout comme la force gravitationnelle et la force magnétique. On peut se demander dans ce cas comment se propage la force d'une charge à l'autre. La figure 2.1 montre une charge q_1 qui exerce une force $\vec{F}^{(i)}_{2\leftarrow 1}$ sur une charge q_2. Comment la charge q_2 «sait-elle» qu'il y a une charge q_1 près d'elle ? Qu'est-ce qui se passe si la charge q_1 se déplace, d'une position initiale (i) vers une position finale (f), comme l'illustre la figure ? Selon la loi de Coulomb, la force $\vec{F}^{(i)}_{2\leftarrow 1}$ doit changer instantanément pour devenir la force $\vec{F}^{(f)}_{2\leftarrow 1}$, et suivre le mouvement de la charge q_1. C'est ce qu'on appelle l'*effet à distance*. L'effet à distance est un phénomène difficile à accepter par les physiciens. Si les charges sont très éloignées l'une de l'autre, il devrait y avoir logiquement un délai afin que l'information du mouvement de la charge q_1 se rende jusqu'à la charge q_2.

Le physicien anglais Michael Faraday (1791-1867) (*voir la figure 2.2*) a proposé un mécanisme différent, qui remplace l'action à distance. Selon Faraday, une charge électrique q_1 change l'espace autour d'elle en créant ce qu'il appela des *lignes de force*, qu'on appelle aujourd'hui un *champ électrique*. La charge q_1 est appelée une *source* de champ électrique. Une deuxième charge dans l'environnement de la première va subir une force électrique exercée par le champ électrique. Le champ électrique est le **médiateur** de la force électrique. Si la source se déplace, cela change graduellement le champ électrique. Il n'y a plus d'effet instantané ; la force électrique est alors une interaction locale entre le champ électrique et une charge.

* Voir par exemple Douglas Fields. «Le sixième sens du requin», *Pour la Science*, n° 359, 2007.

On peut résumer ainsi le mécanisme de Faraday lorsqu'une charge q_2 subit une force électrique exercée par une charge q_1 :

- Une charge q_1 produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$.
- Une charge q_2 plongée dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ subit une force électrique.

La figure 2.3 illustre une configuration plus complexe, avec une sphère chargée. Puisqu'un objet chargé produit un champ électrique, il doit exister un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ autour des objets chargés de la configuration. Pour mesurer le champ à un point quelconque $\mathcal{P}$, on place une charge-test positive q_0 à cet endroit, comme à la figure 2.3a. La charge q_0 joue le rôle d'une sonde. Le champ électrique est défini comme étant la force électrique par unité de charge :

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q_0}}{q_0}. \tag{2.1}$$

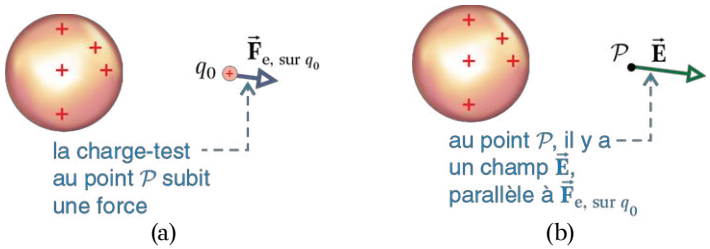


FIGURE 2.3
(a) On place au point $\mathcal{P}$ une charge-test positive q_0 qui subit une force $\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q_0}$. (b) Le champ électrique au point $\mathcal{P}$ a la même orientation que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q_0}$.

On utilise une charge-test positive de telle sorte que le champ électrique a la même orientation que la force exercée sur cette charge (*voir la figure 2.3b*). Dans le SI, le champ électrique s'exprime en newtons par coulomb (N/C). Le tableau 2.1 donne certaines valeurs approximatives du module du champ électrique.

Malgré ce que peut sembler montrer l'équation 2.1, le champ électrique à un point ne dépend pas de la valeur de la charge-test. En effet, la force électrique est proportionnelle à la charge, ce qui signifie que le quotient de la force et de la charge ne dépend pas de la valeur de la charge. Il est aussi important de comprendre qu'à chaque point, il y a un champ électrique, même si on n'a pas placé de charge-test. Le champ est créé par la configuration d'objets chargés.

REMARQUE
La valeur de la charge-test doit être assez petite pour qu'elle ne modifie pas la configuration initiale.

Le champ électrique remplit l'espace entre les objets chargés. En général, c'est une fonction de la position et du temps ; on écrit donc $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t)$. On dit que le champ est *uniforme* lorsqu'il ne dépend pas de la position, qu'il est *constant* s'il ne dépend pas du temps et qu'il est *variable* s'il change en fonction du temps. En *électrostatique*, on étudie les configurations pour lesquelles le champ est constant, mais celui-ci peut être non uniforme, c'est-à-dire qu'il n'est pas le même d'un point à l'autre.

FIGURE 2.2
Michael Faraday (1791-1867), physicien anglais

Champ électrique

TABLEAU 2.1
Le module du champ électrique dans quelques situations

Position ou situation	E(N/C)
Limite de détection des requins	10^{-6}
Dans les fils conducteurs	10^{-2}
Ondes radio	10^{-1}
Dans la basse atmosphère	10^{2}
Près d'un objet chargé par frottement	10^{3}
Lumière du Soleil	10^{3}
Décharge dans l'air	3×10^{6}
Membrane d'une cellule	10^{7}
À l'intérieur d'un atome d'hydrogène	5×10^{11}

On peut inverser l'équation 2.1 pour obtenir la force électrique exercée sur une charge par un champ électrique. En effet, si on connaît le champ à la position d'une charge q, la force électrique est alors donnée par l'expression :

Force électrique

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q} = q\vec{\mathbf{E}}\,. \tag{2.2}$$

L'équation 2.2 est une équation vectorielle. L'orientation de la force dépend de l'orientation du champ électrique et du signe de la charge q, comme le montre la figure 2.4.

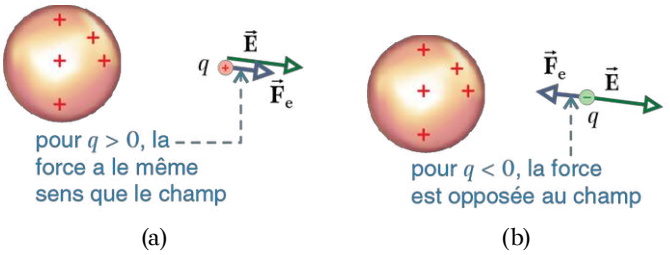


FIGURE 2.4

On place une charge q au point $\mathcal{P}$. (a) Une charge positive subit une force dans le même sens que le champ. (b) Une charge négative subit une force de sens opposé au champ.

- Pour une charge q positive, **la force électrique a le même sens** que le champ électrique.
- Pour une charge q négative, **la force électrique a un sens opposé** au champ électrique.

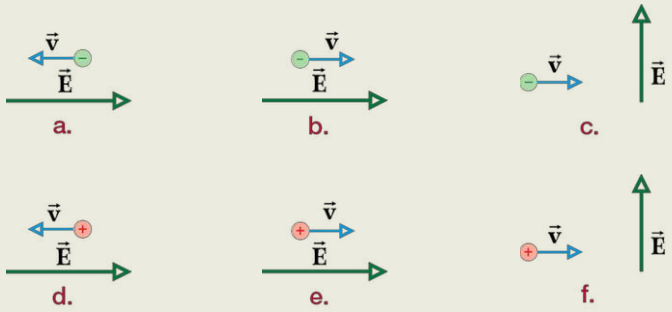
Si un objet chargé dans un champ électrique ne subit pas d'autre force, on peut calculer son accélération à partir de la force électrique en utilisant la deuxième loi de Newton. Son accélération sera parallèle au champ ; l'accélération aura le même sens que le champ électrique pour une charge positive, et l'accélération sera de sens opposé au champ électrique dans le cas d'une charge négative.

MISE EN GARDE

Une charge subit une force exercée par le champ électrique **produit par d'autres charges** ; une charge n'est pas sensible au champ créé par elle-même.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.1

La figure ci-dessous montre six situations où une charge se déplace dans un champ électrique uniforme. Dans chaque cas, indiquez l'orientation de la force électrique.



2.2 Le champ de charges ponctuelles

On commence l'étude du champ électrique en calculant le champ produit par une *charge ponctuelle* q. Une charge ponctuelle est un objet chargé dont les dimensions sont beaucoup plus petites que la distance où le champ est mesuré. On veut calculer le champ électrique à un point $\mathcal{P}$ situé à une distance r d'une charge ponctuelle q. On utilise une charge-test positive q_0 au point $\mathcal{P}$, comme le montre la figure 2.5. La force est donnée par la loi de Coulomb (selon l'équation 1.6 de la page 17) :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q_0} = \frac{kqq_0}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \ .$$

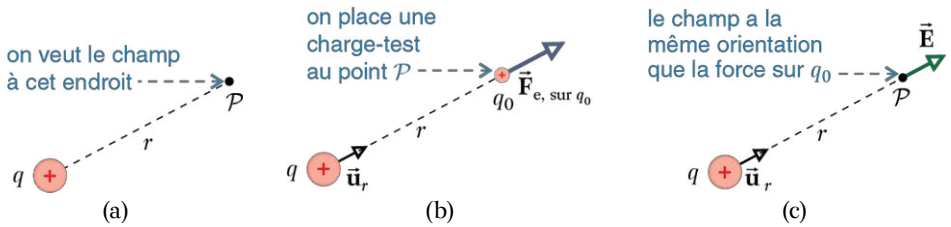


FIGURE 2.5
Le calcul du champ au point $\mathcal{P}$ produit par une charge ponctuelle

Selon la définition du champ électrique, donnée par l'équation 2.1, on obtient

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{e, sur } q_0}}{q_0}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{kq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \ . \qquad (2.3)$$

Champ d'une charge ponctuelle

Nous verrons au chapitre 3 que cette expression donne aussi le champ électrique à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée. Le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_r$ est le *vecteur unitaire radial*, orienté de la charge q (la source du champ) vers le point $\mathcal{P}$. Pour l'obtenir, on peut tracer le vecteur position $\vec{\mathbf{r}}$ entre la charge q et le point $\mathcal{P}$, comme à la figure 2.6. On divise ensuite ce vecteur par son module $|\vec{\mathbf{r}}| = r$:

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath} + \Delta y\,\vec{k}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \ . \qquad (2.4)$$

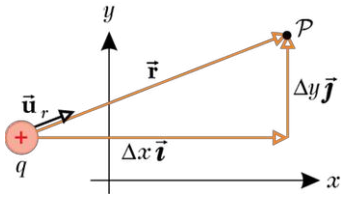


FIGURE 2.6
Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ et le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$

Défi animé 2.1
Si on place une charge ponctuelle dans un champ électrique uniforme, l'allure de ce champ sera-t-elle modifiée ?

L'équation 2.3 est une équation vectorielle. Pour une charge positive, le champ électrique a la même orientation que le vecteur unitaire, et son module diminue selon l'inverse de la distance au carré. Pour une charge q négative, le champ doit être opposé au vecteur unitaire, c'est-à-dire qu'il est orienté vers la charge ; son module diminue aussi avec l'inverse de la distance au carré. La figure 2.7 (*voir la page suivante*) illustre le champ près d'une charge positive et près d'une charge négative.

MISE EN GARDE

Dans la figure 2.7, il y a un champ partout autour de la charge. Les vecteurs représentent le champ électrique à la position du point correspondant.

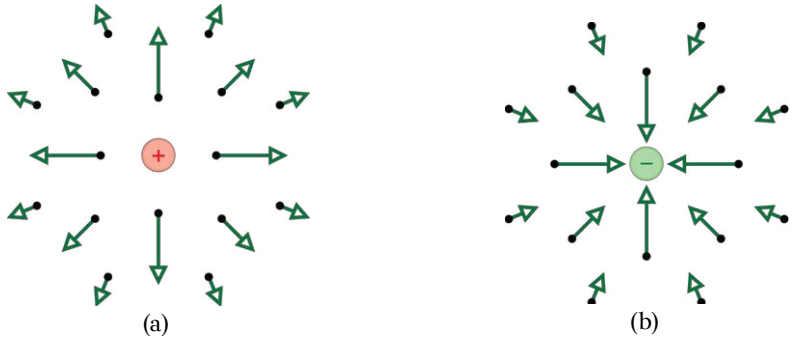


FIGURE 2.7
Une représentation du champ électrique : (a) pour une charge ponctuelle positive ; (b) pour une charge ponctuelle négative.

EXEMPLE 2.1 Le champ d'une charge ponctuelle

Une charge négative $q = -10{,}0\ \mu C$ est placée à l'origine. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ dont la position est $\vec{\mathbf{r}} = (4{,}00\vec{\imath} - 7{,}00\vec{\jmath})$ cm.

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 2.8. Nous avons tracé le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ (de la charge vers le point $\mathcal{P}$) et le champ $\vec{\mathbf{E}}$, vers la charge négative.

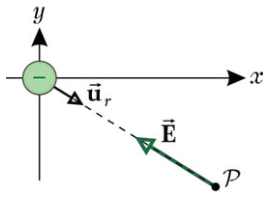


FIGURE 2.8
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.1

Décortiquer le problème

Connues

$q = -10{,}0 \times 10^{-6}$ C

$\vec{\mathbf{r}} = (0{,}0400\vec{\imath} - 0{,}0700\vec{\jmath})$ m

Inconnue

$\vec{\mathbf{E}}$

Comme la charge est située à l'origine, le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ est directement le vecteur position du point $\mathcal{P}$.

Nous calculons alors la distance r ainsi que le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$:

$$r = \sqrt{(0{,}0400\ \text{m})^2 + (-0{,}0700\ \text{m})^2} = 0{,}0806\ \text{m} \quad \text{(i)}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \frac{(0{,}0400\vec{\imath} - 0{,}0700\vec{\jmath})\ \text{m}}{0{,}0806\ \text{m}}$$

$$= 0{,}496\vec{\imath} - 0{,}868\vec{\jmath}\ . \quad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.3 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{kq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r\ .$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{8{,}99 \times 10^9 \times (-10{,}0 \times 10^{-6})}{(0{,}0806)^2}(0{,}496\vec{\imath} - 0{,}868\vec{\jmath})$$

$$\vec{\mathbf{E}} = (-0{,}687\vec{\imath} + 1{,}20\vec{\jmath}) \times 10^7\ \text{N/C}\ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le champ doit être orienté vers la charge négative. Pour le point $\mathcal{P}$, cela veut dire une composante x négative et une composante y positive. C'est bien ce que nous obtenons.

Le champ produit par plusieurs charges ponctuelles

Il est également possible de calculer le champ électrique lorsque plusieurs charges ponctuelles sont présentes. La figure 2.9 montre deux charges ponctuelles. Pour obtenir le champ à un point $\mathcal{P}$, on place à cet endroit une charge-test q_0. Comme nous avons vu au chapitre 1, la force électrique résultante est obtenue à l'aide du

principe de superposition (*voir l'équation 1.11 de la page 19*). Lorsque la configuration contient N charges ponctuelles, la force exercée sur q_0 est

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{e,sur}\,q_0} = \vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow 1} + \vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow 2} + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow N} .$$

Le champ est $$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow 1}}{q_0} + \frac{\vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow 2}}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{\mathbf{F}}_{0\leftarrow N}}{q_0}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_N . \tag{2.5}$$

Principe de superposition

C'est le principe de superposition pour le champ électrique. On peut donc dire :

Le champ résultant à un point $\mathcal{P}$ est calculé en faisant la somme vectorielle de tous les champs produits par les charges présentes.

Le champ électrique est une quantité vectorielle. Pour trouver le champ produit par chacune des charges, il est utile d'utiliser une méthode vectorielle basée sur l'équation 2.3 avec le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ pour chaque charge. Dans la figure 2.9, on illustre le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{r1}$ (orienté de la source q_1 vers le point $\mathcal{P}$) et le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{r2}$ (orienté de la source q_2 vers le point $\mathcal{P}$). La stratégie suivante utilise la méthode vectorielle pour calculer le champ produit par un groupe de charges ponctuelles.

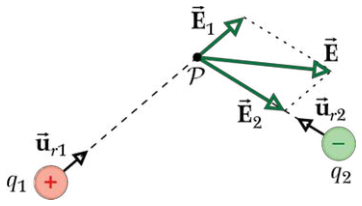


FIGURE 2.9
On calcule le champ résultant $\vec{\mathbf{E}}$ à l'aide de la somme vectorielle des champs produits par chaque charge.

STRATÉGIE 2.1 Le champ électrique de charges ponctuelles

Illustrer la situation
Tracez un schéma avec toutes les charges et le point $\mathcal{P}$, l'endroit où on veut le champ. Tracez les vecteurs unitaires, orientés des sources vers le point $\mathcal{P}$. Tracez les champs électriques : le champ est orienté dans le sens opposé de la charge, pour une charge positive, et orienté vers la charge, pour une charge négative. Tracez un système de coordonnées cartésiennes.

Décortiquer le problème
Identifiez bien les quantités connues et inconnues. Calculez les vecteurs unitaires, orientés des sources vers le point $\mathcal{P}$.

Identifier la clé
La première **clé** est l'équation 2.3 qui permet de calculer le champ produit par chacune des charges. Pour une charge i, le champ est

$$\vec{\mathbf{E}}_i = \frac{kq_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{u}}_{ri} ,$$

où $\vec{\mathbf{u}}_{ri}$ est le vecteur unitaire radial, orienté de la charge i vers le point $\mathcal{P}$.
La deuxième **clé** est le principe de superposition :

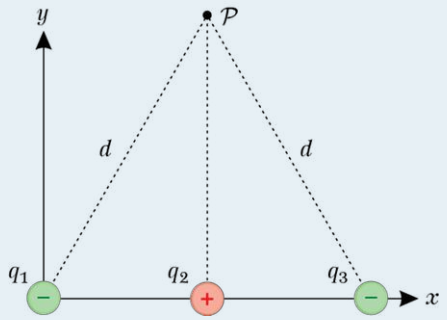
$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_N .$$

Résoudre le problème
Remplacez les données connues dans les équations pour obtenir la quantité recherchée.

Valider la réponse
Vérifiez que les champs calculés sont conformes au schéma de la situation et que la réponse finale a du sens.

EXEMPLE 2.2 Trois charges dans le plan

Trois charges ($q_1 = q_3 = -2Q$ et $q_2 = Q$) sont placées comme le montre la figure ci-contre. Calculez le champ au point $\mathcal{P}$, de telle sorte que les charges q_1, q_3 et le point $\mathcal{P}$ soient aux sommets d'un triangle équilatéral.



SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 2.10. Les vecteurs unitaires et les champs électriques sont illustrés.

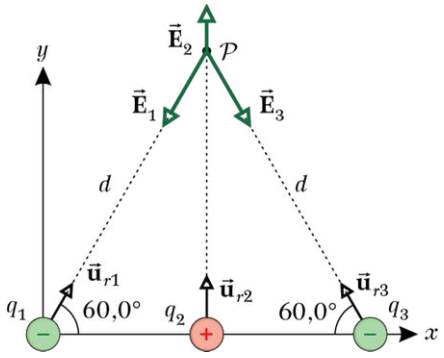


FIGURE 2.10
Le schéma de la situation lorsque $Q > 0$ pour l'exemple 2.2

Décortiquer le problème

Nous calculons les vecteurs unitaires en utilisant les orientations illustrées à la figure 2.10 et en sachant que leur module est égal à 1.

Connues		Inconnue
$q_1 = q_3 = -2Q$	$q_2 = Q$	$\vec{\mathbf{E}}$
$r_1 = r_3 = d$	$r_2 = d \sin 60{,}0°$	

$$\vec{\mathbf{u}}_{r1} = (1)\cos 60{,}0°\,\vec{\imath} + (1)\sin 60{,}0°\,\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} \quad \text{(i)}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{r2} = \vec{\jmath} \quad \text{(ii)}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{r3} = -\cos 60{,}0°\,\vec{\imath} + \sin 60{,}0°\,\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} \quad \text{(iii)}$$

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 2.3 qui permet de calculer le champ produit par chaque charge séparément :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{k(-2Q)}{d^2}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{kQ}{d^2}\left(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right) \quad \text{(iv)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{kQ}{(d \sin 60{,}0°)^2}\vec{\jmath} = \frac{4kQ}{3d^2}\vec{\jmath} \quad \text{(v)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_3 = \frac{k(-2Q)}{d^2}\left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{kQ}{d^2}\left(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right). \quad \text{(vi)}$$

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 . \quad \text{(vii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons, en faisant la somme vectorielle,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \frac{kQ}{d^2}\left[\left(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right) + \frac{4}{3}\vec{\jmath} + \left(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right)\right] \\ &= \frac{kQ}{d^2}\left[(-1+0+1)\,\vec{\imath} + \left(-\sqrt{3} + \frac{4}{3} - \sqrt{3}\right)\vec{\jmath}\right] \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2\sqrt{3}\right)\frac{kQ}{d^2}\,\vec{\jmath} = -2{,}13\,\frac{kQ}{d^2}\,\vec{\jmath}. \quad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse

Le champ au point $\mathcal{P}$ n'a qu'une composante y, comme le montre la figure 2.10. La réponse est valable pour $Q > 0$ ou pour $Q < 0$.

EXEMPLE 2.3 Deux charges dans l'espace

Une charge $q_1 = 2{,}00\ \mu C$ est placée au point de coordonnées (2,00 ; –3,00 ; 4,00) cm. Une deuxième charge $q_2 = -3{,}00\ \mu C$ est placée au point de coordonnées (–1,00 ; 3,00 ; 1,00) cm.

a. Calculez le champ au point de coordonnées (1,00 ; 1,00 ; 1,00) cm.

b. Calculez le module du champ au point de coordonnées (1,00 ; 1,00 ; 1,00) cm.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\vec{\mathbf{r}}_{q_1} = (2{,}00\vec{\imath} - 3{,}00\vec{\jmath} + 4{,}00\vec{k})$ cm	$\vec{\mathbf{E}}$
$\vec{\mathbf{r}}_{q_2} = (-1{,}00\vec{\imath} + 3{,}00\vec{\jmath} + 1{,}00\vec{k})$ cm	
$\vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{P}} = (1{,}00\vec{\imath} + 1{,}00\vec{\jmath} + 1{,}00\vec{k})$ cm	
$q_1 = 2{,}00\ \mu C \quad q_2 = -3{,}00\ \mu C$	

Nous calculons d'abord les vecteurs unitaires et les distances entre les charges et le point $\mathcal{P}$.

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{P}} - \vec{\mathbf{r}}_{q_1} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) - (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k})$$
$$= (-\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k})\ \text{cm}$$
$$r_1 = |\vec{\mathbf{r}}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (-3)^2} = 5{,}099\ \text{cm}$$
$$\vec{\mathbf{u}}_{r1} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_1}{r_1} = (-0{,}196\vec{\imath} + 0{,}784\vec{\jmath} - 0{,}588\vec{k})$$
$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{P}} - \vec{\mathbf{r}}_{q_2} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) - (-\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k})$$
$$= (2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath})\ \text{cm}$$
$$r_2 = |\vec{\mathbf{r}}_2| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2{,}828\ \text{cm}$$
$$\vec{\mathbf{u}}_{r2} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_2}{r_2} = (0{,}707\vec{\imath} - 0{,}707\vec{\jmath})$$

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 2.3 qui permet de calculer le champ produit par chaque charge séparément :

$$\vec{\mathbf{E}}_i = \frac{kq_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{u}}_{ri}\,.$$

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2\,.$$

Résoudre le problème

Les champs électriques sont

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{8{,}99\times10^9\times2\times10^{-6}}{(0{,}050\,99)^2} \times(-0{,}196\vec{\imath} + 0{,}784\vec{\jmath} - 0{,}588\vec{k})$$
$$= (-1{,}36\vec{\imath} + 5{,}42\vec{\jmath} - 4{,}07\vec{k})\times10^6\ \text{N/C}$$
$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{8{,}99\times10^9(-3\times10^{-6})}{(0{,}028\,3)^2}(0{,}707\vec{\imath} - 0{,}707\vec{\jmath})$$
$$= (-23{,}8\vec{\imath} + 23{,}8\vec{\jmath})\times10^6\ \text{N/C}\,.$$

Le champ résultant est

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$$
$$= (-25{,}2\vec{\imath} + 29{,}3\vec{\jmath} - 4{,}07\vec{k})\times10^6\ \text{N/C}\,. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous calculons le module avec la méthode habituelle :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$
$$= \sqrt{(-25{,}2)^2 + (29{,}3)^2 + (4{,}07)^2}\times10^6$$
$$= 38{,}9\times10^6\ \text{N/C}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux deux questions, en donnant un vecteur en **a.** et un module en **b.**

2.3 Le champ électrique d'un dipôle

Un dipôle électrique est constitué de deux charges opposées $+q$ et $-q$ séparées par une distance d. Plusieurs atomes deviennent des dipôles lorsqu'on les place dans un champ électrique. Le nuage électronique se déplace légèrement à l'opposé du champ extérieur, et il n'est plus centré sur le noyau positif. On parle alors de *dipôle induit* (*voir la figure 2.11*). Certaines molécules, par exemple les molécules d'eau, sont de façon intrinsèque des dipôles électriques. Comme le

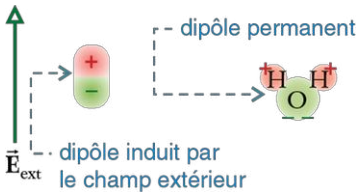


FIGURE 2.11
Un dipôle induit et un dipôle permanent

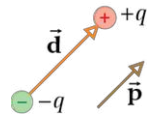


FIGURE 2.12
Le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ est orienté de la charge négative vers la charge positive.

montre la figure 2.11, il y a deux électrons qui se retrouvent plus souvent près de l'atome d'oxygène, ce qui laisse les atomes d'hydrogène positifs. Dans ces molécules, le nuage électronique n'est pas centré sur les noyaux des atomes. On parle alors de *dipôles permanents*.

On caractérise un dipôle par son *moment dipolaire électrique* $\vec{\mathbf{p}}$, défini comme un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive, et dont le module est $p = qd$ (*voir la figure 2.12*) :

Moment dipolaire électrique

$$\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}} = qd\ \overrightarrow{\text{de } -q \text{ vers } +q}\,, \tag{2.6}$$

où $\vec{\mathbf{d}}$ est le vecteur reliant la charge négative et la charge positive.

Dans le SI, le moment dipolaire se mesure en C · m. On utilise aussi, dans certains domaines, une ancienne unité : le *debye* (D), nommée en l'honneur du physicien et chimiste néerlandais Peter Joseph Wilhelm Debye (1884-1966). Le facteur de conversion est

$$1\,\text{D} = \frac{1\times10^{-21}\,\text{C}\cdot\text{m}}{299\,792\,458} = 3{,}3356\times10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m}\,.$$

Cette unité est utile, car elle est bien adaptée aux moments dipolaires moléculaires. Par contre, on doit exprimer le moment dipolaire dans l'unité du SI pour faire les calculs.

La charge nette du dipôle est nulle, mais celui-ci produit quand même un champ électrique, car les deux charges ne sont pas situées à la même position. On veut calculer le champ électrique à deux endroits importants : sur l'axe du dipôle et sur la ligne bissectrice. On s'intéresse aux points éloignés du dipôle, c'est-à-dire aux points dont la distance entre ceux-ci et le dipôle est beaucoup plus grande que la distance d entre les charges.

La figure 2.13a illustre un dipôle placé à l'origine. Le dipôle est constitué d'une charge $+q$ située à une distance $d/2$ au-dessus de l'origine et d'une charge $-q$ située à une distance $d/2$ sous l'origine. Le moment dipolaire est $\vec{\mathbf{p}} = qd\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. On veut calculer le champ au point $\mathcal{P}$, situé à une distance r de l'origine sur l'axe des y (*voir la figure 2.13b*). Pour ce faire, on calcule le champ électrique résultant à l'aide du principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = \frac{kq}{r_+^2}\vec{\mathbf{u}}_{r+} + \frac{k(-q)}{r_-^2}\vec{\mathbf{u}}_{r-}\,,$$

où $r_+ = r - d/2$ est la distance entre le point $\mathcal{P}$ et la charge positive et $r_- = r + d/2$, la distance entre le point $\mathcal{P}$ et la charge négative. La figure 2.13c montre les vecteurs unitaires, qui sont tous les deux équivalents à $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. On obtient alors

$$\vec{\mathbf{E}} = \left[\frac{kq}{\left(r-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(r+\frac{d}{2}\right)^2}\right]\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{kq}{\left(r-\frac{d}{2}\right)^2\left(r+\frac{d}{2}\right)^2}\left[\left(r+\frac{d}{2}\right)^2 - \left(r-\frac{d}{2}\right)^2\right]\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \frac{kq}{\left(r-\frac{d}{2}\right)^2\left(r+\frac{d}{2}\right)^2}\left[\left(r^2+rd+\frac{d^2}{4}\right) - \left(r^2-rd+\frac{d^2}{4}\right)\right]\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{2kqdr}{\left(r-\frac{d}{2}\right)^2\left(r+\frac{d}{2}\right)^2}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\,.$$

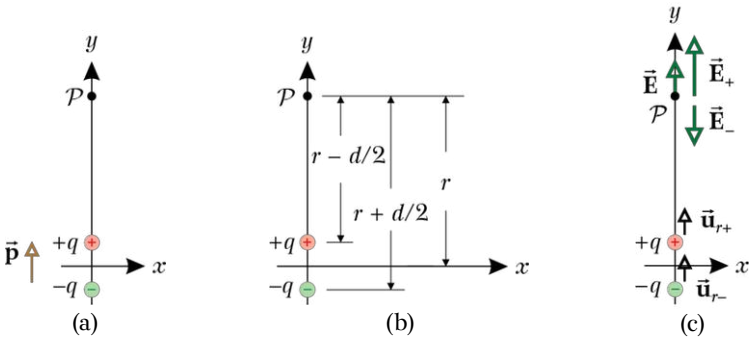


FIGURE 2.13
(a) On veut calculer le champ au point $\mathcal{P}$. (b) Les distances entre les charges et le point $\mathcal{P}$. (c) Les vecteurs unitaires et les champs électriques.

On remarque que le numérateur est proportionnel à $\vec{\mathbf{p}} = qd\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. Dans la plupart des cas, on veut le champ à des distances $r \gg d$, de telle sorte que le dénominateur est approximativement égal à r^4. Avec ces deux éléments, on obtient le champ sur l'axe d'un dipôle, à une distance r du centre du dipôle :

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{dipôle}} = \frac{2k\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \quad \text{(sur l'axe du dipôle)} . \tag{2.7}$$

On a calculé le champ au-dessus du dipôle. L'équation 2.7 est aussi valable pour un point sous la charge négative. Pour un point sur l'axe du dipôle, le champ a la même orientation que le vecteur moment électrique $\vec{\mathbf{p}}$.

Il est possible de calculer le champ électrique pour un point $\mathcal{P}$ qui se trouve sur la bissectrice perpendiculaire au dipôle. Pour un point situé sur l'axe des x à une distance $r \gg d$ (*voir la figure 2.14*), le champ électrique est

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{dipôle}} = -\frac{k\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \quad \text{(sur la bissectrice)} . \tag{2.8}$$

Cette fois-ci, le champ est opposé au vecteur $\vec{\mathbf{p}}$, et son module est deux fois plus petit que pour un point sur l'axe du dipôle. L'équation 2.8 est aussi valable pour les points sur la partie négative de l'axe des x.

REMARQUE

Le champ électrique d'un dipôle décroît selon l'inverse de la distance au cube, alors que le champ d'une charge ponctuelle décroît selon l'inverse de la distance au carré. Donc, le champ décroît plus rapidement dans le cas d'un dipôle, car celui-ci est électriquement neutre.

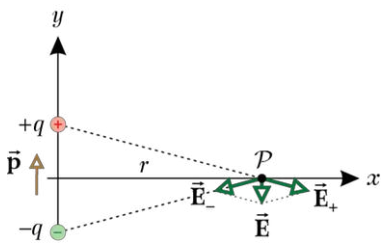


FIGURE 2.14
Le champ sur la bissectrice perpendiculaire au dipôle

2.4 Les distributions continues de charge

Les densités de charge

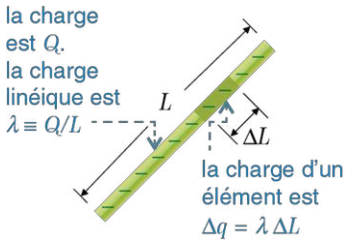


FIGURE 2.15
Lorsque la charge est distribuée sur une ligne, on utilise la charge linéique λ.

Jusqu'à présent, on a calculé le champ électrique produit par des charges ponctuelles, séparées par des distances importantes. Dans certaines situations, les charges sont très rapprochées et très nombreuses. C'est le cas pour la tige chargée de la figure 2.15. Si cette tige porte une charge de –1 nC, cela représente un excès de charge négative d'environ 6×10^9 électrons. Il est très ardu de considérer en détail ces milliards d'électrons. On supposera plutôt que la charge est continue. Pour caractériser la charge d'un objet linéaire, comme une tige ou un fil, on utilise la *charge linéique* λ, qui représente la charge par unité de longueur. Pour un objet de longueur L, qui porte une charge nette Q uniformément distribuée, la charge linéique est définie par l'expression :

Charge linéique

$$\lambda \equiv \frac{Q}{L} . \tag{2.9}$$

La charge linéique peut être positive ou négative, selon le signe de la charge nette de l'objet. L'unité de λ dans le SI est le coulomb par mètre (C/m).

Si on veut obtenir la charge d'un élément de la tige, dont la longueur est ΔL, on multiplie la longueur de l'élément par la charge linéique :

$$\Delta q = \lambda \Delta L . \tag{2.10}$$

REMARQUE
Comme dans le tome 1, on utilise des majuscules pour les paramètres des objets et des systèmes, et des minuscules pour les paramètres des éléments des systèmes.

Lorsque la charge est plutôt distribuée sur une surface, un plan par exemple, on définit la *charge surfacique* σ comme la charge par unité d'aire. La figure 2.16 montre un plan qui a une charge nette Q et une aire A. La charge surfacique est

Charge surfacique

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A} . \tag{2.11}$$

La charge surfacique est aussi utilisée pour des objets dont la charge se trouve complètement à leur surface. Dans le SI, l'unité de σ est le coulomb par mètre au carré (C/m^2). Si on prend uniquement un élément ΔA, la charge de cet élément est $\Delta q = \sigma \Delta A$.

Il est aussi possible que la charge soit distribuée dans le volume entier d'un objet, comme le montre la figure 2.17. Dans ce cas, on définit la *charge volumique* ρ comme la charge par unité de volume. Pour un objet de volume V qui a une charge nette Q, la charge volumique est

Charge volumique

$$\rho \equiv \frac{Q}{V} . \tag{2.12}$$

Dans le SI, la charge volumique est mesurée en coulombs par mètre cube (C/m^3). Un élément ΔV de l'objet a alors une charge $\Delta q = \rho \Delta V$.

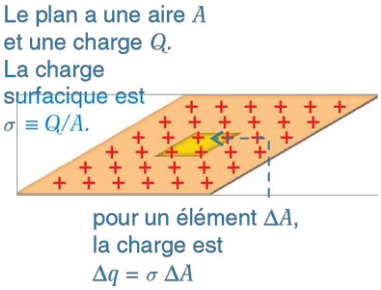


FIGURE 2.16
Lorsque la charge est distribuée sur une surface, on a recours à la charge surfacique σ.

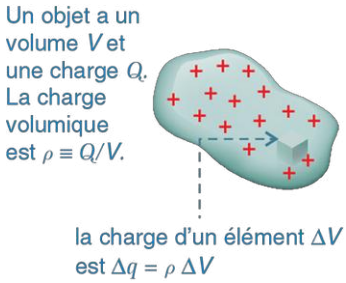


FIGURE 2.17
Lorsque la charge est distribuée dans un volume, on a recours à la charge volumique ρ.

REMARQUE

La charge volumique est l'équivalent électrique de la masse volumique, définie comme étant la masse par unité de volume.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.2

Une tige de longueur L a une charge Q uniformément distribuée sur sa longueur. On coupe la tige en deux morceaux, de telle sorte que le second morceau est deux fois plus long que le premier.

a. Quelle est la charge linéique de chacun des morceaux ?

b. Quelle est la charge de chacun des morceaux ?

Les définitions précédentes sont valables lorsque les densités de charge sont uniformes, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas selon la position de l'objet. Dans le cas contraire, on doit utiliser le calcul différentiel. Pour la tige illustrée à la figure 2.18, on considère un élément Δx dont la charge est Δq. La charge linéique est définie comme étant le rapport entre la charge et la longueur lorsque celle-ci tend vers zéro :

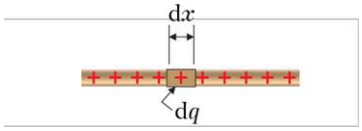


FIGURE 2.18
Pour définir la charge linéique, on choisit un élément de longueur $\mathrm{d}x$ dont la charge est $\mathrm{d}q$.

$$\lambda \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \ . \tag{2.13}$$

REMARQUE

L'élément analysé de la tige est appelé un *élément infinitésimal*. On utilise habituellement la lettre d pour représenter un tel élément : l'élément de charge infinitésimal est $\mathrm{d}q$ et sa longueur, $\mathrm{d}x$.

Pour calculer la charge totale de la tige, on doit faire la somme des charges de tous les éléments de la tige. Chaque élément a une charge $\Delta q = \lambda\, \Delta x$. La charge totale est donc, en prenant la limite $\Delta x \to 0$,

$$Q = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{\text{objet}} \lambda\, \Delta x = \int_{\text{objet}} \lambda\, \mathrm{d}x \ . \tag{2.14}$$

La somme infinie est appelée l'*intégrale*. Si on sait de quelle façon λ varie d'un point à l'autre de la tige, il est possible de calculer la charge de la tige.

On obtient des résultats équivalents pour la charge surfacique et la charge volumique. Lorsque la charge est distribuée sur une surface de façon non uniforme, on prend un élément d'aire infinitésimal dA, sur lequel il y a une charge dq. Alors,

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A} \tag{2.15}$$

$$Q = \int_{\text{objet}} \sigma \, \mathrm{d}A \, . \tag{2.16}$$

Si la charge est répartie dans un volume de façon non uniforme, on divise celui-ci en éléments infinitésimaux dV, dont la charge est dq :

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{2.17}$$

$$Q = \int_{\text{objet}} \rho \, \mathrm{d}V \, . \tag{2.18}$$

Un bref aperçu de l'intégrale

Comme on l'a décrit dans le tome 1, l'*intégrale indéfinie* est l'opération inverse de la dérivée. Par exemple, si la fonction $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$, alors

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C} \, ,$$

où $\mathcal{C}$ est une constante arbitraire qu'on appelle *constante d'intégration*. En effet, la dérivée d'une constante est nulle. On dit alors que $F(x)$ est la *primitive* de $f(x)$.

Comme pour la dérivée, l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :

$$\int \left[f(x) + g(x) \right] \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

De plus, lorsqu'une fonction est multipliée par une constante, on peut « sortir » la constante de l'intégrale :

$$\int \left[a \, f(x) \right] \mathrm{d}x = a \int f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Le calcul d'une intégrale est plus complexe que le calcul d'une dérivée, car il n'existe pas de formule générale pour l'intégrale d'un produit. L'annexe E présente quelques formules d'intégrales indéfinies. Entre autres, dans le cas d'une puissance, on a

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \qquad (n \neq -1) \tag{2.19}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \mathcal{C} \, , \tag{2.20}$$

où n est une constante.

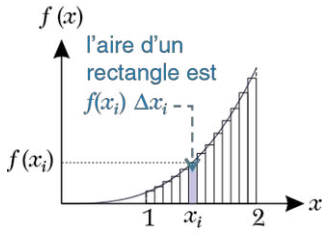


FIGURE 2.19
L'intégrale définie correspond à l'aire sous la courbe.

Dans la plupart des cas en physique, on a besoin de calculer une *intégrale définie*, qui correspond à une somme infinie d'éléments infinitésimaux. C'est le cas lorsqu'on doit calculer l'aire sous une courbe. En effet, pour calculer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)$, entre $x = 1$ et $x = 2$, on doit diviser l'aire en rectangles, de largeur Δx_i, comme le montre la figure 2.19. L'aire du rectangle situé

à la coordonnée x_i est $f(x_i)\,\Delta x_i$. L'aire totale est obtenue en faisant la somme sur tous les rectangles et en prenant la limite $\Delta x_i \to 0$:

$$\text{aire} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i = \int_1^2 f(x)\,dx\,.$$

L'indice inférieur dans le symbole d'intégrale est la borne inférieure (le début de l'intervalle désiré), et l'indice supérieur est la borne supérieure (la fin de l'intervalle désiré).

Si $F(x)$ est la primitive de $f(x)$ [c'est-à-dire que la dérivée de $F(x)$ donne $f(x)$], alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Si, par exemple, $f(x) = x^3$, l'intégrale définie entre $x = 1$ et $x = 2$ (l'aire sous la courbe entre $x = 1$ et $x = 2$) est

$$\text{aire} = \int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}\,.$$

REMARQUE

Il est inutile d'ajouter une constante d'intégration lorsqu'on calcule une intégrale définie, car celle-ci se simplifie de toute façon lorsqu'on remplace les bornes.

EXEMPLE 2.4 La charge d'une tige

Une tige de 10,0 cm est parallèle à l'axe des x et centrée par rapport à l'axe des y. Sa charge linéique est donnée par $\lambda = (4{,}50\ \text{nC/cm}^3)\,x^2$, où x est exprimé en centimètres. Calculez la charge nette de la tige.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 2.20 illustre la tige centrée à l'origine et un élément dq situé à une coordonnée x. La tige est située entre $x = -5{,}0$ cm et 5,0 cm.

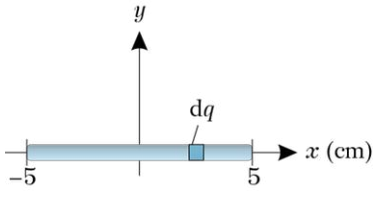


FIGURE 2.20
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.4

Décortiquer le problème

Nous exprimons toutes les distances en centimètres et la charge en nanocoulombs.

Connues	Inconnue
$L = 10{,}0$ cm $\quad \lambda = 4{,}50x^2$	Q

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.14 :

$$Q = \int_{-5{,}00}^{5{,}00} \lambda\,dx = \int_{-5{,}00}^{5{,}00} (4{,}50x^2)\,dx\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

L'intégrale peut être calculée à l'aide de l'équation 2.19, après qu'on a sorti le terme constant :

$$Q = 4{,}50 \int_{-5{,}00}^{5{,}00} x^2\,dx = 4{,}50 \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-5{,}00}^{5{,}00}$$

$$= 4{,}50\ \text{nC/cm}^3 \left[\frac{(5{,}00\ \text{cm})^3}{3} - \frac{(-5{,}00\ \text{cm})^3}{3}\right]$$

$$= 375\ \text{nC}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les unités sont correctes. Le signe de la charge doit être positif, car, selon l'énoncé, λ est une fonction qui est toujours positive.

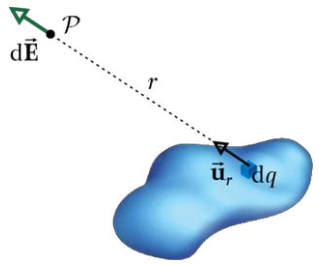


FIGURE 2.21
L'élément infinitésimal dq produit au point $\mathcal{P}$ un champ infinitésimal $d\vec{E}$.

Le champ créé par une distribution continue

On peut maintenant calculer le champ électrique à un point $\mathcal{P}$ près d'une distribution de charge continue. Prenons l'objet chargé de la figure 2.21. On choisit d'abord un élément de charge infinitésimal dq quelconque, qui est équivalent à une charge ponctuelle. Le point $\mathcal{P}$ est situé à une distance r de l'élément de charge. Selon l'équation 2.3, l'élément de charge produit un champ infinitésimal $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r ,$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire orienté de dq vers le point $\mathcal{P}$. Les autres éléments de l'objet produisent aussi des champs électriques. Le champ résultant est obtenu à l'aide du principe de superposition, la somme (en fait, une intégrale) vectorielle de tous les champs :

Champ électrique (distribution continue)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{objet}}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = k\int_{\text{objet}}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r . \qquad (2.21)$$

Pour calculer cette intégrale, on doit exprimer dq en fonction d'une densité de charge. On doit aussi exprimer le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ en fonction des vecteurs unitaires cartésiens ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, et $\vec{k}$), car ce sont des vecteurs dont l'orientation et le module sont constants, ce qui permet de les sortir de l'intégrale. La stratégie suivante donne les différentes étapes pour calculer le champ électrique d'une distribution continue.

STRATÉGIE 2.2 Le champ produit par une distribution continue de charge

Illustrer la situation

Dessinez l'objet dans un système de coordonnées cartésiennes. Indiquez bien le point $\mathcal{P}$ où vous voulez calculer le champ. Sur le schéma, décomposez l'objet en éléments dq pour lesquels vous pouvez calculer le champ électrique $d\vec{E}$. Tracez le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ et le champ $d\vec{E}$.

Décortiquer le problème

- Exprimez l'élément dq en fonction d'une densité de charge :

$$dq = \begin{cases} \lambda\, dx & \text{(ligne)} \\ \sigma\, dA & \text{(surface)} \\ \rho\, dV & \text{(volume)} \end{cases}$$

- Exprimez la distance r et le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ en fonction de la variable d'intégration et des autres paramètres.

Identifier la clé

La clé est l'équation 2.21 :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{objet}}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = k\int_{\text{objet}}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r .$$

Les bornes de l'intégrale correspondent aux limites de l'objet. Pour que le signe soit correct, la borne inférieure doit être la plus petite valeur de la variable d'intégration, et la borne supérieure doit être la plus grande valeur.

Résoudre le problème

- Si le facteur à intégrer est une somme, écrivez l'intégrale comme une somme d'intégrales. Sortez les constantes de l'intégrale, incluant les vecteurs unitaires cartésiens.
- Calculez l'intégrale en utilisant au besoin la table d'intégrales de l'annexe E.
- Remplacez les bornes de l'intégrale.

Valider la réponse

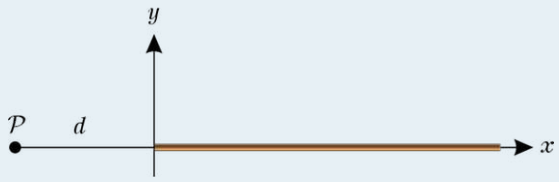
Vérifiez que l'orientation du champ est correcte. Il est aussi possible de vérifier le champ à une grande distance : si $\mathcal{P}$ est très éloigné par rapport aux dimensions de l'objet, celui-ci devient équivalent à une charge ponctuelle, et le champ $\vec{\mathbf{E}} \approx \frac{kQ}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$.

REMARQUE

Il est aussi possible de calculer le champ à l'aide d'une méthode scalaire, dans laquelle on calcule le module et les composantes du champ $d\vec{\mathbf{E}}$. Cette méthode est plus complexe à utiliser dans le cas des distributions continues, car elle fait intervenir des fonctions trigonométriques qu'il faut ensuite exprimer en fonction de la variable d'intégration.

EXEMPLE 2.5 À gauche d'un fil

Un fil de 0,200 m est uniformément chargé. Sa charge linéique est $\lambda = -2{,}60\ \mu C/m$. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ illustré ci-dessous, situé à une distance $d = 0{,}100$ m du fil.



SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 2.22. L'élément de charge dq est situé à la position x, et sa largeur est dx. Le vecteur unitaire est orienté de l'élément dq vers le point $\mathcal{P}$. Le champ électrique $d\vec{\mathbf{E}}$ est orienté vers la tige, car celle-ci a une charge négative.

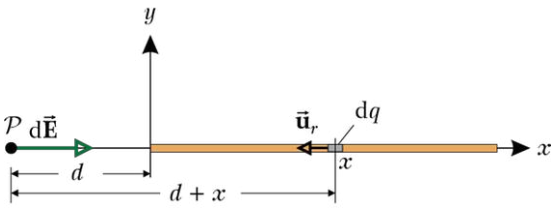


FIGURE 2.22
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.5

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L = 0{,}200$ m	$\vec{\mathbf{E}}$
$\lambda = -2{,}60 \times 10^{-6}$ C/m	
$d = 0{,}100$ m	

Ici, $dq = \lambda\, dx$. Comme le montre le schéma, $\vec{\mathbf{u}}_r = -\vec{\imath}$ et $r = d + x$. Le fil se situe entre $x = 0$ et $x = L$.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.21 :

$$\vec{\mathbf{E}} = k \int_{\text{fil}} \frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = k \int_0^L \frac{\lambda\, dx}{(d+x)^2}(-\vec{\imath})\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

L'intégrale est calculée à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E. Nous obtenons

$$\vec{\mathbf{E}} = (-k\lambda\vec{\imath}) \int_0^L \frac{dx}{(d+x)^2}$$

$$= -k\lambda\vec{\imath}\left[\frac{-1}{d+x}\right]\Bigg|_0^L$$

$$= -k\lambda\vec{\imath}\left[\frac{-1}{d+L} + \frac{1}{d}\right] = -\frac{k\lambda L}{d\,(d+L)}\vec{\imath}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Il ne reste qu'à remplacer les valeurs numériques :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{8{,}99 \times 10^9\,(-2{,}60 \times 10^{-6})\,0{,}200}{0{,}100\,(0{,}200 + 0{,}100)}\vec{\imath}$$

$$= 1{,}56 \times 10^5\ \text{N/C}\,\vec{\imath}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse est bien un vecteur orienté vers la droite, comme le montre le schéma. Il est aussi intéressant de vérifier l'équation (ii) si $d \gg L$. Dans ce cas,

$$E \approx \frac{k\lambda L}{d^2} = \frac{kQ}{d^2}\,, \qquad (d \gg L)$$

ce qui correspond bien au module du champ pour une charge ponctuelle, car le fil devient équivalent à une charge ponctuelle.

EXEMPLE 2.6 Le champ au-dessus d'une tige

Une tige horizontale a une charge Q uniformément distribuée sur sa longueur L. Calculez le champ électrique à une distance y au-dessus de la tige, vis-à-vis du centre de celle-ci.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 2.23 illustre la tige et le point $\mathcal{P}$. Le système de coordonnées est choisi pour que la tige soit parallèle à l'axe des x et centrée par rapport à l'axe des y. Nous considérons un élément dq à la position $x > 0$ à droite de l'origine et traçons le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ et le champ $d\vec{\mathbf{E}}$ au point $\mathcal{P}$.

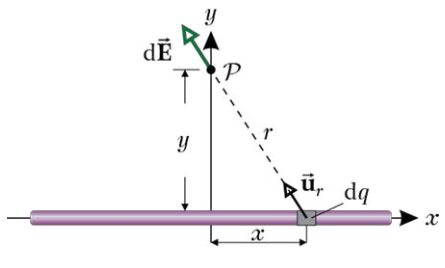


FIGURE 2.23
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.6

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
Q, L, y	$\vec{\mathbf{E}}$

L'élément dq a une largeur dx. La charge est uniformément distribuée, alors $\lambda = Q/L$ est une constante :

$$dq = \lambda\, dx = \frac{Q}{L}\, dx\,. \qquad \text{(i)}$$

Pour calculer le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$, nous traçons ses composantes cartésiennes à la figure 2.24.

$$\vec{\mathbf{r}} = -x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \frac{-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

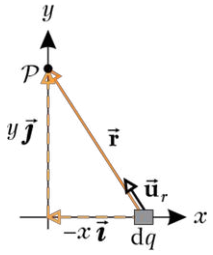


FIGURE 2.24
Les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{r}}$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.21 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{tige}} \frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda\, dx}{x^2+y^2}\left(\frac{-x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Les bornes sont choisies à l'aide du schéma : x varie de $-L/2$ à $L/2$. Dans l'équation (ii), il est important de voir que y n'est pas une variable : c'est la distance entre le point $\mathcal{P}$ et le centre de la tige.

Résoudre le problème

Pour résoudre l'intégrale, nous l'écrivons comme la somme de deux intégrales et nous sortons les constantes :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[-\vec{\imath}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x\, dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + y\vec{\jmath}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]. \quad \text{(ii)}$$

Ces intégrales se trouvent dans la table d'intégrales de l'annexe E. Nous obtenons pour la première intégrale :

$$-\vec{\imath}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x\, dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\vec{\imath}}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\vec{\imath}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}} - \frac{\vec{\imath}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}} = 0\vec{\imath}\,. \quad \text{(iii)}$$

De même, pour la deuxième intégrale,

$$y\vec{\jmath}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = y\vec{\jmath}\left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\vec{\jmath}\left(\frac{L}{2}\right)}{y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}} - \frac{\vec{\jmath}\left(\frac{-L}{2}\right)}{y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}} = \frac{L\vec{\jmath}}{y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}. \quad \text{(iv)}$$

En insérant les résultats des équations (iii) et (iv) dans l'équation (ii), nous obtenons

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}\vec{\jmath}\,.$$

Cette réponse n'est pas la réponse finale, car elle est écrite en fonction de paramètres intermédiaires (λ et $\vec{\jmath}$), qui ne sont pas dans l'énoncé du problème. Nous devons remplacer λ par Q/L et $\vec{\jmath}$ par vers le haut :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y\sqrt{y^2+L^2/4}}\,\overrightarrow{\text{vers le haut}}\,. \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse est bien un vecteur. Nous remarquons que la composante x du champ est nulle : la partie gauche et la partie droite de la tige produisent des composantes horizontales opposées qui ont le même module. Pour les points qui ne sont pas vis-à-vis du centre de la tige, le champ a une composante x et une composante y non nulle.

La relation trouvée est valable pour tous les points situés au-dessus de la tige. Elle l'est aussi pour les points en dessous de la tige, avec $y < 0$. Nous vérifions que pour $y \gg L$, le module du champ est

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \qquad (y \gg L)\,,$$

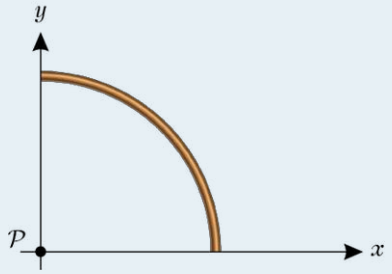
car, dans ce cas, la tige se comporte comme une charge ponctuelle. Il est aussi intéressant de prendre la limite $y \ll L$:

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y(L/2)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \qquad (y \ll L)\,.$$

Ceci représente le module du champ dans la limite d'une tige infinie. Nous verrons au chapitre 3 une autre méthode pour calculer le champ électrique produit par une tige infinie.

EXEMPLE 2.7 Le champ d'un quart de cercle

On courbe une tige pour former un quart de cercle de rayon R. La tige a une charge Q uniformément distribuée. Quel est le champ électrique au point $\mathcal{P}$ illustré ci-dessous ?



SOLUTION

Nous traçons le schéma de la situation à la figure 2.25. L'élément dq est un élément de l'arc de cercle. Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ est orienté vers l'origine.

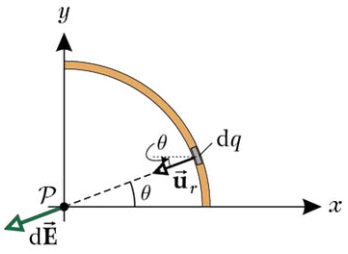


FIGURE 2.25
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.7

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
Q, R	$\vec{\mathbf{E}}$

On a $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}s$, où d$s$ est la longueur de l'arc de cercle de l'élément dq. Cette longueur peut être exprimée en fonction du rayon de l'arc. En effet, la longueur d'un arc de cercle est $s = R\theta$, où θ est l'angle exprimé en radians. Alors $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$, où d$\theta$ est l'angle infinitésimal de l'élément de l'arc de cercle. Donc,

$$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}s = \lambda R\,\mathrm{d}\theta$$
$$r = R$$
$$\vec{\mathbf{u}}_r = -(1)\cos\theta\,\vec{\imath} - (1)\sin\theta\,\vec{\jmath}\,;$$

l'angle θ est illustré sur le schéma. Cet angle varie de 0 à $\pi/2$ rad. Remarquez que nous avons calculé les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{u}}_r$ en utilisant la trigonométrie, car son orientation est connue et son module est égal à 1.

Identifier la clé

La clé est l'équation 2.21 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{tige}} \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\,\vec{\mathbf{u}}_r$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda R\,\mathrm{d}\theta}{R^2}(-\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous réécrivons l'intégrale comme la somme de deux intégrales :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left[-\vec{\imath}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\;\mathrm{d}\theta - \vec{\jmath}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\;\mathrm{d}\theta\right]. \qquad \text{(ii)}$$

Les intégrales sont données à l'annexe E.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left[-\vec{\imath}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} + \vec{\jmath}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right]$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left[-\vec{\imath}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right) + \vec{\jmath}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\right)\right]$$
$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})\,.$$

Il faut aussi remplacer la charge linéique par la charge divisée par la longueur de l'arc. Pour un quart de cercle, on a $L = R\pi/2$ et $\lambda = 2Q/(\pi R)$. Nous obtenons alors

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{-Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous obtenons bien un vecteur. Le champ a des composantes x et y négatives, comme il est indiqué sur le schéma. Le champ est orienté selon un angle de 45°, ce qui correspond à l'axe de symétrie de l'arc de cercle. Nous avons supposé que $Q > 0$, mais la réponse finale est aussi valide pour $Q < 0$.

2.5 Le champ produit par les anneaux, les disques et les plans

À partir de la méthode expliquée à la section précédente, calculons le champ électrique créé par trois distributions importantes : un anneau, un disque et un plan infini.

Le champ produit par un anneau

On veut obtenir le champ à un point $\mathcal{P}$ situé à la position z sur l'axe d'un anneau, comme le montre la figure 2.26. L'anneau a un rayon R et une charge Q uniformément distribuée. Prenons d'abord un élément de charge dq situé sur l'axe des y, à gauche de l'origine. Selon la figure 2.27,

$$\vec{\mathbf{r}} = R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$r = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{R^2 + z^2}$$
$$\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \frac{R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

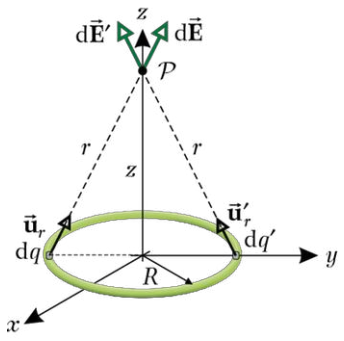


FIGURE 2.26
Le calcul du champ au point $\mathcal{P}$ produit par un anneau uniformément chargé

Le champ $d\vec{\mathbf{E}}$ produit par cet élément est

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)}\left[\frac{R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\right].$$

REMARQUE

Dans la figure 2.26, on a supposé que dq est positif pour pouvoir tracer le champ $d\vec{\mathbf{E}}$. Cependant, la démonstration est valable quel que soit le signe de la charge.

Prenons ensuite l'élément dq' situé de l'autre côté de l'anneau, sur l'axe des y. Cet élément est situé à la même distance r que l'élément dq, mais il produit un champ électrique $d\vec{\mathbf{E}}'$ n'ayant pas la même orientation que le champ $d\vec{\mathbf{E}}$ (*voir la figure 2.26*). On veut maintenant calculer le vecteur unitaire $\mathbf{u}'_r$. La figure 2.27 montre la décomposition du vecteur $\vec{\mathbf{r}}'$ selon ses composantes :

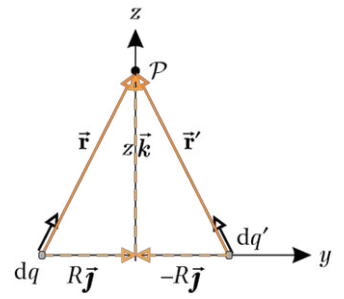


FIGURE 2.27
La décomposition de $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{r}}'$ selon leurs composantes cartésiennes

$$\vec{\mathbf{r}}' = -R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$r' = r = \sqrt{R^2 + z^2}$$
$$\vec{\mathbf{u}}'_r = \frac{\vec{\mathbf{r}}'}{r} = \frac{-R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$
$$d\vec{\mathbf{E}}' = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}'_r = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-R\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\right].$$

Lorsqu'on additionne les champs $d\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{E}}'$, les composantes y s'annulent et ne laissent qu'un champ orienté dans la direction de l'axe des z (perpendiculaire au plan de l'anneau). Les éléments de charge qui ont été choisis sont des éléments particuliers. Pour les autres éléments de charge, le champ infinitésimal produit a une composante parallèle au plan de l'anneau et une composante perpendiculaire. Pour chaque élément de charge, il y a un élément de charge opposé sur l'anneau, situé à la même distance du point $\mathcal{P}$, de telle sorte que les composantes parallèles au plan de l'anneau vont s'annuler, laissant

uniquement une composante z. Donc, le champ résultant est obtenu en intégrant la composante z :

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_{\text{anneau}} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\,\vec{\boldsymbol{k}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Dans cette intégrale, tous les paramètres sont des constantes : le rayon R de l'anneau, la distance z entre le point $\mathcal{P}$ et le centre de l'anneau et le vecteur $\vec{\boldsymbol{k}}$. On peut sortir toutes les constantes de l'intégrale :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{z\,\vec{\boldsymbol{k}}}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\text{anneau}} \mathrm{d}q$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{\boldsymbol{k}}, \tag{2.22}$$

où $\int \mathrm{d}q$ donne simplement la charge Q de l'anneau.

Si la charge Q est positive, le champ est orienté vers le haut pour un point $\mathcal{P}$ au-dessus de l'anneau (avec $z > 0$) et vers le bas pour un point au-dessous de l'anneau (avec $z < 0$). Si la charge Q est négative, l'équation 2.22 demeure valide : le champ électrique est orienté vers l'anneau.

Il est intéressant de regarder deux cas limites. Au centre de l'anneau, $z = 0$, et le champ de l'anneau est nul. Chaque élément de charge $\mathrm{d}q$ produit un champ électrique horizontal qui est annulé par un élément $\mathrm{d}q'$ opposé. L'autre cas limite est $z \gg R$, un point très éloigné de l'anneau. Le champ est alors donné par

$$E \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2},$$

ce qui correspond au module du champ produit par une charge ponctuelle. En effet, si le point $\mathcal{P}$ est très loin de l'anneau, la forme de l'anneau n'a plus d'importance.

La figure 2.28 montre l'orientation du champ à différents points sur l'axe de l'anneau, et la figure 2.29 représente le module du champ en fonction de la distance z sur l'axe. Remarquez que le module du champ atteint une valeur maximale pour une distance z inférieure au rayon de l'anneau.

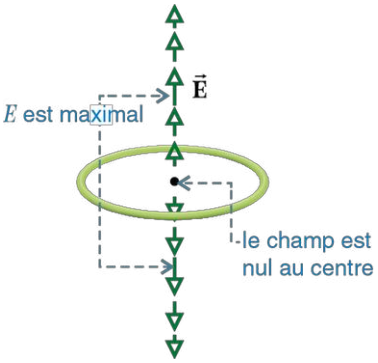


FIGURE 2.28
Le champ le long de l'axe d'un anneau chargé positivement

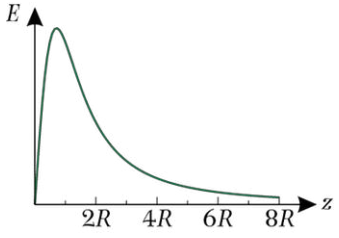


FIGURE 2.29
Le module du champ sur l'axe d'un anneau en fonction de la distance

On a calculé le champ électrique pour des points sur l'axe de l'anneau. Il y a aussi un champ pour les points qui ne sont pas sur l'axe. Par contre, il est beaucoup plus difficile de calculer le champ pour ces points car il n'y a pas de symétrie pour simplifier le calcul. Nous reviendrons sur le concept de symétrie au chapitre 3.

Le champ produit par un disque

On veut maintenant obtenir le champ créé par un disque, de rayon R, ayant une charge Q uniformément distribuée sur sa surface. Encore une fois, on se limite aux points sur l'axe du disque. Comme la charge est uniformément distribuée, la charge surfacique est

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} .$$

Jusqu'à présent, on a divisé les distributions continues de charge en éléments de charge $\mathrm{d}q$ ponctuels. Cette fois-ci, on utilise des éléments de charge infinitésimaux en forme d'anneau ayant un rayon r et une épaisseur $\mathrm{d}r$, comme le montre

la figure 2.30. On emploie cette méthode, car on a déjà calculé le champ d'un anneau. La charge sur l'anneau est

$$dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi r\, dr, \tag{2.23}$$

car l'aire d'un anneau correspond à sa circonférence multipliée par son épaisseur. L'anneau produit donc un champ $d\vec{\mathbf{E}}$ au point $\mathcal{P}$, qu'on calcule à l'aide de l'équation 2.22, en remplaçant R par r et Q par dq, obtenue à l'aide de l'équation 2.23 :

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{(\sigma 2\pi r\, dr)\, z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}\,.$$

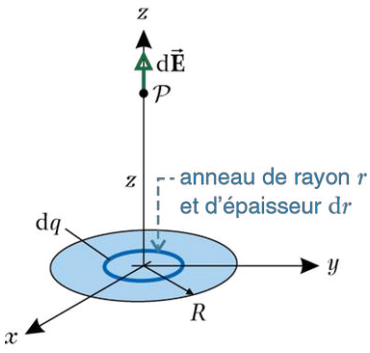


FIGURE 2.30
Le calcul du champ sur l'axe d'un disque

Pour obtenir le champ résultant du disque, on additionne vectoriellement les champs créés par tous les anneaux infinitésimaux, dont le rayon varie de $r = 0$ jusqu'à $r = R$. Il faut donc calculer l'intégrale :

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi z \vec{k} r\, dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r\, dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

où on a sorti les constantes de l'intégrale. L'intégrale est donnée à l'annexe E. On obtient

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]\Bigg|_0^R = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{|z|} \right]$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k} \quad \text{(sur l'axe d'un disque)}\,. \tag{2.24}$$

La valeur absolue du premier terme est nécessaire afin que l'équation donne le bon champ électrique, y compris l'orientation, pour des points sous le disque, avec $z < 0$. Il est possible de vérifier que pour un disque chargé positivement (avec $\sigma > 0$), le champ est orienté dans le sens de $\vec{k}$ pour des points au-dessus du disque ($z > 0$), et il est orienté dans le sens de $-\vec{k}$ pour des points sous le disque ($z < 0$). La figure 2.31 illustre le champ sur l'axe d'un disque.

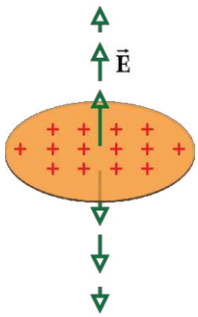


FIGURE 2.31
Le champ électrique sur l'axe d'un disque uniformément chargé

REMARQUE

Il faut se rappeler que $\sqrt{z^2}$ donne une valeur positive. Donc, si $z < 0, \sqrt{z^2} = -z$. C'est pour cette raison qu'on a écrit $\sqrt{z^2} = |z|$, ce qui englobe toutes les possibilités.

Comme d'habitude, c'est une bonne idée de vérifier si le champ tend vers celui d'une charge ponctuelle pour des points éloignés. Supposons que le point $\mathcal{P}$ est au-dessus du disque, avec $z > 0$ et $z \gg R$. Alors $\sqrt{R^2 + z^2} \approx z$, et on obtient, pour le module du champ,

$$E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{z} \right] = 0\,.$$

L'approximation est trop brutale. On a négligé des termes qui semblent petits mais ne sont pas négligeables par rapport à zéro. Il faut retourner à l'équation 2.24 :

$$E = \frac{Q/(2\pi R^2)}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right]. \tag{2.25}$$

Le deuxième terme entre crochets est de la forme $(1 + x)^n$, avec $x = R^2/z^2$ et $n = -1/2$. Lorsque $x \ll 1$, on peut utiliser l'approximation du binôme (donnée à l'annexe E) :

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad \text{lorsque } x \ll 1 \,. \tag{2.26}$$

On obtient alors une approximation pour le terme entre crochets :

$$1 - (1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right) = \frac{R^2}{2z^2} \,.$$

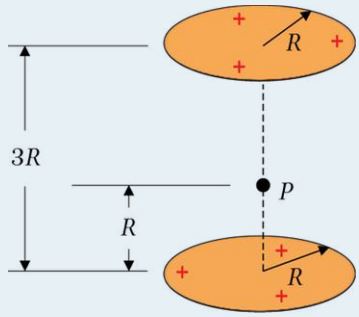
En insérant ce résultat dans l'équation 2.25, on obtient

$$E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{R^2}{2z^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \,,$$

ce qui est bien le module du champ produit pour une charge ponctuelle.

EXEMPLE 2.8 Le résultat de deux disques

Deux disques identiques de rayon R sont séparés par une distance de $3R$, comme le montre la figure ci-contre. Si chaque disque a une charge $Q = 120$ nC répartie uniformément, et que $R = 6{,}00$ cm, calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ situé à une distance R du disque inférieur.



SOLUTION

Illustrer la situation

Nous ajoutons, dans le schéma de la situation illustré à la figure 2.32, un système de coordonnées cartésiennes avec l'origine située au centre du disque du dessous, et l'axe des z orienté vers le haut. Le disque inférieur produit un champ $\vec{\mathbf{E}}_1$ orienté vers le haut, et le disque supérieur, un champ $\vec{\mathbf{E}}_2$ orienté vers le bas.

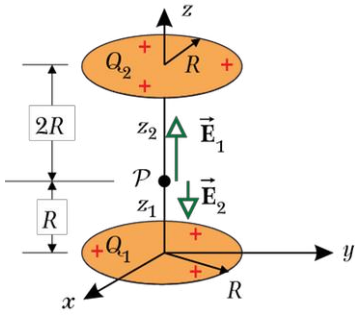


FIGURE 2.32
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.8

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$Q_1 = Q_2 = Q = 120$ nC	$\vec{\mathbf{E}}$
$R_1 = R_2 = R = 0{,}0600$ m	
$z_1 = R = 0{,}0600$ m	
$z_2 = -2R = -0{,}120$ m	

Le point $\mathcal{P}$ est sous le disque du haut ; pour cette raison, $z_2 < 0$. La charge surfacique sur chaque disque est

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{120 \times 10^{-9}\ \text{C}}{\pi\,(0{,}0600\ \text{m})^2}$$
$$= 1{,}061 \times 10^{-5}\ \text{C/m}^2 \,. \tag{i}$$

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 2.24 donnant le champ sur l'axe d'un disque, car le point $\mathcal{P}$ est sur l'axe de chaque disque :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{\boldsymbol{k}} \,. \tag{ii}$$

La deuxième **clé** est le principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs algébriques ($z_1 = R$ et $z_2 = -2R$) pour obtenir les champs $\vec{\mathbf{E}}_1$ et $\vec{\mathbf{E}}_2$:

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{R}{|R|} - \frac{R}{\sqrt{R^2+R^2}}\right]\vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{-2R}{|-2R|} - \frac{(-2R)}{\sqrt{R^2+(-2R)^2}}\right]\vec{k}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right]\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right]\vec{k}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\vec{k}\,.$$

Il ne reste qu'à remplacer la valeur numérique de la charge surfacique :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1{,}061\times10^{-5}\ \text{C/m}^2}{2\times8{,}854\times10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)}\left[\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\vec{k}$$

$$= 1{,}12\times10^{5}\ \text{N/C}\ \vec{k}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse est un vecteur. Le champ résultant doit être orienté dans le sens de $\vec{k}$, car le point $\mathcal{P}$ est plus près du disque inférieur, et les deux disques sont identiques. Donc, le champ $\vec{\mathbf{E}}_1$ doit avoir un module plus grand que le champ $\vec{\mathbf{E}}_2$. Il est intéressant de constater qu'étant donné que la distance entre $\mathcal{P}$ et chaque disque est un multiple du rayon des disques, le champ final dépend uniquement de la charge surfacique.

Le champ produit par un plan isolant infini

Il est possible d'obtenir le champ créé par un plan uniformément chargé, pour des points très près du plan, de telle sorte que le plan est pratiquement infini. La figure 2.33 montre un plan, qui correspond au plan des xy, dont la charge surfacique σ est uniforme. On trouve le champ à un point $\mathcal{P}$ en prenant la limite d'un disque de rayon R avec $R \to \infty$. Selon l'équation 2.24,

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{R\to\infty}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\,\vec{k}\,.$$

Le terme $z/|z|\vec{k}$ donne un vecteur orienté vers le haut pour les points au-dessus du plan et un vecteur orienté vers le bas pour les points en dessous du plan. De plus, le module de ce vecteur est égal à 1. On définit donc $\vec{\mathbf{u}}_n$ le *vecteur unitaire normal* au plan :

$$\vec{\mathbf{u}}_n = \frac{z}{|z|}\vec{k} = \overrightarrow{\text{perpendiculaire au plan}}. \qquad (2.27)$$

Avec cette définition, le champ produit par un plan infini uniformément chargé est donné par :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n \qquad \text{(plan infini uniformément chargé)}\,. \qquad (2.28)$$

Ce résultat est très intéressant : pour un point très près d'un plan uniformément chargé, le champ devient uniforme, c'est-à-dire qu'il ne change pas d'un point à

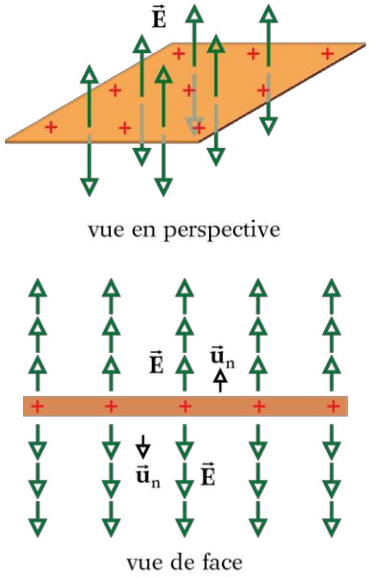


FIGURE 2.33
Le champ produit par un plan infini

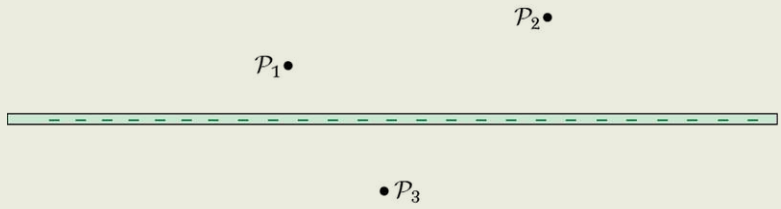
l'autre. La figure 2.33 illustre le champ électrique d'un plan infini. Évidemment, il n'est pas possible d'avoir un plan infini dans la réalité. Par contre, l'équation 2.28 est une bonne approximation pour les points près du centre d'un plan uniformément chargé dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que la distance z.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.3

La figure suivante présente un plan infini dont la charge négative est uniformément distribuée.

a. Tracez le champ électrique pour les points illustrés.

b. Pour quel point le module du champ est-il plus grand ?



Le champ produit par deux plaques parallèles

La figure 2.34 montre deux grandes plaques identiques parallèles, séparées par une distance d beaucoup plus petite que la grandeur des plaques. On place une charge $+Q$ sur la plaque inférieure et une charge $-Q$ sur la plaque supérieure. On fait l'approximation que les plaques sont infinies.

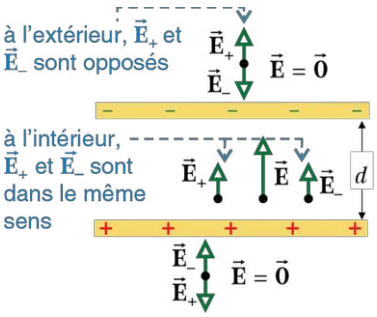


FIGURE 2.34
Le calcul du champ produit par deux grandes plaques parallèles

La plaque positive produit un champ $\vec{\mathbf{E}}_+$ orienté à l'opposé de cette plaque. La plaque négative produit un champ $\vec{\mathbf{E}}_-$, orienté vers cette plaque. La figure 2.34 illustre les champs dans les trois régions. Dans la partie supérieure et la partie inférieure, les deux champs sont opposés. Dans la partie centrale, les deux champs ont la même orientation. Dans l'approximation des plans infinis, le module du champ produit par chaque plaque est uniforme ($E = \sigma/[2\epsilon_0]$). On obtient alors

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{du positif vers le négatif}} & \text{(entre les plaques)} \\ \vec{\mathbf{0}} & \text{(à l'extérieur des plaques)}. \end{cases} \tag{2.29}$$

MISE EN GARDE

Le champ $\vec{\mathbf{E}}_+$ existe de chaque côté de la plaque positive, sans s'arrêter à la plaque négative. La plaque négative n'arrête pas le champ $\vec{\mathbf{E}}_+$. De même, le champ $\vec{\mathbf{E}}_-$ ne s'arrête pas à la plaque positive.

La figure 2.35a montre le champ résultant lorsqu'on suppose que les plaques sont infinies : le champ existe uniquement entre les plaques et il est uniforme, c'est-à-dire qu'il ne varie pas d'un point à un autre. Il s'agit d'une très bonne approximation lorsque la distance d entre les plaques est beaucoup plus faible que les dimensions des plaques. Remarquez aussi que dans ce cas, la forme exacte des plaques n'est pas importante. La figure 2.35b illustre le champ réel. Entre les plaques, le champ est en grande partie uniforme, sauf sur les bords de celles-ci, où le champ varie légèrement. De plus, il y a un champ très faible, mais non nul à l'extérieur.

Dans la pratique, la configuration des plaques parallèles est très importante pour produire un champ électrique uniforme. Nous verrons à la section 2.7 le mouvement de particules chargées dans un champ électrique uniforme. Il faudra se rappeler que ce champ est produit par deux plaques parallèles, ayant des charges opposées, avec des dimensions beaucoup plus grandes que la distance entre elles.

Défi animé 2.2
Le champ électrique à l'intérieur d'un système de deux plaques parallèles chargées de signes opposés est-il vraiment uniforme ?

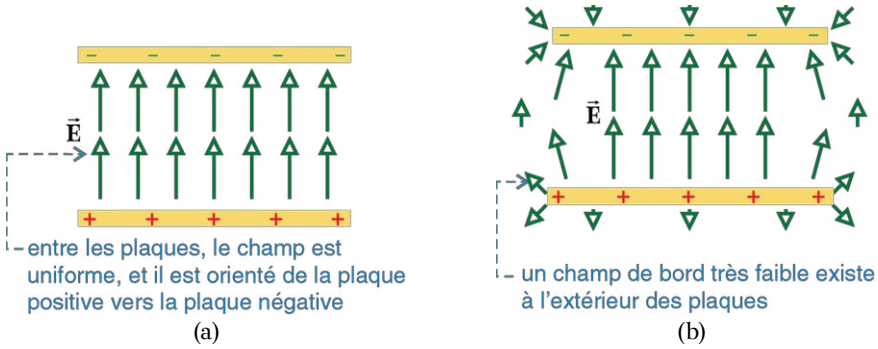


FIGURE 2.35
(a) Le champ produit par des plaques parallèles infinies. (b) Le champ électrique produit par des plaques réelles.

EXEMPLE 2.9 Un accélérateur d'électrons

Pour accélérer des électrons, on veut produire un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -4{,}50 \times 10^5 \text{ N/C}\,\vec{j}$ en utilisant deux plaques parallèles carrées, de 8,00 cm de côté et séparées par une distance de 350 µm.

a. Comment doit-on placer les plaques ?
b. Quelle est la polarité de chaque plaque ?
c. Calculez la charge sur chaque plaque.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème
Nous avons des plaques dont les côtés $\ell = 80{,}0$ mm sont beaucoup plus grands que la distance entre les plaques ($d = 0{,}350$ mm $= 0{,}004\,3\ell$). Nous pouvons donc les considérer comme infinies.

Identifier la clé
La **clé** est que le champ est perpendiculaire aux plaques. Donc, pour que le champ soit parallèle à l'axe des y :

Les plaques doivent être parallèles au plan des xz. (réponse)

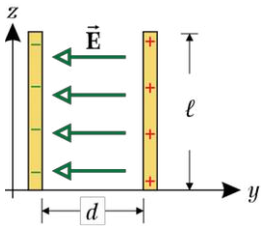


FIGURE 2.36
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.9

SOLUTION b.

Illustrer la situation
La figure 2.36 montre une vue de face (avec l'axe des x sortant de la page) des plaques. Le champ est orienté dans le sens opposé de l'axe des y.

Identifier la clé
La **clé** est que le champ doit être orienté de la plaque positive vers la plaque négative. Donc :

La plaque de gauche est négative. (réponse)
La plaque de droite est positive. (réponse)

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\vec{\mathbf{E}} = -4{,}50\times10^{5}\ \text{N/C}\,\vec{\jmath}$	Q_-
$\ell = 0{,}0800\ \text{m}$	Q_+
$d = 350\times10^{-6}\ \text{m}$	

Identifier la clé

La clé est l'équation 2.29. Le module du champ est

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad \text{(i)}$$

avec $\sigma = Q/A = Q/\ell^2$. Le module du champ est donc

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous pouvons isoler Q dans l'équation (ii) :

$$\begin{aligned} Q &= E\epsilon_0\ell^2 \\ &= (4{,}50\times10^{5}\ \text{N/C})\left[8{,}854\times10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)\right] \\ &\quad\times(0{,}0800\ \text{m})^2 \\ &= 2{,}55\times10^{-8}\ \text{C}. \end{aligned}$$

Ceci représente la charge sur la plaque positive, alors que la charge de la plaque négative est l'opposé de cette charge.

$Q_+ = 25{,}5\ \text{nC}$ (plaque de droite). (réponse)

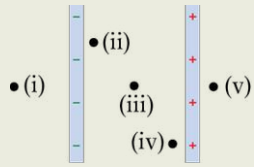
$Q_- = -25{,}5\ \text{nC}$ (plaque de gauche). (réponse)

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.4

La figure suivante présente deux plaques infinies ayant des charges surfaciques uniformes et opposées. Classez les différents points illustrés par ordre décroissant selon le module du champ électrique à ces positions.

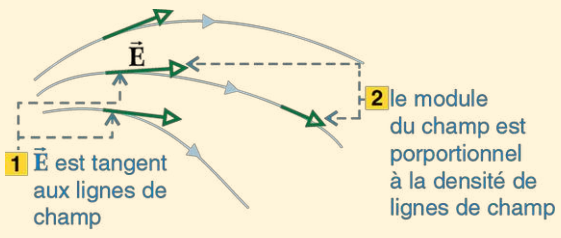


2.6 Les lignes de champ

Bien que le champ électrique soit imperceptible, il est quand même réel. Afin de le visualiser, on a tracé pour certains points le vecteur champ pour ces positions. La méthode des lignes de champ est une autre méthode qui permet de visualiser le champ électrique présent. On trace les lignes de champ à l'aide de la technique suivante :

TECHNIQUE 2.1 Les lignes de champ électrique

1. Le champ électrique est tangent aux lignes de champ.
2. Le module du champ est proportionnel à la densité de lignes de champ : plus les lignes de champ sont rapprochées, plus le module du champ est grand.



La figure 2.37 illustre les lignes de champ pour une charge ponctuelle positive et pour une charge ponctuelle négative. Les lignes de champ sont radiales. De plus, pour les points éloignés, la densité de lignes est plus faible que pour les points rapprochés, ce qui illustre le fait que le champ diminue avec la distance.

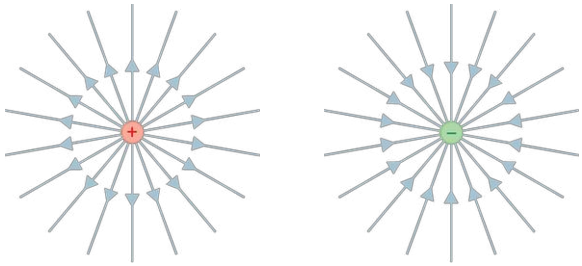


FIGURE 2.37
Les lignes de champ (a) pour une charge ponctuelle positive et (b) pour une charge ponctuelle négative.

Lorsque plusieurs charges sont présentes, les lignes de champ sont tracées en respectant les propriétés suivantes.

- Les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives (il peut y avoir des lignes à l'infini).
- Le nombre de lignes de champ qui sont issues d'un objet ou qui se terminent sur un objet est proportionnel à la charge de l'objet.
- Les lignes de champ ne se croisent pas.

La première propriété découle du fait que le champ électrique est produit par les charges. La deuxième propriété est le résultat de l'étape **2** de la technique. Finalement, la troisième propriété assure que le champ a une orientation unique en tout point.

Dans la figure 2.38, on peut voir les lignes de champ d'un dipôle centré à l'origine, avec le moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ (un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive) orienté dans le même sens que l'axe des z. Les lignes de champ montrent que le champ électrique est opposé au moment dipolaire pour les points situés sur l'axe des y (la bissectrice du dipôle) et qu'il est dans le même sens que $\vec{\mathbf{p}}$ pour les points situés sur l'axe des z, à l'exception des points qui se trouvent entre les deux charges. Nous avons obtenu ces résultats à la section 2.3.

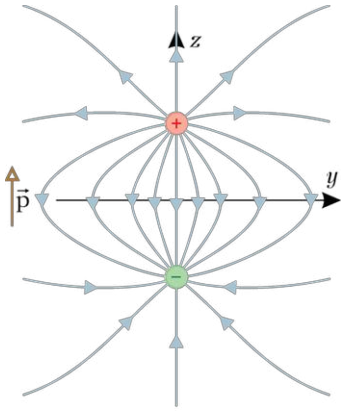


FIGURE 2.38
Les lignes de champ électrique d'un dipôle

L'exemple du dipôle met en évidence un défaut dans les schémas de lignes de champ : on ne peut pas construire le schéma de la figure 2.38 à partir des schémas des lignes de champ des charges ponctuelles de la figure 2.37. Le principe de superposition est caché dans ces figures. Par contre, un schéma de lignes de champ donne une image plus globale qu'un diagramme où on ne trace que quelques champs électriques. Il est aussi possible de représenter le champ de distribution continue à l'aide d'un schéma de lignes de champ. La figure 2.39 illustre les lignes de champ pour deux grandes plaques parallèles ayant des charges surfaciques opposées, la configuration illustrée à la figure 2.35b.

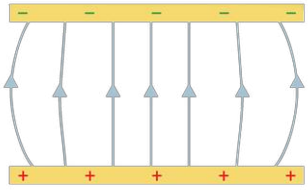


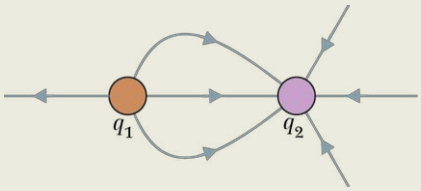
FIGURE 2.39
Les lignes de champ pour deux grandes plaques parallèles

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.5

La figure ci-dessous montre les lignes de champ de deux charges différentes.

a. Quel est le signe de chaque charge ?

b. Quel est le rapport $|q_1|/|q_2|$?



2.7 Le mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électrique

Au début du chapitre, on a expliqué la méthode pour calculer la force électrique exercée par un ensemble de charges électriques sur une autre charge. La première étape consiste à calculer le champ électrique produit par l'ensemble des charges. C'est ce qui a été fait dans les dernières sections. Voyons maintenant la façon de calculer la force exercée sur une charge supplémentaire placée dans le champ.

La figure 2.40 montre une région où il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, créé par des charges qui ne sont pas illustrées. Une charge q se trouve dans cette région.

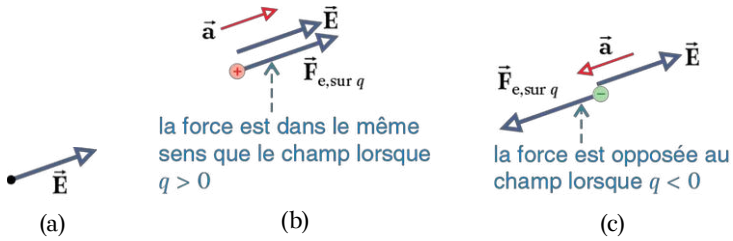


FIGURE 2.40

(a) Un champ électrique est présent à la position du point. (b) Une charge positive subit une force dans le même sens que le champ. (c) Une charge négative subit une force opposée au champ.

La charge peut être immobile ou en mouvement. Selon l'équation 2.2, la force électrique exercée sur la charge est

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{e,sur } q} = q\vec{\mathbf{E}} \,.$$

Dans beaucoup de situations, la force gravitationnelle est négligeable, et il n'y a pas d'autre force exercée sur la charge. La force électrique est alors la force résultante. Selon la deuxième loi de Newton,

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = q\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}} \,.$$

On obtient donc l'accélération de la charge :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q}{m}\vec{\mathbf{E}} \,. \qquad (2.30)$$

L'accélération dépend de la charge, de la masse et du champ électrique.

L'accélération a **le même sens que $\vec{E}$** lorsque la charge est positive, et l'accélération est **de sens opposé à $\vec{E}$** dans le cas d'une charge négative.

À partir de l'accélération, la cinématique peut être utilisée pour obtenir le mouvement de la particule chargée. Comme on l'a expliqué dans le tome 1, l'accélération produit un changement de vitesse :

- Le module de la vitesse augmente si $\vec{a}$ a le même sens que $\vec{v}$.
- Le module de la vitesse diminue si $\vec{a}$ est opposé à $\vec{v}$.
- L'orientation de la vitesse change si $\vec{a}$ a une composante perpendiculaire à $\vec{v}$.

Une particule chargée dans un champ uniforme

Lorsqu'une charge se déplace dans un champ uniforme, son accélération ne change pas. Dans ce cas, il est possible d'utiliser les méthodes expliquées aux chapitres 3 et 4 du tome 1. En particulier, si l'accélération et la vitesse sont parallèles, alors le mouvement est un mouvement rectiligne. Si l'accélération et la vitesse ne sont pas parallèles, alors le mouvement est semblable à celui d'un projectile, avec une trajectoire parabolique. En plaçant l'axe des y parallèlement au champ électrique, il est possible d'utiliser une stratégie semblable à la stratégie 4.1 du tome 1, utilisée pour l'étude du projectile.

STRATÉGIE 2.3 Une charge dans un champ uniforme

Illustrer la situation

Vous devez dessiner un schéma de la situation en traçant l'objet avec les points importants de sa trajectoire. Numérotez ces points de façon séquentielle. Tracez un système de coordonnées cartésiennes avec l'axe des y orienté dans la même direction que le champ électrique, et en situant clairement l'origine.

Décortiquer le problème

Faites un tableau dans lequel vous indiquez les données connues et inconnues. Séparez le tableau selon les composantes x et y. Calculez les composantes de la vitesse initiale et de l'accélération à l'aide des équations suivantes :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \tag{2.31}$$

$$a_x = 0 \qquad a_y = \frac{q}{m} E_y \,. \tag{2.32}$$

Identifier la clé

La clé est l'une des équations de la cinématique en deux dimensions :

composante x	composante y	
$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} + a_y t$	(2.33)
$x = x_0 + v_{0x} t$	$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$	(2.34)
	$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_y (y - y_0)$	(2.35)
	$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y} + v_y}{2} \right) t \,.$	(2.36)

Lorsque le temps n'est pas important dans le problème, l'équation de la trajectoire peut être utilisée :

$$y = y_0 + \tan\theta_0 (x - x_0) + \frac{a_y (x - x_0)^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}. \qquad (2.37)$$

Résoudre le problème
Vous devez résoudre l'équation ou le système d'équations pour trouver la quantité inconnue.

Valider la réponse
Vérifiez si vous répondez bien à la question, si la réponse a du sens, si les unités et le signe sont corrects.

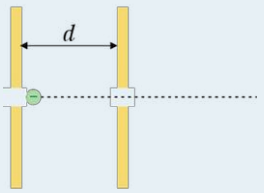
Défi animé 2.3
Pouvez-vous contrôler la trajectoire d'un disque chargé à l'aide de la force électrique transmise par d'autres charges ?

MISE EN GARDE

Contrairement à la situation relative au projectile, où l'accélération est toujours vers le bas, l'accélération de la charge peut être vers le haut ou vers le bas selon l'orientation du champ électrique et du signe de la charge.

EXEMPLE 2.10 Un canon à électrons

Des électrons, initialement au repos, sont accélérés vers la droite jusqu'à ce qu'ils atteignent une vitesse de module de $8{,}4 \times 10^6$ m/s. Ceci est accompli au moyen de deux grandes plaques parallèles, munies d'un orifice (*voir la figure ci-contre*). Les deux plaques sont séparées par une distance $d = 1{,}2$ cm. Calculez le champ électrique nécessaire.



SOLUTION

Illustrer la situation
Le schéma de la situation est présenté à la figure 2.41. Nous plaçons l'axe des y vers la droite, avec l'origine vis-à-vis de la position initiale de l'électron.

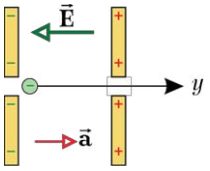


FIGURE 2.41
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.10

Décortiquer le problème
Le champ électrique est confiné entre les plaques. Ceci implique que l'électron subit une accélération seulement lorsqu'il est entre les plaques. Le champ entre les plaques est uniforme, donc l'accélération est constante.

Connues	
$y_0 = 0{,}00$ m	$y = d = 0{,}012$ m
$v_{0y} = 0{,}0$ m/s	$v_y = 8{,}4 \times 10^6$ m/s
$m = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg	$q = -1{,}602 \times 10^{-19}$ C

Inconnue
$\vec{E}$

Identifier les clés

La première **clé** est la troisième équation du mouvement uniformément accéléré :

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_y\,(y - y_0) \Rightarrow a_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2\,(y - y_0)}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est la deuxième loi de Newton, en tenant compte que l'électron subit uniquement la force électrique :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = q\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{m}{q}\vec{\mathbf{a}}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'accélération à partir de l'équation (i) :

$$a_y = \frac{(8{,}4 \times 10^6\ \text{m/s})^2}{2 \times 0{,}012\ \text{m}} = 2{,}94 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2\,,$$

pour ensuite calculer le champ électrique :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{9{,}109 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{-1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}}\,(2{,}94 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2)\,\vec{\boldsymbol{j}}$$
$$= -1{,}67 \times 10^4\ \text{N/C}\,\vec{\boldsymbol{j}}\,.$$

Donc,

$$\vec{\mathbf{E}} = 1{,}7 \times 10^4\ \text{N/C}\ \overrightarrow{\text{vers la gauche}}\,.$$

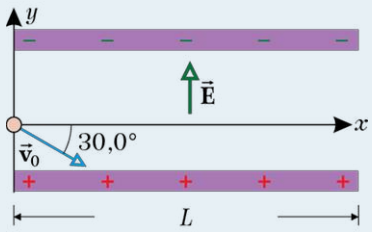
(réponse)

Valider la réponse

Le champ doit être orienté vers la gauche pour que la force exercée sur l'électron soit vers la droite. C'est bien ce que nous obtenons.

EXEMPLE 2.11 La trajectoire d'un proton

Un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 3{,}20 \times 10^3\ \text{N/C}\,\vec{\boldsymbol{j}}$ est produit par deux grandes plaques parallèles ayant une longueur $L = 15{,}0$ cm (*voir la figure ci-contre*). Un proton est envoyé à partir de la gauche, avec une vitesse de $2{,}50 \times 10^5$ m/s selon un angle de 30,0° en dessous de l'horizontale.



a. Calculez le temps pour que le déplacement horizontal du proton soit de L.

b. Quel est le déplacement vertical du proton ?

c. Quelle est l'orientation de la trajectoire du proton après son passage entre les plaques ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous illustrons le schéma de la situation à la figure 2.42. Il y a deux positions importantes : la position initiale (à gauche des plaques), où nous avons placé l'origine, et la position finale (à droite des plaques).

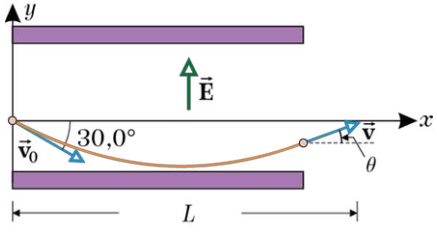


FIGURE 2.42
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.11

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$v_0 = 2{,}50 \times 10^5$ m/s	t
$\theta_0 = 30{,}0°$	Δy
$\vec{\mathbf{E}} = 3{,}20 \times 10^3$ N/C $\vec{\boldsymbol{j}}$	θ
$x_0 = 0{,}00$ m	
$x = L = 0{,}150$ m	
$q = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C	
$m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg	

La masse du proton se trouve à l'annexe B. Nous calculons les composantes de la vitesse initiale et de l'accélération :

$$v_{0x} = (2{,}50 \times 10^5)\cos(30{,}0°) = 2{,}165 \times 10^5 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = -(2{,}50 \times 10^5)\sin(30{,}0°) = -1{,}250 \times 10^5 \text{ m/s}$$
$$a_x = \frac{q}{m}E_x = 0{,}00 \text{ m/s}^2$$
$$a_y = \frac{q}{m}E_y = \left(\frac{1{,}602 \times 10^{-19}}{1{,}673 \times 10^{-27}}\right) 3{,}20 \times 10^3$$
$$= 3{,}064 \times 10^{11} \text{ m/s}^2 .$$

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Pour trouver le temps de passage, on utilise la composante x du mouvement, car nous connaissons la composante horizontale de la position finale, qui correspond à la longueur des plaques ($x = L$).

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.34 :

$$x = x_0 + v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$t = \frac{0{,}150 \text{ m}}{2{,}165 \times 10^5 \text{ m/s}} = 6{,}928 \times 10^{-7} \text{ s} = 693 \text{ ns} .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Nous avons besoin de calculer $\Delta y = y - y_0$. Nous analysons la composante y du mouvement.

Identifier la clé

La **clé** est la composante y de l'équation 2.34 :

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs connues et la réponse précédente :

$$\Delta y = (-1{,}250 \times 10^5)(6{,}928 \times 10^{-7}) + \frac{1}{2}(3{,}064 \times 10^{11})(6{,}928 \times 10^{-7})^2$$
$$\Delta y = -0{,}013\,1 \text{ m} = -1{,}31 \text{ cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est que la vitesse est parallèle à la trajectoire. Donc, l'orientation de la trajectoire à la sortie des plaques correspond à l'orientation de la vitesse finale. Nous devons calculer les composantes de la vitesse à l'aide de l'équation 2.33 :

$$v_x = v_{0x} = 2{,}165 \times 10^5 \text{ m/s} \qquad \text{(iii)}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons la composante y de la vitesse :

$$v_y = (-1{,}25 \times 10^5) + (3{,}064 \times 10^{11})(6{,}928 \times 10^{-7})$$
$$= 8{,}7 \times 10^4 \text{ m/s} .$$

Ici, la soustraction fait perdre un chiffre significatif. Les deux composantes sont positives, ce qui montre que la vitesse est orientée au-dessus de l'horizontale et vers la droite. Nous calculons l'orientation :

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{8{,}7 \times 10^4}{2{,}165 \times 10^5}\right)$$
$$= 22° \text{ (au-dessus de l'horizontale)} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le temps en **a.** est très faible, car le proton a une grande vitesse. L'ordre de grandeur du déplacement obtenu a du sens. En **b.** le signe négatif indique que le proton s'est déplacé vers le bas. L'orientation de la trajectoire en **c.** indique que le proton se déplace vers le haut après son passage entre les plaques.

Une particule chargée dans un champ non uniforme

Dans la plupart des situations étudiées à l'intérieur de ce chapitre, le champ électrique produit par une configuration de charges est non uniforme. Par exemple, le champ sur l'axe d'un anneau uniformément chargé est donné par l'équation 2.22 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} .$$

Si une charge ponctuelle située sur l'axe des z approche de l'anneau, elle subit une force qui change en fonction du temps. On ne peut utiliser les équations du mouvement uniformément accéléré. Il faut utiliser des méthodes du calcul intégral pour trouver la position à partir de la force exercée par le champ électrique. Nous verrons aussi une autre méthode au chapitre 4, basée sur l'énergie.

Le champ créé par une charge ponctuelle est non uniforme, car il diminue avec la distance. Il est possible d'analyser la trajectoire d'une particule dans un champ radial constant (la particule chargée qui produit le champ doit être fixe) : lorsque la particule a une vitesse perpendiculaire au champ électrique. Dans ce cas, la force électrique est une force centripète :

$$\sum F_c = qE = \frac{mv^2}{r} . \qquad (2.38)$$

La particule chargée a une trajectoire circulaire, de rayon r.

2.8 Un dipôle dans un champ électrique

Nous avons vu au chapitre 1 qu'une force électrique peut être exercée sur un isolant neutre. Dans ce cas, les atomes se comportent comme des dipôles électriques. Analysons maintenant les forces exercées sur un dipôle électrique (un objet dont la charge nette est nulle) dans un champ électrique.

La figure 2.43 illustre un dipôle dans un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}}$. Le champ électrique est celui qui est produit par d'autres charges électriques qui ne sont pas illustrées. Le dipôle pourrait se trouver entre deux plaques parallèles. Le dipôle est constitué d'une charge $+q$ et par une charge $-q$ séparées par une distance d. Il est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}}$, orienté de la charge négative vers la charge positive. Pour obtenir la force résultante sur le dipôle, on calcule la force exercée sur chacune des charges constituant le dipôle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = \vec{\mathbf{F}}_{e,+} + \vec{\mathbf{F}}_{e,-} = (q\vec{\mathbf{E}}) + (-q\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{0}} . \qquad (2.39)$$

Le dipôle ne subit pas de force résultante, mais il subit un moment de force. En effet, les deux forces illustrées n'ont pas le même point d'application. Selon le chapitre 12 du tome 1, le moment de force exercé par une force $\vec{\mathbf{F}}$ dont le point d'application se trouve à une distance r d'un pivot se calcule à l'aide de l'expression :

$$\tau_z = \pm rF \sin\phi ,$$

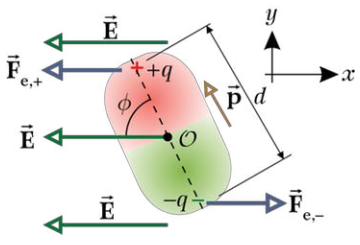


FIGURE 2.43
Un dipôle dans un champ uniforme subit une force résultante nulle.

où ϕ est l'angle entre la force $\vec{\mathbf{F}}$ et le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$, qui va du pivot jusqu'au point d'application de la force $\vec{\mathbf{F}}$. Le signe positif est utilisé pour une rotation en sens antihoraire et le signe négatif, pour une rotation en sens horaire. Dans le SI, l'unité du moment de force est le newton mètre (N · m), qui a les mêmes dimensions que le joule. Cependant, l'unité joule doit être utilisée exclusivement lorsqu'il est question d'énergie.

On peut calculer le moment de force par rapport au point $\mathcal{O}$ situé à mi-chemin entre les deux charges du dipôle. Selon la figure 2.43, chaque charge est située à une distance $d/2$ du point $\mathcal{O}$, et chaque force produit une rotation en sens antihoraire. Le moment de force sur le dipôle est alors

$$\tau_z = \tau_{z+} + \tau_{z-} = \frac{d}{2}(qE)\sin\phi + \frac{d}{2}(qE)\sin\phi = qd\,E\,\sin\phi$$
$$= pE\sin\phi\,.$$

L'angle ϕ est l'angle entre le moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ et le champ $\vec{\mathbf{E}}$, avec $0 \leq \phi \leq 180°$. Dans la situation illustrée à la figure 2.43, le moment de force est positif, car il fait tourner le dipôle en sens antihoraire. Dans d'autres situations, la rotation peut être en sens horaire. On obtient donc, de façon générale,

$$\tau_z = \pm pE\,\sin\phi\,. \tag{2.40}$$

Comme on l'a vu au chapitre 12 du tome 1, le moment de force est en fait un vecteur, avec τ_z sa composante z (et $\vec{\mathbf{p}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$ dans le plan des xy). Pour un dipôle dans un champ uniforme, l'équation précédente se généralise ainsi :

Moment de force sur un dipôle

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}\,. \tag{2.41}$$

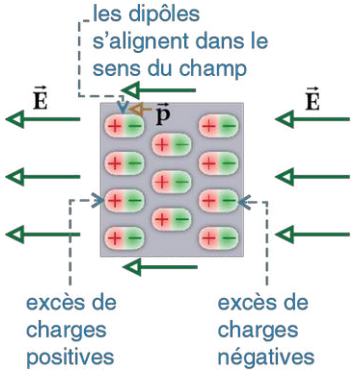


FIGURE 2.44
Un isolant dans un champ électrique extérieur $\vec{\mathbf{E}}$

Il est important de constater que le moment de force tend à aligner le dipôle dans le même sens que le champ électrique, de telle sorte que l'angle ϕ s'approche de 0°. De plus, le moment de force est nul lorsque $\phi = 0°$. Cette configuration correspond à un équilibre stable du dipôle (la configuration $\phi = 180°$ est un équilibre instable).

Si on revient aux atomes d'un isolant dans un champ électrique extérieur, on voit que ce champ va faire tourner les atomes pour que leur moment dipolaire soit aligné de la même façon que lui. On aura alors la situation de la figure 2.44, qui est semblable à celle de la figure 1.13 de la page 15. L'isolant devient polarisé : il y a un surplus de charge négative d'un côté et un surplus de charge positive de l'autre côté. L'isolant neutre subit une force électrique dans le même sens que le champ extérieur. Nous verrons au chapitre 3 l'effet de la polarisation sur le champ à l'intérieur d'un isolant.

EXEMPLE 2.12 Une molécule d'eau dans un champ

Une molécule d'eau a un moment dipolaire de $6{,}17 \times 10^{-30}$ C · m orienté selon un angle de 20,0° à droite de l'axe des y. Un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = 5{,}80 \times 10^{6}$ N/C$\vec{\imath}$ est présent. Calculez le moment de force exercé sur la molécule.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 2.45 illustre l'orientation du moment dipolaire et du champ électrique. L'angle θ est l'angle entre $\vec{\mathbf{p}}$ et l'axe des y. L'angle important est l'angle $\phi = 90{,}0° - \theta$, entre les deux vecteurs.

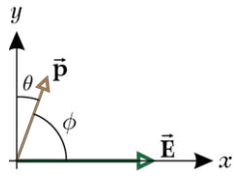


FIGURE 2.45
Le schéma de la situation pour l'exemple 2.12

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$p = 6{,}17 \times 10^{-30}$ C · m	$\theta = 20{,}0°$	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$
$\vec{\mathbf{E}} = 5{,}80 \times 10^{6}$ N/C$\vec{\imath}$	$\phi = 70{,}0°$	

Identifier les clés

La première **clé** est que le moment de force tend à aligner $\vec{\mathbf{p}}$ sur le champ, donc le moment de force est en sens horaire ($\tau_z < 0$). La deuxième **clé** est l'équation 2.40 :

$$\tau_z = -pE \sin\phi \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau_z &= -(6{,}17 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m})(5{,}80 \times 10^{6}\ \text{N/C}) \\ &\quad \times \sin(70{,}0°) \\ &= 3{,}36 \times 10^{-23}\ \text{N} \cdot \text{m} \,.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\tau}} &= 3{,}36 \times 10^{-23}\ \text{N} \cdot \text{m}\,\overrightarrow{\text{horaire}} \\ &= -3{,}36 \times 10^{-23}\ \text{N} \cdot \text{m}\,\vec{\boldsymbol{k}} \,. \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse

Le moment de force est perpendiculaire au plan formé par $\vec{\mathbf{p}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$. Comme on a vu dans le tome 1, un moment de force horaire correspond à un moment de force dont la composante z est négative.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la façon de calculer le champ électrique produit par des charges et la force exercée sur un objet chargé par un champ électrique.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

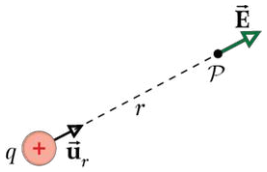
Le **champ électrique** est produit par des charges électriques. Le champ est le médiateur de la force électrique entre les charges. Il est défini comme la force par unité de charge exercée sur une charge-test q_0

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{e,sur } q_0}}{q_0} .$$

Pour calculer le champ :

- Pour une charge ponctuelle :

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{kq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r .$$



- Pour N charges ponctuelles, on utilise le **principe de superposition** :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_N .$$

- Pour une distribution continue :

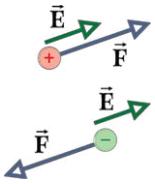
$$\vec{\mathbf{E}} = k\int_{\text{objet}} \frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{objet}} \frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r ,$$

où l'élément infinitésimal dq peut être exprimé en fonction d'une densité de charge :

$$dq = \begin{cases} \lambda\, dx & \text{(ligne)} \\ \sigma\, dA & \text{(surface)} \\ \rho\, dV & \text{(volume)} . \end{cases}$$

- Une **charge électrique** dans un champ subit une force :

$$\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}} .$$



- L'**accélération** de la charge, lorsqu'elle ne subit que la force électrique :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m} .$$

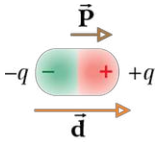
- Un **dipôle dans un champ uniforme** subit un moment de force, qui tend à aligner le moment dipolaire sur le champ

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} .$$

LES RÉSULTATS

- Un **dipôle** est constitué d'une charge $+q$ et par une charge $-q$, séparées par une distance d. Le **moment dipolaire** est

$$\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}} .$$



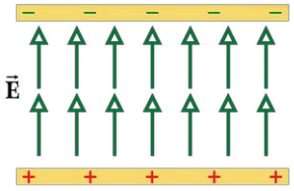
Un dipôle produit un champ électrique. Pour $r \gg d$,

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{2k\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \qquad \text{(sur l'axe)}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{k\vec{\mathbf{p}}}{r^3} . \qquad \text{(sur la ligne bissectrice)}$$

- Un **champ uniforme** est produit par deux grandes plaques dont les charges surfaciques sont uniformes et opposées.

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{\text{du positif vers le négatif}} & \text{(entre les plaques)} \\ \vec{\mathbf{0}} & \text{(à l'extérieur)} \end{cases}$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 2.1 La notion de champ

Q1 Déterminez l'orientation du champ électrique qui produit les effets suivants :

a. Un proton se déplace vers le haut, et le module de sa vitesse est croissant.

b. Un électron se déplace vers la droite, et le module de sa vitesse est décroissant.

c. Une particule alpha (dont la charge est $q = +2e$) se déplace vers la gauche, et le module de sa vitesse est décroissant.

d. Une particule dont la charge est négative se déplace vers le nord à vitesse constante.

e. Une particule positive se déplace vers l'ouest, et le module de sa vitesse est croissant.

E2 Un électron se déplace dans un champ électrique de 150 N/C dans le sens de l'axe des x. Quelle est son accélération ?

E3 Une petite bille chargée de 32 µC flotte au-dessus d'une grande plaque horizontale uniformément chargée qui produit un champ électrique uniforme. La bille a une masse de 2,8 g.

a. Quelle est l'orientation du champ électrique produit par la plaque pour que la bille soit en équilibre ?

b. Quel est le module du champ électrique ?

E4 Un ion Cu^{++} subit une force $\vec{\mathbf{F}}_e = (11{,}2\vec{\imath} - 15{,}0\vec{\jmath} - 8{,}00\vec{k}) \times 10^{-16}$ N lorsqu'il se trouve dans un champ électrique.

a. Quelle est la charge de l'ion, exprimée en coulombs ?

b. Calculez le champ électrique.

c. Calculez le module du champ électrique.

P5 Une petite sphère est suspendue au bout d'une corde. La sphère a une charge q et une masse m. Un champ électrique horizontal et uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ est présent, de telle sorte que la corde forme un angle θ lorsque le système est en équilibre, comme le montre la figure 2.46. Calculez le module du champ $\vec{\mathbf{E}}$.

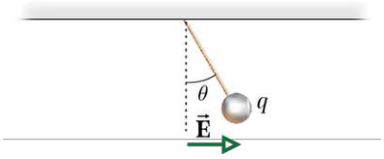


FIGURE 2.46 • Problèmes 5 et 6

P6 Une petite sphère est suspendue au bout d'une corde. La sphère a une charge de 2,50 µC et une masse de 20,0 g. Un champ électrique horizontal et uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ est présent, de telle sorte que la corde forme un angle de 10,0° lorsque le système est en équilibre, comme l'illustre la figure 2.46. Calculez le module du champ $\vec{\mathbf{E}}$.

Section 2.2 Le champ de charges ponctuelles

Q7 Soit un cube dont les arêtes sont de longueur L. Il a une charge ponctuelle q située à chacun de ses coins, comme le montre la figure 2.47. Quel est le champ électrique pour un point situé au centre du cube ?

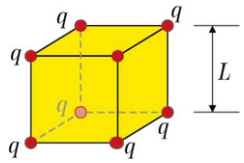


FIGURE 2.47 • Question 7

Q8 La figure 2.48 illustre deux charges ponctuelles placées sur l'axe des x. L'axe des x est divisé en trois régions : la région (i) à gauche des charges, la région (ii) entre les charges et la région (iii) à droite des charges.

a. Quel est le sens du champ électrique résultant dans la région (i) ?

b. Quel est le sens du champ électrique résultant dans la région (ii) ?

c. Quel est le sens du champ électrique résultant dans la région (iii) ?

d. Dans quelle région peut-on avoir un champ nul sans être à une distance infinie ? Expliquez votre réponse.

e. Peut-on avoir un champ nul à un point qui n'est pas sur l'axe des x ? Expliquez votre réponse.

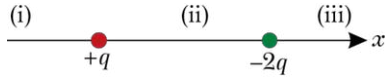


FIGURE 2.48 • Question 8

Q9 La figure 2.49 (*voir la page suivante*) illustre deux situations où deux charges ponctuelles sont placées sur l'axe des y, à une distance d, de part et d'autre de l'origine. Le point $\mathcal{P}$ est placé sur l'axe des x. Voici six énoncés :

(i) Le champ électrique au point $\mathcal{P}$ est nul.

(ii) Le champ au point $\mathcal{P}$ est orienté vers le haut.

(iii) Le champ au point $\mathcal{P}$ est orienté vers le bas.

(iv) Le champ au point $\mathcal{P}$ est orienté vers la droite.

(v) Le champ au point $\mathcal{P}$ est orienté vers la gauche.

(vi) Tous les autres énoncés sont faux.

Pour les situations suivantes, lequel des énoncés est vrai ?

a. Les charges sont positives et identiques.

b. Les charges sont opposées.

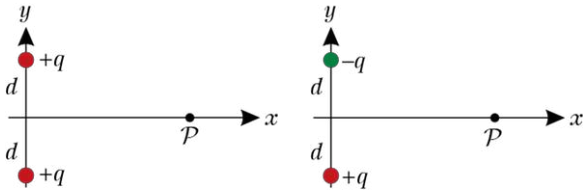


FIGURE 2.49 • Question 9

E10 Une charge ponctuelle positive $q = 3{,}0\ \mu C$ est située à $\vec{\mathbf{r}}_q = (0{,}45\vec{\imath} + 0{,}76\vec{\jmath})$ m. Un point $\mathcal{P}$ se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{P}} = (0{,}12\vec{\imath} - 0{,}54\vec{\jmath})$ m.

a. Quel est le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_r$?

b. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$.

E11 Un point $\mathcal{P}$ est situé à (0,300 ; 0,300 ; 0,300) m. Une charge ponctuelle $q = -4{,}50\ \mu C$ est située à (−0,150 ; 0,250 ; −0,200) m.

a. Calculez le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_r$.

b. Quel est le champ électrique au point $\mathcal{P}$?

c. Calculez le module du champ électrique au point $\mathcal{P}$.

P12 Un charge ponctuelle $q_1 = 5{,}00\ \mu C$ est située à la position $\vec{\mathbf{r}}_{q_1} = (1{,}00\vec{\imath} + 1{,}00\vec{\jmath})$ cm, et une deuxième charge ponctuelle $q_2 = -7{,}00\ \mu C$ est située à la position $\vec{\mathbf{r}}_{q_2} = (8{,}00\vec{\imath} + 5{,}00\vec{\jmath})$ cm. Un point $\mathcal{P}$ se trouve à la coordonnée (3,00 ; 8,00) cm.

a. Calculez le champ électrique résultant produit par les deux charges au point $\mathcal{P}$.

b. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ si on ajoute une charge $q_3 = -3{,}00\ \mu C$ à l'origine.

P13 Une charge ponctuelle $q_1 = 24{,}0$ nC est placée à 6,00 cm d'une autre charge ponctuelle $q_2 = -12{,}0$ nC. Les deux charges sont placées sur l'axe des x. À quel endroit le champ électrique est-il nul ? Exprimez votre réponse en fonction de la position de q_1.

P14 Deux charges sont situées sur l'axe des x, comme le montre la figure 2.50 : la charge $q_1 = -2{,}00\ \mu C$ est en $x_1 = 2{,}00$ cm, et la charge $q_2 = -3{,}00\ \mu C$ est en $x_2 = 5{,}00$ cm. Où doit-on placer une charge $q_3 = 5{,}00\ \mu C$ pour que le champ soit nul à l'origine ?

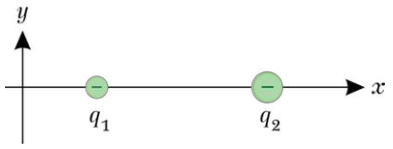


FIGURE 2.50 • Problème 14

P15 La figure 2.51 montre un système de trois charges ponctuelles, avec $q_1 = 2{,}00\ \mu C$, $q_2 = -2{,}00\ \mu C$, $q_3 = 3{,}00\ \mu C$, $d = 3{,}00$ cm et $a = 10{,}0$ cm.

a. Déterminez le champ électrique produit à la position de q_3 par les deux autres charges.

b. Quelle est la force électrique qui s'exerce sur q_3 ?

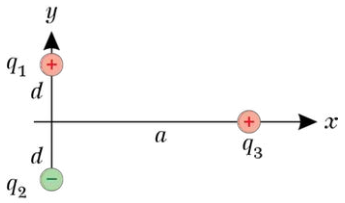


FIGURE 2.51 • Problème 15

P16 Dans la figure 2.52, une charge ponctuelle $q_1 = 4{,}00\ \mu C$ et une charge ponctuelle $q_2 = -6{,}00\ \mu C$ se trouvent sur l'axe des x.

a. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$.

b. Trouvez la force résultante exercée sur une charge ponctuelle $q_3 = -3{,}00\ \mu C$ si on la place au point $\mathcal{P}$.

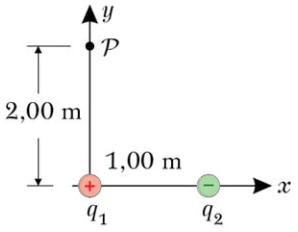


FIGURE 2.52 • Problème 16

P17 Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ illustré à la figure 2.53.

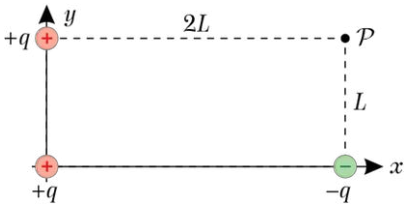


FIGURE 2.53 • Problème 17

P18 Trois charges ponctuelles sont placées comme le montre la figure 2.54. Si $q_1 = 17{,}0$ nC, $q_2 = -23{,}0$ nC, $q_3 = -19{,}0$ nC, $a = 3{,}40$ cm et $b = 1{,}40$ cm, calculez :

a. le champ électrique au point $\mathcal{P}$;

b. la force sur une charge $q_4 = -11{,}0$ nC placée au point $\mathcal{P}$.

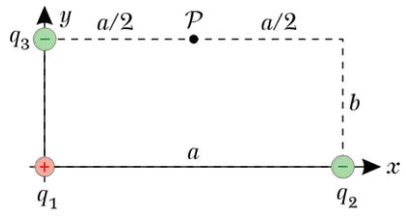


FIGURE 2.54 • Problème 18

P19 On place les charges $q_1 = 1{,}4$ µC et $q_2 = -2{,}3$ µC sur les coins d'une boîte, comme il est illustré à la figure 2.55. Les dimensions de la boîte sont $e = 4{,}5$ cm, $L = 8{,}0$ cm et $h = 6{,}0$ cm.

a. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$.

b. Calculez le module du champ au point $\mathcal{P}$.

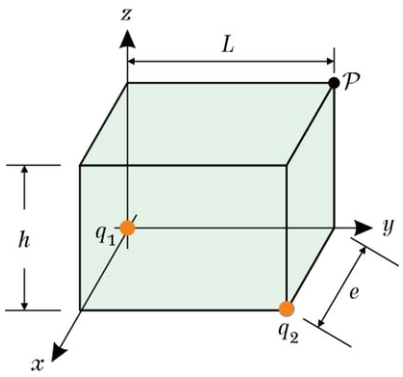


FIGURE 2.55 • Problème 19

P20 Une charge ponctuelle $q_1 = 4{,}50$ µC se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_{q_1} = (2{,}00\vec{\imath} - 5{,}00\vec{\jmath} + 3{,}00\vec{k})$ cm. Une deuxième charge ponctuelle $q_2 = -2{,}30$ µC se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_{q_2} = (-2{,}00\vec{\imath} - 2{,}00\vec{\jmath} - 3{,}00\vec{k})$ cm. Un électron se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_e = (4{,}00\vec{\imath} + 4{,}00\vec{\jmath})$ cm.

a. Calculez, à la position de l'électron, le champ électrique produit par les deux autres charges ponctuelles.

b. Quelle est l'accélération de l'électron ?

Section 2.3 Le champ électrique d'un dipôle

E21 La géométrie de la molécule d'eau est présentée à la figure 2.56. La distance entre l'atome d'oxygène et un atome d'hydrogène est $r = 0{,}9584 \times 10^{-10}$ m, et l'angle formé par les deux atomes d'hydrogène est $\theta = 104{,}45°$.

a. Si on modélise la molécule d'eau comme étant un dipôle de deux électrons à la position de l'atome d'oxygène et de deux protons à la position à mi-chemin entre les deux atomes d'hydrogène, quel serait le module du moment dipolaire électrique de la molécule dans ce modèle ?

b. Selon la valeur donnée à l'exemple 2.12, est-ce que notre modèle est représentatif de la réalité ?

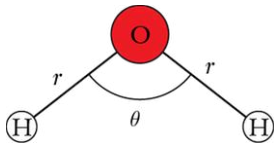


FIGURE 2.56 • Exercice 21

E22 Un dipôle est formé d'une charge positive de 3,5 µC en $r_+ = (-3{,}5\vec{\imath} + 4{,}8\vec{\jmath})$ cm et d'une charge négative de −3,5 µC en $r_- = (2{,}7\vec{\imath} - 3{,}2\vec{\jmath})$ cm. Calculez le moment dipolaire de ce dipôle.

E23 Un dipôle est constitué de deux charges $q_1 = 1{,}0$ nC et $q_2 = -1{,}0$ nC séparées par une distance de 1,30 mm. Le dipôle est centré à l'origine, avec le moment dipolaire orienté dans le même sens que l'axe des z. Un point $\mathcal{P}$ est situé à la position $\vec{\mathbf{r}} = 15{,}0\ \text{cm}\,\vec{k}$.

a. Calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$.

b. Quelle est la force électrique exercée sur un électron qui se trouve à la position du point $\mathcal{P}$?

P24 Montrez que pour des points situés à une distance $r \gg d$, le champ électrique sur la ligne bissectrice d'un dipôle est donné par :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{k\vec{\mathbf{p}}}{r^3}.$$

Section 2.4 Les distributions continues de charge

Q25 Une tige de longueur L a une charge Q uniformément distribuée. On veut calculer le champ électrique au point $\mathcal{P}$, situé à une distance d à droite de l'origine, comme il est illustré à la figure 2.57.

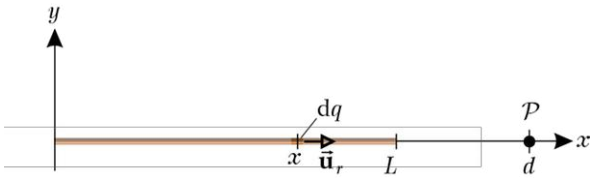


FIGURE 2.57 • Question 25

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge de la tige.

b. Écrivez une expression pour le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$.

c. Quelle est la distance r entre l'élément dq illustré et le point $\mathcal{P}$?

d. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer $\vec{\mathbf{E}}$, sans la résoudre.

Q26 On veut calculer le champ électrique au point $\mathcal{P}$ situé à une distance y au-dessus de l'extrémité d'une tige (*voir la figure 2.58*). La tige a une charge linéique λ uniforme et une longueur L.

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge linéique de la tige.

b. Écrivez une expression pour le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$.

c. Quelle est la distance r entre l'élément dq illustré et le point $\mathcal{P}$?

d. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer $\vec{\mathbf{E}}$, sans la résoudre.

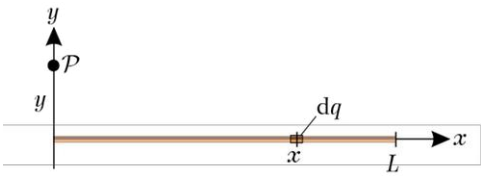


FIGURE 2.58 • Question 26

Q27 Une tige de longueur L a une charge Q uniformément distribuée. On veut calculer le champ électrique au point $\mathcal{P}$, situé à une distance d à droite de l'origine, comme le montre la figure 2.59.

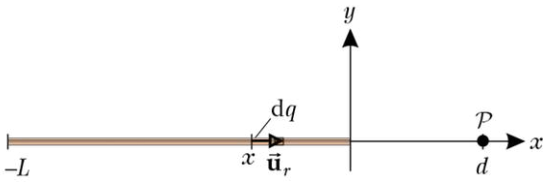


FIGURE 2.59 • Question 27

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge de la tige.

b. Écrivez une expression pour le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$.

c. Quelle est la distance r entre l'élément dq illustré et le point $\mathcal{P}$?

d. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer $\vec{\mathbf{E}}$, sans la résoudre.

Q28 On courbe une tige en forme de demi-cercle de rayon R, comme il est illustré à la figure 2.60. La charge linéique λ est uniforme.

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge linéique et du rayon du demi-cercle.

b. Écrivez une expression pour le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$.

c. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer $\vec{\mathbf{E}}$, sans la résoudre.

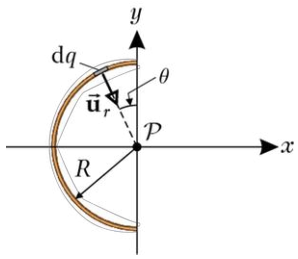


FIGURE 2.60 • Question 28

E29 Une tige de longueur L est parallèle à l'axe des x, et son extrémité gauche est à une distance d de l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes (*voir la figure 2.61*). Sa charge linéique est donnée par $\lambda = a/(d + x)$, où a est une constante. Calculez la charge de la tige.

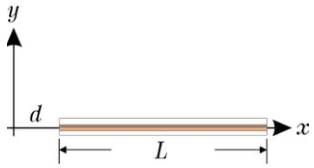


FIGURE 2.61 • Exercice 29

P30 Un fil uniformément chargé a une longueur de 6,00 m et une charge de –360 µC. Calculez le champ électrique en un point $\mathcal{P}_1$ situé à droite du fil à une distance d = 5,00 m du centre (*voir la figure 2.62*).

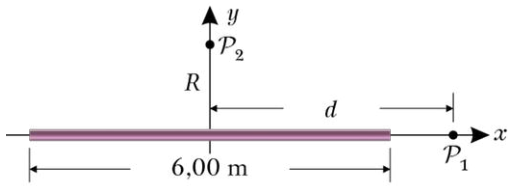


FIGURE 2.62 • Problèmes 30 et 31

P31 Un fil uniformément chargé a une longueur de 6,00 m et une charge de 360 µC. Calculez le champ électrique à un point $\mathcal{P}_2$ situé vis-à-vis du centre du fil, à une distance R = 2,00 m (*voir la figure 2.62*).

P32 Un fil infini a une charge linéique λ uniforme. Montrez que le module du champ électrique à une distance R au-dessus du fil est:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

P33 Un fil uniformément chargé a une longueur de 6,00 m et une charge de 360 µC. Une charge q = 70,0 nC est placée comme le montre la figure 2.63.

a. Calculez le champ électrique produit par le fil à la position de la charge q.

b. Calculez la force électrique exercée sur la charge q par le fil.

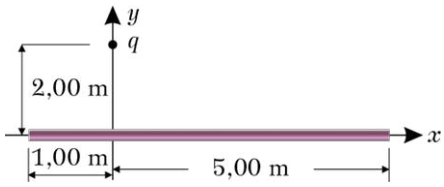


FIGURE 2.63 • Problème 33

P34 Une tige en forme de demi-cercle de rayon R a une charge linéique λ. Quel est le module du champ électrique au centre du demi-cercle ?

P35 Une tige en forme de demi-cercle ayant un rayon de 25,0 cm a une charge linéique de 350 µC/m. Quel est le module du champ électrique au centre du demi-cercle ?

P36 Une tige est courbée en forme d'arc de cercle, comme le montre la figure 2.64. La tige a une charge de 360 µC uniformément distribuée et un rayon de 0,200 m. Quel est le champ électrique produit par la tige au point $\mathcal{P}$?

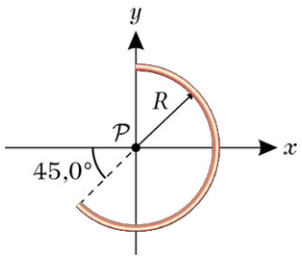


FIGURE 2.64 • Problème 36

P37 Une tige rectiligne uniformément chargée de charge totale $+Q$ est recourbée en forme d'arc de cercle de rayon R (*voir la figure 2.65*). Les deux extrémités de la tige forment un angle θ et celle-ci est centrée sur l'axe des x. Quel est le champ électrique au point $\mathcal{P}$?

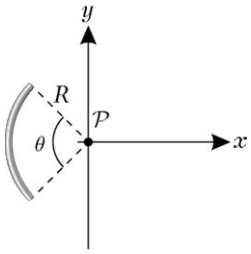


FIGURE 2.65 • Problème 37

P38 Deux tiges parallèles de longueur L et de charge linéique λ sont séparées par une distance d (*voir la figure 2.66*). Les points $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont à mi-chemin entre les deux tiges.

a. Quel est le champ électrique au point $\mathcal{P}_1$, situé vis-à-vis du centre de chaque tige ?

b. Quel est le champ électrique au point $\mathcal{P}_2$?

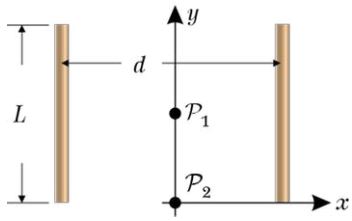


FIGURE 2.66 • Problème 38

P39 Une tige verticale de 3,00 m, possédant une charge linéique de –15,04 µC/m, est située à $x = 0{,}00$ m. Une tige horizontale de 4,00 m possédant une charge linéique de 32,0 µC/m est située à $y = 3{,}00$ m, comme le montre la figure 2.67. Quel est le champ produit par les deux tiges à l'origine ?

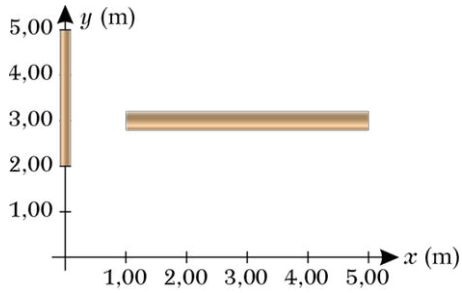


FIGURE 2.67 • Problème 39

P40 Une tige verticale uniformément chargée ($Q = 250$ nC) est située à $x = 0{,}00$ cm entre les positions $y = -8{,}00$ cm et $y = -2{,}00$ cm. Dans le même système, une charge ponctuelle positive $q_1 = 76{,}0$ nC est placée à la coordonnée (3,00 ; –2,00) cm.

a. Calculez le champ électrique à l'origine.

b. Une charge ponctuelle négative $q_2 = -120$ nC est placée à l'origine. Quelle est la force électrique qui s'exerce sur la charge q_2 ?

Section 2.5 Le champ produit par les anneaux, les disques et les plans

Q41 La figure 2.68 (*voir la page suivante*) montre deux anneaux de rayon R identiques, partageant le même axe et séparés par une distance $2R$, et trois points sur l'axe : le point $\mathcal{P}_1$ est à mi-chemin entre les anneaux, $\mathcal{P}_2$ est au

centre de l'anneau supérieur et $\mathcal{P}_3$ est à une distance R au-dessus de l'anneau supérieur. Classez les points par ordre décroissant du module du champ électrique dans les situations suivantes :

a. Les deux anneaux ont la même charge positive.

b. Les deux anneaux ont des charges de valeurs opposées.

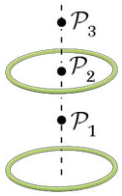


FIGURE 2.68 • Question 41

E42 Un anneau de 30,0 cm de rayon est situé au-dessus d'un autre anneau de 45,0 cm de rayon. Les deux anneaux sont séparés par une distance d = 60,0 cm et ils partagent le même axe, comme le montre la figure 2.69. Si l'anneau supérieur a une charge $Q_1 = 120$ µC, et l'anneau inférieur a une charge $Q_2 = -360$ µC, calculez le champ électrique au point $\mathcal{P}$ à mi-chemin entre les deux anneaux.

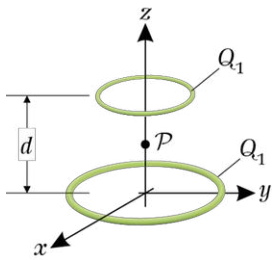


FIGURE 2.69 • Exercice 42

E43 Deux plaques isolantes parallèles sont séparées par une distance de 30 cm. La plaque inférieure (plaque 2) a une charge surfacique de 36 µC/m^2.

a. Quelle doit être la charge surfacique de la plaque supérieure (plaque 1) pour que le champ entre les plaques soit nul ?

b. On ajoute une troisième plaque isolante à une distance de 50 cm au-dessus de la plaque supérieure (plaque 1). La charge surfacique de cette troisième plaque est de –12 µC/m^2. Quelle doit être la nouvelle charge surfacique de la plaque 1 pour que le champ électrique entre les plaques 1 et 2 soit nul ?

P44 Un anneau a un rayon R et une charge Q uniformément distribuée. Son axe correspond à l'axe des z.

a. À quel endroit sur l'axe de l'anneau le module du champ électrique est-il maximal ?

b. Quel est le module du champ à cet endroit ?

P45 Un disque de rayon R est percé d'un trou de rayon $R/4$ à son centre (*voir la figure 2.70*). Le disque a une charge surfacique σ. Calculez le champ aux endroits suivants :

a. au point $\mathcal{P}_1$ situé au centre du trou ;

b. au point $\mathcal{P}_2$ situé à une distance R sur l'axe du disque.

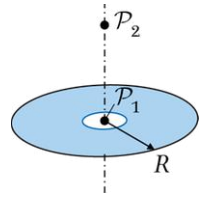


FIGURE 2.70 • Problème 45

Section 2.6 Les lignes de champ

Q46 La figure 2.71 montre un électron qui se déplace du point a au point b ainsi que des lignes de champ électrique.

a. Quelle est l'orientation du champ électrique à chaque point ?

b. Quelle est l'orientation de la force électrostatique sur l'électron à chaque point ?

c. À quel point le module du champ est-il plus grand ?

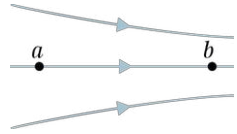


FIGURE 2.71 • Question 46

Q47 D'après les lignes de champ illustrées à la figure 2.72, quelle est la charge q_1 si $q_2 = 6$ µC ?

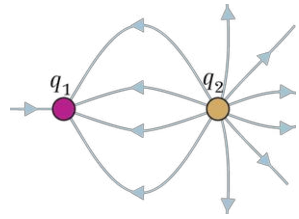


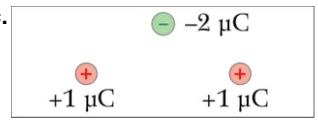
FIGURE 2.72 • Question 47

Q48 Tracez les lignes de champ des systèmes de particules suivants :

a.

b.

c.



Section 2.7 Le mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électrique

Q49 Des particules se déplacent dans une région où le champ électrique est uniforme. Indiquez comment va changer la vitesse (augmentation du module, diminution du module ou changement d'orientation) des particules suivantes.

a. Un électron se déplace perpendiculairement au champ électrique.

b. Un électron se déplace dans le sens opposé au champ électrique.

c. Un électron se déplace dans le même sens que le champ électrique.

d. Un proton se déplace dans le sens opposé au champ électrique.

e. Un proton se déplace dans le même sens que le champ électrique.

f. Un proton de déplace perpendiculairement au champ électrique.

E50 Une particule chargée $q = 52{,}0\ \mu C$, ayant une masse de $1{,}27 \times 10^{-3}$ kg, entre dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (2{,}70\vec{\imath} - 1{,}60\vec{\jmath}) \times 10^3\ \text{N/C}$. Quelle accélération va-t-elle subir ?

E51 Un électron initialement au repos se trouve à une distance de 1,20 cm d'une grande plaque chargée. L'électron accélère vers la plaque et la frappe après un intervalle de temps de 7,39 ns.

a. Quel est le module de l'accélération de l'électron ?

b. Quel est le module de la vitesse de l'électron tout juste avant de frapper la plaque ?

c. Quel est le module du champ électrique ?

d. Quelle est la charge surfacique de la plaque chargée ?

E52 Une *particule alpha* est un noyau d'hélium ^4_2He, ayant une masse de $6{,}648 \times 10^{-27}$ kg et constitué de deux protons et deux neutrons sans électron. Une particule alpha est lancée à une vitesse initiale de $7{,}2 \times 10^5\ \text{m/s}\ \vec{\imath}$ dans un champ électrique uniforme de $-3{,}4 \times 10^4\ \text{N/C}\vec{\imath}$.

a. Quelle distance la particule alpha va-t-elle parcourir avant de s'immobiliser ?

b. Combien de temps prendra-t-elle pour s'arrêter ?

E53 En 1913, le physicien danois Niels Henrik David Bohr (1885-1962) a proposé un modèle pour l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron parcourt une trajectoire circulaire autour du proton immobile. Dans ce modèle, le plus petit rayon orbital (le rayon de Bohr) est d'environ 53 pm. Quel est le module de la vitesse orbitale de l'électron ?

E54 La charge élémentaire a été mesurée par le physicien américain Robert Millikan (1868-1953) entre 1910 et 1913. Il a utilisé un appareil qui vaporise de l'huile en fines gouttelettes qui deviennent alors chargées. Les gouttelettes entrent ensuite dans une chambre où il y a deux plaques chargées parallèles, produisant un champ électrique uniforme (*voir la figure 2.73*). Les gouttelettes sont soumises à trois forces verticales : la force gravitationnelle, la force électrostatique et la poussée d'Archimède qu'on va négliger ici. Dans une telle expérience, le champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = 2{,}50 \times 10^5\ \text{N/C}$ vers le bas est nécessaire pour qu'une gouttelette ayant un rayon de 1,32 µm et une masse volumique de $0{,}850\ \text{g/cm}^3$ soit en équilibre (on suppose que les gouttelettes sont sphériques). Quelle est la charge de la gouttelette ? Exprimez votre réponse en fonction de la charge élémentaire.

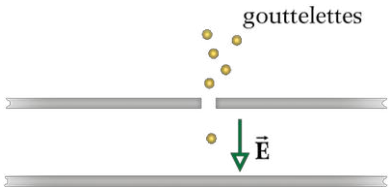


FIGURE 2.73 • Exercice 54

P55 Un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -1{,}00 \times 10^5\ \text{N/C}\vec{\jmath}$ est présent entre deux plaques parallèles ayant 4,00 cm de longueur (*voir la figure 2.74*). Un proton est projeté à mi-chemin entre les deux plaques avec une vitesse de $8{,}00 \times 10^5$ m/s orienté selon un angle de 30,0° vers le haut.

a. Calculez les composantes cartésiennes de la vitesse du proton à la sortie des deux plaques.

b. Trouvez la composante verticale du déplacement du proton au moment où celui-ci sort de la région entre les plaques.

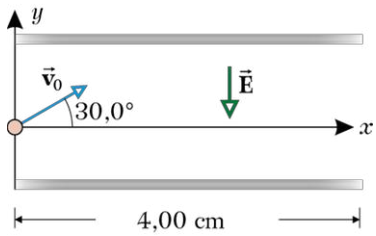


FIGURE 2.74 • Problème 55

P56 Dans une imprimante à jet d'encre, les gouttelettes d'encre sont déviées par un champ électrique uniforme produit par deux plaques parallèles vers la position désirée sur une feuille de papier. Une gouttelette a une charge de $1{,}2 \times 10^{-13}$ C et une masse de $1{,}3 \times 10^{-10}$ kg. Elle pénètre entre les plaques avec une vitesse horizontale de 21 m/s. Les

plaques ont une longueur de 1,6 cm (*voir la figure 2.75*). À la sortie des plaques, le déplacement vertical de la gouttelette est de $0,48 \text{ mm vers le haut}$. Quel est le champ électrique entre les plaques ?

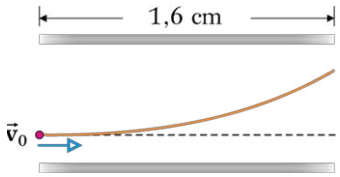


FIGURE 2.75 • Problème 56

P57 Dans un tube à rayons cathodiques (utilisé dans les oscilloscopes et les anciens téléviseurs), des électrons, initialement au repos, sont d'abord accélérés par deux plaques parallèles P_1, puis ils sont déviés par deux autres plaques parallèles P_2. Ensuite, ils continuent en ligne droite jusqu'à un écran fluorescent, comme le montre la figure 2.76. Entre les plaques P_1, il y a un champ $\vec{\mathbf{E}} = -8,00 \times 10^4 \text{ N/C}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$ qui accélère les électrons sur une distance $d = 1,00$ cm. Les plaques P_2 ont une longueur $\ell = 2,15$ cm, et le champ électrique est de $-2,08 \times 10^3 \text{ N/C}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. L'écran est situé à une distance $L = 24,0$ cm après la fin des plaques P_2. (Négligez la force gravitationnelle.)

a. Quelle est la vitesse des électrons après les plaques P_1 ?

b. Quelle est la vitesse des électrons après les plaques P_2 ?

c. Quel est le déplacement vertical total des électrons lorsque ces derniers frappent l'écran ?

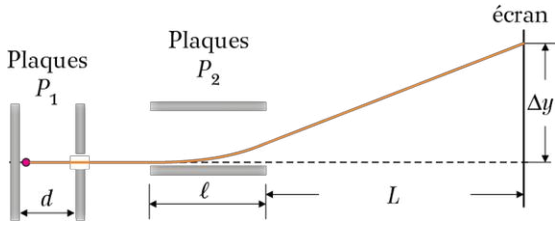


FIGURE 2.76 • Problème 57

P58 Un électron est lancé avec une vitesse de 3 500 km/s selon un angle de 30,00° au-dessus de l'horizontale, dans une région où existe un champ électrique de $870,0 \text{ N/C}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ produit par deux plaques distantes de 2,000 cm et dont la longueur est de 10,00 cm. L'électron commence son parcours au coin inférieur gauche du système de plaques.

a. Est-ce que l'électron frappera l'une ou l'autre des plaques ? Si oui, indiquez laquelle.

b. S'il en frappe une, où le fera-t-il ? S'il n'en frappe aucune, quel est son déplacement vertical à la sortie des deux plaques ?

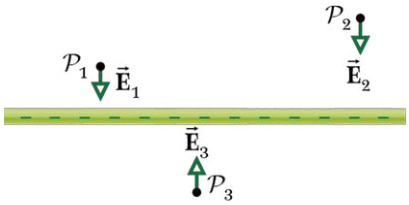
Section 2.8 Un dipôle dans un champ électrique

Q59 Quel est l'angle entre le champ électrique et le moment dipolaire d'un dipôle pour que le moment de force ait un module maximal ?

E60 Une molécule d'eau a un moment dipolaire de $6,17 \times 10^{-30}$ C · m. Quel est le module du moment de force maximal que subit la molécule lorsque celle-ci se trouve dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = 4,0 \times 10^7 \text{ N/C}\,\vec{\boldsymbol{k}}$?

P61 Un dipôle formé d'une charge positive de 5,0 µC en $r_+ = (5,6\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3,8\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ cm et d'une charge négative de −5,0 µC en $r_- = (2,4\vec{\boldsymbol{\imath}} + 1,6\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ cm est situé dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = 320 \text{ N/C}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Calculez le moment de force exercé sur le dipôle.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

2.1	**a.** Vers la gauche **b.** Vers la gauche **c.** Vers le bas	La force est de sens opposé au champ électrique lorsque la charge est négative, car $\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}}$. La vitesse n'est pas un facteur.
	d. Vers la droite **e.** Vers la droite **f.** Vers le haut	La force a la même orientation que le champ pour une charge positive, car $\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}}$. La vitesse n'est pas un facteur.
2.2	**a.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{Q}{L}$	Comme la charge est uniformément distribuée, la charge linéique est une constante.
	b. $q_1 = \dfrac{Q}{3}$; $q_2 = \dfrac{2Q}{3}$	Comme $\ell_2 = 2\ell_1$ et $\ell_1 + \ell_2 = L$, on a $\ell_1 = L/3$ et $\ell_2 = 2L/3$. On trouve la charge avec $q = \lambda\ell$.
2.3	**a.** 	Le champ est orienté vers le plan, car il est chargé négativement.
	b. $E_1 = E_2 = E_3$	Le champ produit par un plan infini uniformément chargé est uniforme, donc le module ne change pas d'un point à l'autre.
2.4	(ii = iii = iv) > (i = v)	Le champ est uniforme entre les plaques (points ii, iii et iv), et il est nul à l'extérieur des plaques (points i et v).
2.5	**a.** $q_1 > 0$ et $q_2 < 0$	Des lignes sont issues de q_1, donc le signe est positif. Des lignes s'arrêtent sur q_2, donc le signe est négatif.
	b. $\lvert q_1\rvert/\lvert q_2\rvert = 2/3$	La charge d'un objet est proportionnelle au nombre de lignes issues de la charge ou qui arrivent sur l'objet.

Chapitre 03

Le théorème de Gauss

Buts du chapitre

Ce chapitre présente une autre méthode permettant de calculer le champ électrique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- d'utiliser la symétrie pour obtenir l'orientation du champ électrique ;
- de calculer le flux électrique à travers une surface ;
- d'appliquer le théorème de Gauss afin de déterminer le module du champ électrique pour certaines configurations ;
- d'obtenir les propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique ;
- de calculer le champ à l'intérieur d'un diélectrique.

Préalables

Ce chapitre poursuit l'étude du champ électrique. Revoyez :

- le champ électrique, étudié aux sections 2.1 et 2.2 ;
- les lignes de champ électrique, abordées à la section 2.6 ;
- les isolants et les conducteurs, présentés à la section 1.3.

La personne dans la cage ne ressent pas l'arc électrique, car elle est protégée par la cage de Faraday.

Gauss, les mathématiques pures et la science appliquée

En 1808, les troupes de Napoléon occupent la ville allemande de Göttingen. Une contribution financière est requise de ses habitants. Le nouveau directeur de l'observatoire fait appel à deux illustres mathématiciens français qui paient à sa place. Pourquoi ? Ce savant dans la trentaine passe déjà pour le plus grand mathématicien d'Europe. C'est Carl Friedrich Gauss.

Fils d'un jardinier et d'une mère illettrée, Gauss fait preuve d'un talent si précoce dans tous les domaines que le seigneur de sa ville natale l'aide à fréquenter l'école et même l'université, où il se consacre aux mathématiques. Appelé de son vivant le « prince des mathématiciens », il ne craindra jamais de passer de la théorie à la pratique.

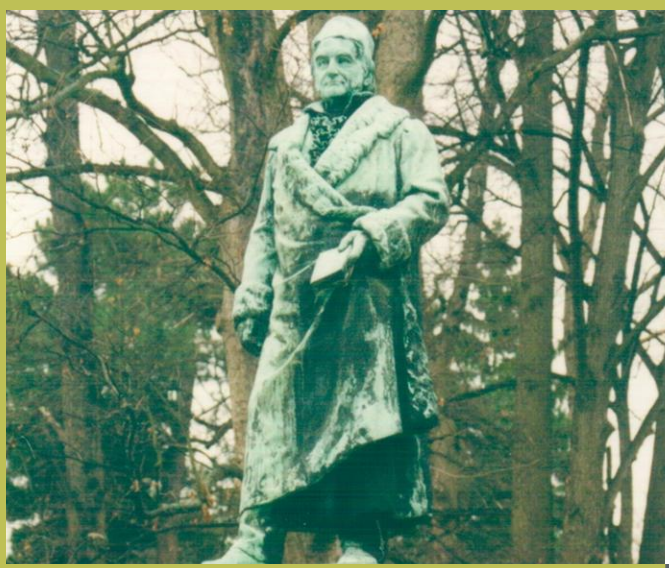
Gauss devient célèbre en retrouvant une planète perdue. En 1801, l'Italien Giuseppe Piazzi est le premier astronome à observer l'astéroïde Cérès. Aujourd'hui considérée comme une planète naine, elle est prise à l'époque pour une nouvelle planète. Pour la repérer de nouveau, il faut se tourner vers Gauss qui parvient à calculer son orbite à partir d'un petit nombre d'observations, en utilisant une nouvelle méthode mathématique dite des moindres carrés. Quand Cérès est retracée, c'est le début d'une carrière éblouissante.

En mathématiques, Gauss soumet des preuves brillantes du théorème fondamental de l'algèbre, il aborde les nombres complexes et il envisage des géométries non euclidiennes. Il contribue aussi à la théorie de l'astronomie et collabore à l'arpentage du territoire allemand. En physique, Gauss révolutionne l'étude du magnétisme terrestre. Même si Coulomb avait démontré que la force entre deux pôles magnétiques varie selon le carré inverse de leur séparation, il restait à quantifier plusieurs autres propriétés magnétiques. En 1831, la découverte de l'induction par Faraday stimule l'intérêt de Gauss ; ce dernier accueille alors avec joie un nouveau professeur de physique à Göttingen : Wilhelm Eduard Weber.

L'alliance du savoir-faire expérimental de Weber et du génie mathématique de Gauss entraîne la création de nouveaux instruments. Les deux savants organisent un réseau d'observatoires magnétiques à l'échelle planétaire, et ils en construisent un à Göttingen. Dans tout l'édifice, le cuivre est substitué au fer pour que rien n'affecte les déterminations du module et de l'orientation du champ magnétique. Les mesures affluent de l'ensemble de ces observatoires et permettent de mieux cerner l'électromagnétisme. Gauss et Weber concluent qu'il n'existe pas de monopôle magnétique, et ils énoncent un principe important : le flux d'un champ électrique qui traverse une surface fermée est proportionnel à la charge électrique totale qu'elle contient. Le concept même de potentiel magnétique est une autre contribution durable du mathématicien, qui s'inspire de son collègue français Siméon Poisson. Gauss prédit même – correctement – l'emplacement des pôles magnétiques de la Terre.

En 1833, Gauss et Weber construisent un des premiers télégraphes électromagnétiques à Göttingen. Quoique leur appareil soit trop coûteux et délicat, il fait partie de la première vague d'applications pratiques de l'électricité. L'utilisation de l'électricité à des fins médicales remontait au 18e siècle et les médecins du 19e siècle exploitent des inventions électriques pour traiter des troubles musculaires, cautériser des blessures ou tenter de repérer des balles à l'intérieur du corps. La galvanoplastie est plus lucrative encore. Dès 1837, le principe est connu : coupler une anode métallique à une cathode constituée d'un objet conducteur qu'on désire recouvrir du métal de l'anode. En faisant passer un courant, on peut plaquer d'argent de la vaisselle et des ustensiles, par exemple. L'arc électrique, lui, est adapté à l'illumination de monuments, de chantiers et de pièces de théâtre à partir de 1847, au moment où la télégraphie électrique s'impose. Jusqu'à l'invention de la dynamo, l'utilisation obligée de piles ou d'accumulateurs limitera cependant l'intérêt des applications de l'électricité.

Lorsque Gauss s'éteint, en 1855, le prince des mathématiciens aura démontré l'utilité des mathématiques dans une variété de domaines, de l'astronomie à la télégraphie.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Le champ électrique est le médiateur de la force électrique. Nous avons expliqué, au chapitre précédent, la méthode pour le calculer à l'aide du calcul intégral. Cette méthode est basée sur la loi de Coulomb et le principe de superposition. Dans ce chapitre, nous utilisons une autre méthode pour calculer le champ électrique, basée sur le théorème de Gauss et le principe de symétrie. Nous allons voir que lorsqu'une distribution de charges possède un haut degré de symétrie, il est possible d'obtenir très facilement le champ électrique. Cette méthode va nous permettre d'obtenir le champ électrique pour des configurations importantes telles que les sphères, les cylindres infinis et les plans infinis.

Lorsque les charges sont immobiles, la loi de Coulomb et le théorème de Gauss sont équivalents, car on peut obtenir la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss ou démontrer le théorème de Gauss à partir de la loi de Coulomb. Par contre, la loi de Coulomb s'applique uniquement en électrostatique, alors que le théorème de Gauss demeure valable lorsque les charges sont en mouvement. Le théorème de Gauss est plus général que la loi de Coulomb.

Nous allons également analyser le champ électrique produit par des conducteurs en équilibre électrostatique et dans les isolants, aussi appelés les *diélectriques*. Le théorème de Gauss va nous permettre d'obtenir certaines propriétés générales. Entre autres, nous verrons que l'intérieur d'un conducteur est isolé des champs électriques extérieurs. La photographie de l'ouverture du chapitre montre un exemple où une personne est en sécurité à l'intérieur d'une cage métallique, qu'on appelle *cage de Faraday*.

3.1 La symétrie

Nous avons vu que le champ électrique est produit par les charges électriques. Il est possible d'obtenir la forme des lignes de champ lorsqu'une distribution a un haut degré de symétrie. La figure 3.1 montre une très longue tige uniformément chargée, que l'on considère comme infinie. Une *symétrie* est une transformation géométrique qu'on effectue sur la distribution et qui ne change pas son aspect. Si vous fermez les yeux et qu'on déplace la tige le long de son axe, vous ne verrez pas de différence.

FIGURE 3.1
Une tige infinie uniformément chargée a une symétrie cylindrique.

La figure 3.2 illustre les quatre transformations de symétrie de la tige :

- une translation le long de l'axe (figure b) ;
- une rotation autour de l'axe (figure c) ;
- une réflexion le long d'un plan qui inclut l'axe (figure d) ;
- une réflexion le long d'un plan perpendiculaire à l'axe (figure e).

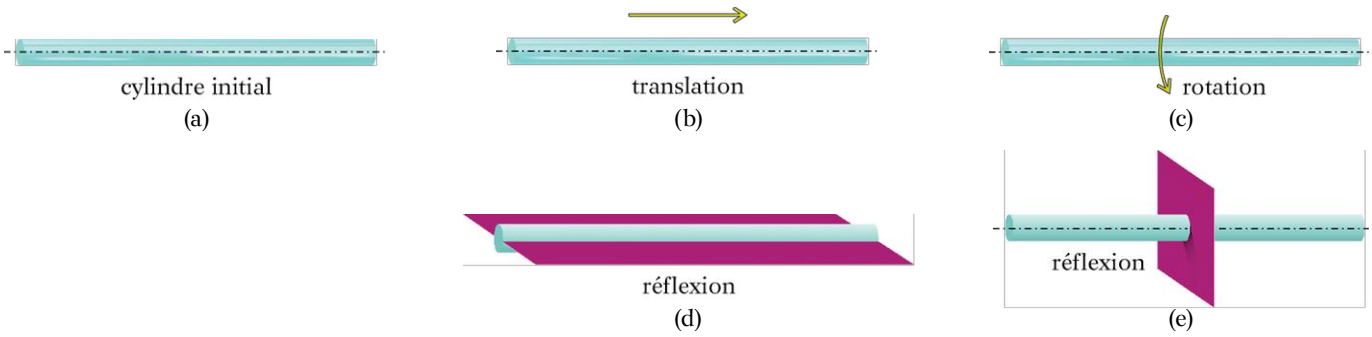


FIGURE 3.2
Les transformations de symétrie pour un cylindre infini

Une configuration de charges qui reste inchangée après ces transformations possède une *symétrie cylindrique*.

Les différentes transformations de symétrie ne changent pas la distribution de charges, ce qui implique que le champ électrique ne change pas au cours des transformations de symétrie.

Le champ électrique doit présenter la même symétrie que la distribution de charges.

Ce résultat restreint grandement la forme du champ électrique possible. Par exemple, la figure 3.3a montre une configuration cylindrique avec le champ électrique qui change le long de l'axe du cylindre. La figure 3.3b montre le même cylindre après une translation le long de son axe. Le champ électrique est différent, ce qui est incompatible avec la symétrie. Donc, le module du champ doit être le même pour tous les points situés à une même distance de l'axe du cylindre.

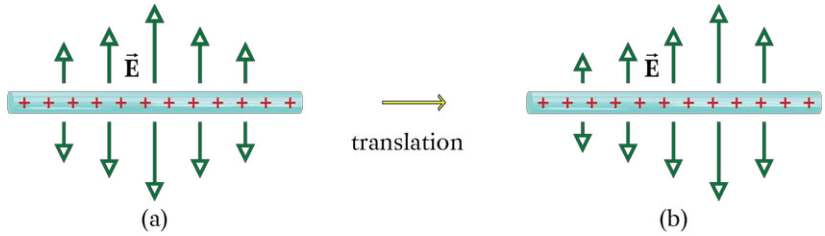


FIGURE 3.3
Une translation du cylindre par rapport à son axe change la forme du champ électrique, ce qui est incompatible avec la symétrie de la distribution. Ce champ n'est pas possible.

La figure 3.4a montre une vue en coupe d'un cylindre, avec un champ électrique hypothétique. Si on fait une rotation de 45°, on obtient la figure 3.4b ; le champ n'est pas le même qu'avant la rotation. Le champ n'est pas compatible avec la symétrie, ce qui indique que ce champ n'est pas possible. Le champ doit avoir le même module à tous les angles autour du cylindre.

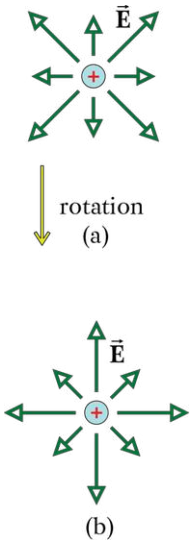


FIGURE 3.4
Une rotation permet de voir que le champ illustré n'est pas possible, car il ne respecte pas la symétrie.

Observons maintenant ce qu'implique la symétrie dans le cas d'une réflexion. La figure 3.5a illustre le cylindre avec un champ électrique oblique. Si on effectue une réflexion par rapport à la ligne pointillée, on obtient la situation de la figure 3.5b ; encore une fois, le champ a changé, ce qui n'est pas compatible avec la symétrie. Le champ illustré n'est pas possible.

Par conséquent, la symétrie cylindrique implique que le champ doit être perpendiculaire à l'axe du cylindre, et que son module doit être le même pour tous les points situés à la même distance de cet axe. La figure 3.6 illustre la seule forme

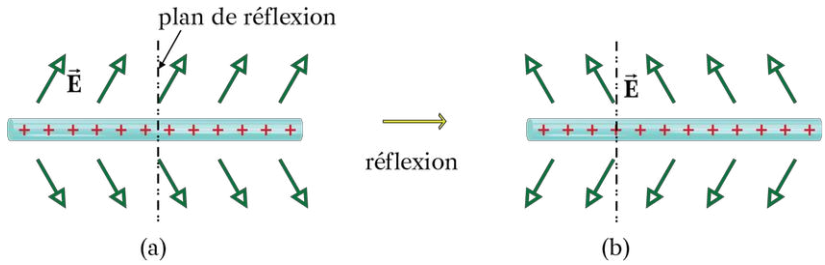


FIGURE 3.5
Une réflexion selon le plan indiqué change la forme du champ électrique, ce qui est incompatible avec la symétrie de la distribution. Ce champ n'est pas possible.

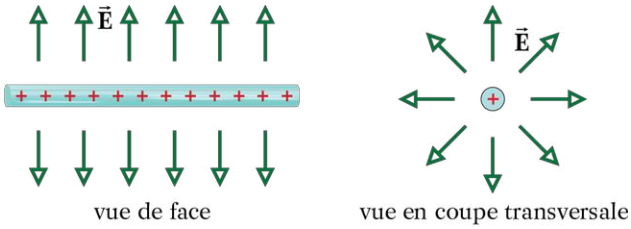


FIGURE 3.6
La symétrie cylindrique impose l'orientation du champ électrique.

de champ électrique qui respecte la symétrie cylindrique. Ce champ a une orientation radiale vers l'extérieur. La symétrie ne donne pas le module du champ, mais l'orientation du champ est connue.

Deux autres symétries permettent d'obtenir l'orientation du champ électrique : la symétrie sphérique et la symétrie plane. Une sphère uniformément chargée est un exemple d'une configuration à *symétrie sphérique*. Les transformations de symétrie sont les suivantes :

- les rotations autour d'un axe qui passe par le centre ;
- les réflexions par rapport à un plan qui inclut le centre.

Comme le montre la figure 3.7, le champ électrique doit être radial et avoir le même module pour tous les points situés à une même distance du centre.

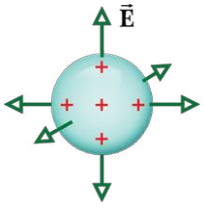


FIGURE 3.7
Pour une distribution à symétrie sphérique, le champ est radial.

Nous avons rencontré une *symétrie plane* lors de l'étude du plan infini à la section 2.5. Les transformations de symétrie sont les suivantes :

- les translations parallèles au plan chargé ;
- les réflexions par rapport au plan chargé ;
- les réflexions par rapport à un plan perpendiculaire au plan chargé.

Le champ électrique doit donc être en direction normale (perpendiculaire) au plan et avoir le même module pour tous les points à la même distance du plan, comme le montre la figure 3.8.

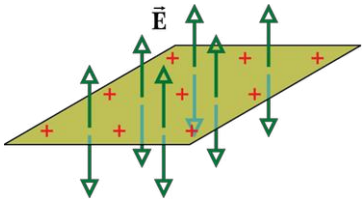
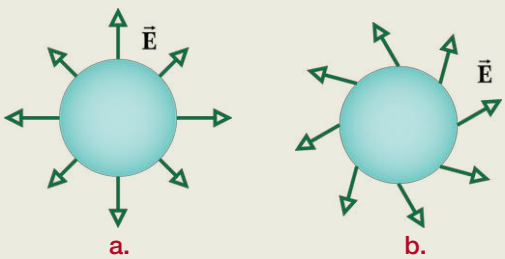


FIGURE 3.8
Pour une distribution à symétrie plane, le champ est normal au plan.

Les résultats de la symétrie cylindrique et de la symétrie plane s'appliquent uniquement dans le cas de cylindres infinis et de plans infinis, ce qui n'existe pas dans la vie réelle. Par contre, ces résultats sont de bonnes approximations dans les situations où on a besoin du champ électrique pour des points à faible distance et éloignés des extrémités de cylindres ou de plans.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.1

La figure ci-dessous présente une coupe en deux dimensions de sphères uniformément chargées et des champs hypothétiques. Indiquez quelle transformation de symétrie permet de conclure que les champs ne sont pas possibles.



3.2 Le flux électrique

Le concept de flux

Le principe de symétrie permet d'obtenir l'orientation du champ électrique, mais ne donne pas la variation du module du champ lorsqu'on s'éloigne d'une distribution. Pour obtenir cette information, on doit d'abord définir une quantité scalaire qui dépend du champ électrique, qu'on appelle le *flux électrique*. Pour comprendre cette notion, nous allons d'abord étudier le flux pour un système plus facile à visualiser : de l'eau qui coule.

Supposons un ruisseau dans lequel coule de l'eau de façon constante. On peut caractériser l'écoulement d'eau par un champ vectoriel, la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ de l'eau. On suppose que l'écoulement est uniforme, ce qui implique que le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ ne change pas d'un point à l'autre du ruisseau. On place un cadre d'aire A dans l'eau, comme le montre la figure 3.9. Pour décrire l'orientation du cadre, on définit le vecteur unitaire normal $\vec{\mathbf{u}}_n$, un vecteur perpendiculaire au plan du cadre.

Dans la figure 3.9a, le plan du cadre est perpendiculaire à la vitesse d'écoulement (le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_n$ est parallèle à $\vec{\mathbf{v}}$), et l'écoulement d'eau à travers le cadre est maximal. Le flux associé au vecteur vitesse est représenté par Φ_v (la lettre grecque phi majuscule, avec un indice pour indiquer qu'il est associé à $\vec{\mathbf{v}}$). Il est donné par l'expression :

$$\Phi_v = vA \ .$$

Une vitesse (en m/s) qui multiplie une aire (en m^2) a pour résultat un volume par unité de temps en m^3/s. Donc, le flux Φ_v représente le débit volumique d'eau qui traverse le cadre.

À la figure 3.9b, le plan du cadre est parallèle à la vitesse d'écoulement ($\vec{\mathbf{u}}_n$ est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$). Dans ce cas, le flux est nul, car l'eau ne traverse pas le cadre. On voit que l'orientation du cadre par rapport à la vitesse d'écoulement agit sur le flux, le volume d'eau par unité de temps qui passe à travers le cadre.

Pour une orientation quelconque du cadre de la figure 3.9c, on peut décomposer le vecteur vitesse selon une composante $\vec{\mathbf{v}}_{\parallel}$, parallèle au cadre, et une composante $\vec{\mathbf{v}}_{\perp}$, perpendiculaire au cadre. Seule la composante perpendiculaire au cadre (et parallèle au vecteur $\vec{\mathbf{u}}_n$) contribue au flux :

$$\Phi_v = v_{\perp} A = (v \cos\theta)\, A = vA \cos\theta \ , \tag{3.1}$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{u}}_n$. Le flux est maximal pour $\theta = 0°$, c'est-à-dire lorsque la vitesse est parallèle au vecteur normal, alors que le flux est nul

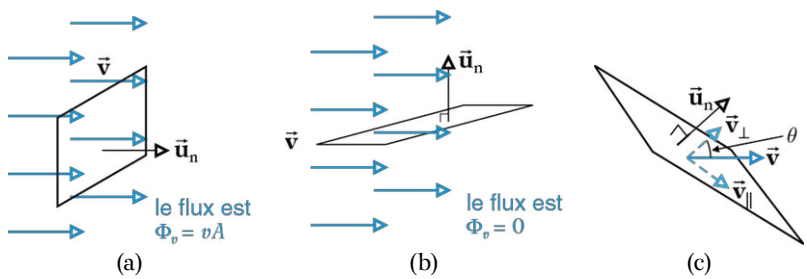


FIGURE 3.9
Le flux d'eau à travers le cadre dépend de l'orientation du cadre par rapport à la vitesse de l'eau.

lorsque $\theta = 90°$, ce qui correspond à la situation illustrée à la figure 3.9b, avec la vitesse perpendiculaire au vecteur normal.

REMARQUE

Il y a une ambiguïté en ce qui concerne le sens du vecteur $\vec{\mathbf{u}}_n$. Pour l'instant, nous choisissons le sens afin que $0° \leq \theta \leq 90°$. Nous verrons plus tard comment éviter cette ambiguïté.

L'équation 3.1 ressemble au résultat d'un produit scalaire entre deux vecteurs. C'est le cas si on définit le *vecteur aire* $\vec{\mathbf{A}} = A\vec{\mathbf{u}}_n$ comme un vecteur dont le module est l'aire du cadre et dont l'orientation est perpendiculaire au plan du cadre. La figure 3.10 donne deux exemples de vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$.

Selon cette définition, le flux de l'eau à travers un cadre est

$$\Phi_v = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \,. \tag{3.2}$$

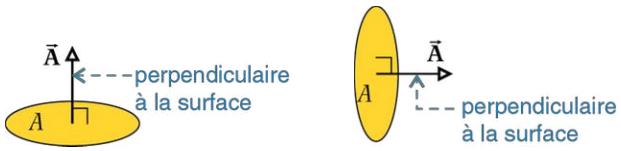


FIGURE 3.10
Deux exemples du vecteur $\vec{\mathbf{A}} = A\vec{\mathbf{u}}_n$

Cette équation est valide pour n'importe quelle surface traversée par le courant d'eau, pas nécessairement un cadre placé dans l'eau.

Le flux électrique pour un champ uniforme

Le champ électrique est aussi un champ vectoriel. On peut définir le flux électrique de la même façon qu'on a défini le flux associé à la vitesse d'écoulement. La figure 3.11 montre un champ électrique uniforme qui traverse une surface d'aire A, décrite par le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ perpendiculaire à la surface. Le *flux électrique* est

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = EA\cos\theta \,. \tag{3.3}$$

Dans le SI, le flux électrique est mesuré en $\mathrm{N \cdot m^2/C}$.

Pour l'écoulement d'eau, le flux représente le volume d'eau qui traverse la surface par unité de temps. On peut se demander ce que représente le flux électrique. Le champ électrique n'est pas un fluide qui coule. C'est ici que le concept de lignes de champ électrique est utile. Selon ce qu'on a vu à la section 2.6, la densité de lignes de champ (le nombre de lignes par unité d'aire) est proportionnelle au module du champ. Si on multiplie le champ par l'aire, on trouve un nombre proportionnel au nombre de lignes. De façon qualitative, on obtient donc ce qui suit.

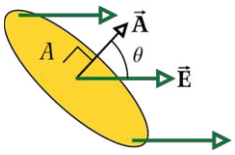


FIGURE 3.11
Le calcul du flux électrique pour un champ uniforme

Le flux électrique à travers une surface est proportionnel au nombre de lignes de champ électrique qui traversent cette surface.

Ceci est illustré à la figure 3.12. Pour faire le calcul du flux, nous allons utiliser les vecteurs champ électrique, mais pour visualiser le flux, nous allons utiliser les lignes de champ.

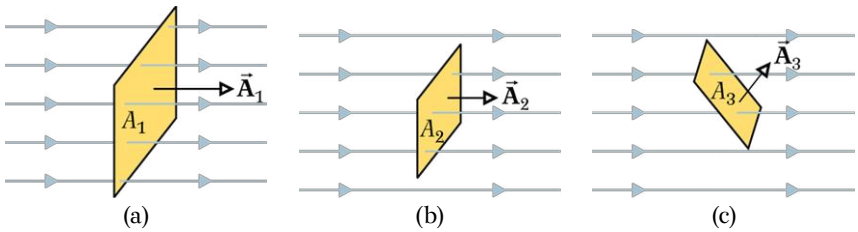


FIGURE 3.12
Le flux électrique est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent la surface. (a) Cinq lignes de champ traversent la surface A_1. (b) La surface A_2 est plus petite ; seulement trois lignes la traversent. (c) La surface A_3 est inclinée ; seulement deux lignes la traversent. Alors, $\Phi_a > \Phi_b > \Phi_c$.

Le flux électrique pour un champ non uniforme

L'équation 3.3 est valable uniquement lorsque le champ est uniforme, c'est-à-dire que ce dernier est le même pour tous les points de la surface. Comment fait-on pour calculer le flux lorsque le champ n'est pas le même le long de la surface ? La méthode consiste à diviser la surface en petits éléments de surface $\delta\vec{\mathbf{A}}$, comme le montre la figure 3.13, à calculer le flux à travers ces surfaces et à faire la somme des flux. Comme le flux est un scalaire, la somme est plus simple à calculer que dans le cas d'une quantité vectorielle comme le champ électrique.

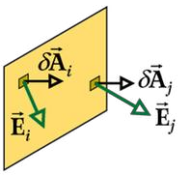


FIGURE 3.13
La surface est divisée en éléments $\delta\vec{\mathbf{A}}_i$ pour le calcul du flux.

À la figure 3.13, nous avons illustré deux éléments de surface, qu'on dénote par leur vecteur aire $\delta\vec{\mathbf{A}}_i$ et $\delta\vec{\mathbf{A}}_j$. Ces éléments de surface sont suffisamment petits pour que le champ ne change pas le long de ces surfaces. Le flux électrique à travers l'élément $\delta\vec{\mathbf{A}}_i$ est

$$\delta\Phi_i = \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \delta\vec{\mathbf{A}}_i \ .$$

Le flux à travers les autres surfaces se calcule de la même façon. On obtient le flux à travers la surface complète en faisant la somme de tous les flux $\delta\Phi_i$:

$$\Phi_E = \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \delta\vec{\mathbf{A}}_i \ .$$

Pour obtenir un résultat exact, on doit prendre la limite $\delta\vec{\mathbf{A}}_i \to \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$, où les éléments de surface deviennent des éléments infinitésimaux. La somme devient alors une *intégrale de surface* :

Flux électrique

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \ . \tag{3.4}$$

L'intégrale de surface est probablement un nouveau type d'intégrale pour vous. L'intégrale ne se fait pas sur un intervalle comme dans le cas de l'intégrale définie, mais sur une surface. De plus, le facteur à intégrer comprend un produit scalaire entre deux vecteurs. Ces intégrales peuvent être complexes à calculer dans des situations générales. Cependant, les intégrales de surface que nous allons rencontrer sont très simples.

Pour vérifier l'équation 3.4, prenons la situation d'un champ électrique uniforme. Dans ce cas, on peut calculer le produit scalaire et sortir le champ de l'intégrale :

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{surface}} E \cos\theta \, dA = E \cos\theta \int_{\text{surface}} dA \, .$$

Il ne reste que l'intégrale de dA, ce qui représente la somme de tous les éléments de surface. Cette somme est simplement égale à l'aire de la surface complète :

$$\int_{\text{surface}} dA = A \, .$$

On obtient donc

$$\Phi_E = E \cos\theta \, A = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \, ,$$

ce qui est bien l'équation 3.3, valable pour les champs électriques uniformes. Remarquez que l'intégrale de surface a été très simple à calculer. Les intégrales de surface que vous allez rencontrer ne seront pas plus difficiles.

Le flux électrique pour une surface courbe

La prochaine étape consiste à calculer le flux électrique à travers une surface courbe, comme celle d'une sphère ou celle d'un cylindre. Pour une surface courbe, le vecteur normal $\vec{\mathbf{u}}_n$ change d'un point à l'autre. On utilise alors la même méthode qu'à la sous-section précédente. On divise la surface en éléments de surface $d\vec{\mathbf{A}}$, comme le montre la figure 3.14. Pour chaque élément, le flux est $d\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$. Le flux total est obtenu en calculant la somme de tous les flux infinitésimaux (donc l'intégrale de surface) :

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \, . \qquad (3.5)$$

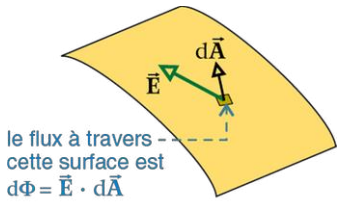


FIGURE 3.14
Pour calculer le flux à travers une surface courbe, on divise la surface en éléments de surface $d\vec{\mathbf{A}}$.

Ceci correspond à l'équation 3.4, qui est l'équation générale pour le calcul du flux à travers une surface quelconque.

L'intégrale de l'équation 3.5 peut être très complexe à calculer pour une surface quelconque traversée par un champ électrique non uniforme. Il y a deux situations, illustrées à la figure 3.15 (*voir la page suivante*), où l'intégrale de surface se calcule très facilement :

- lorsque le champ est normal à la surface ($\theta = 0°$) et que son module E ne change pas pour tous les points de la surface (*voir la figure 3.15a à la page suivante*) ; dans ce cas, le flux est

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{surface}} E \; dA \cos(0°) = E \int_{\text{surface}} dA = EA \, . \qquad (3.6)$$

- lorsque le champ électrique est tangent à la surface ($\theta = 90°$) (*voir la figure 3.15b à la page suivante*) :

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{surface}} E \, dA \cos(90°) = 0 \, , \qquad (3.7)$$

car $\cos(90°) = 0$.

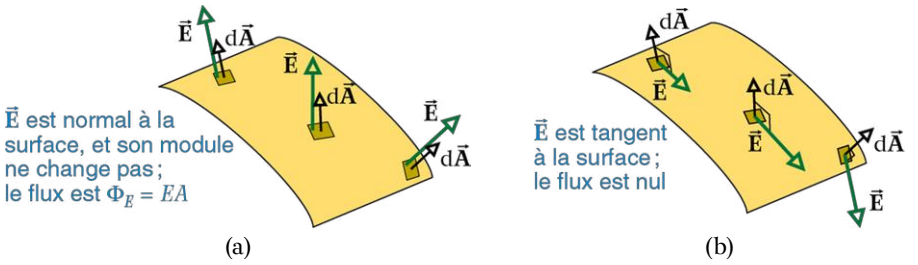


FIGURE 3.15
(a) Le flux pour un champ électrique normal ayant un module constant. (b) Le flux pour un champ tangent à la surface.

Le flux électrique à travers une surface fermée

Le théorème de Gauss met en relation la charge électrique et le flux électrique qui traverse une surface fermée, comme celle d'une sphère ou d'un cube. Une *surface fermée* est une surface qui sépare deux régions de l'espace : l'intérieur et l'extérieur de la surface. Ceci permet de choisir sans ambiguïté le sens du vecteur unitaire $\vec{u}_n$ et du vecteur $d\vec{A}$, comme le montre la figure 3.16.

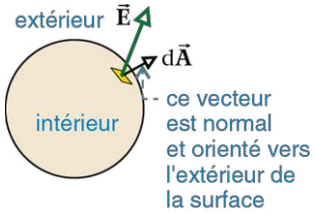


FIGURE 3.16
Le vecteur $d\vec{A}$ pour une surface fermée

Le vecteur $\vec{u}_n$ est un vecteur unitaire, perpendiculaire à une surface et orienté vers l'extérieur de la surface fermée. Le vecteur $d\vec{A}$ est un vecteur infinitésimal orienté vers l'extérieur de la surface fermée.

Avec cette convention, un flux positif indique des lignes de champ qui sortent de la surface, et un flux négatif indique des lignes de champ qui entrent dans la surface.

Le calcul du flux se fait de la même façon, que la surface soit fermée ou non. Comme il est illustré à la figure 3.16, on sépare la surface en éléments de surface infinitésimaux $d\vec{A}$, et on calcule le flux à travers chacun des éléments $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Le flux net est l'intégrale de surface. La seule chose qui change est la notation : on ajoute un cercle dans le symbole d'intégrale pour indiquer que la surface est fermée. On a donc

Flux électrique (surface fermée)

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \ . \qquad (3.8)$$

EXEMPLE 3.1 Le flux électrique à travers un cylindre

Un champ électrique uniforme $\vec{E} = 1{,}200\ \text{kN/C}\,\vec{j}$ traverse un cylindre dont l'axe est parallèle à l'axe des y. Le cylindre a un rayon de 2,00 cm et une longueur de 10,0 cm. Calculez le flux électrique à travers le cylindre.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 3.17 montre le cylindre et le champ électrique. Nous divisons la surface du cylindre en trois parties : le cercle de gauche, la partie courbe du cylindre et le cercle de droite.

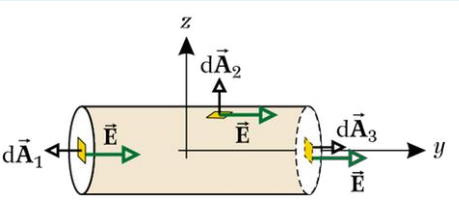


FIGURE 3.17
Le schéma de la situation pour l'exemple 3.1

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$r = 0{,}0200$ m	$\ell = 0{,}100$ m	Φ_E
$\vec{\mathbf{E}} = 1200\ \text{N/C}\,\vec{\boldsymbol{j}}$		

Identifier la clé

La clé est l'équation 3.8 :

$$\Phi_E = \oint_{\text{cylindre}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{surface 1}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_1 + \int_{\text{surface 2}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2 + \int_{\text{surface 3}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_3 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Pour la première surface, $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}_1$ sont opposés, alors $\theta = 180°$. De plus, E est une constante. Nous obtenons

$$\Phi_1 = \int_{\text{surface 1}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_1 = \int_{\text{surface 1}} E\, dA_1 \cos(180°) = -E \int_{\text{surface 1}} dA_1 \ .$$

La surface 1 est un cercle de rayon r. L'intégrale restante donne simplement l'aire de ce cercle, soit $A_1 = \pi r^2$. La première intégrale est donc

$$\Phi_1 = -E\pi r^2 \ . \qquad \text{(ii)}$$

Pour la deuxième intégrale, $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}_2$ sont perpendiculaires, car le champ est tangent à la surface courbe. Alors,

$$\Phi_2 = \int_{\text{surface 2}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2 = \int_{\text{surface 2}} E\, dA_2 \cos(90°) = 0 \ . \qquad \text{(iii)}$$

Finalement, pour la troisième intégrale, $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}$ ont la même orientation, et $\theta = 0°$. Cette intégrale se calcule comme la première :

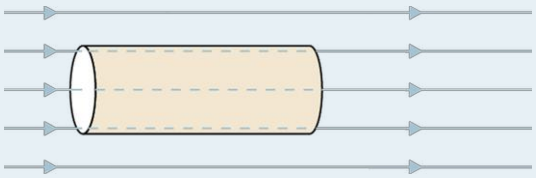
$$\Phi_3 = \int_{\text{surface 3}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_3 = \int_{\text{surface 3}} E\, dA_3 \cos(0°) = E \int_{\text{surface 3}} dA_3 = E\pi r^2 \ . \qquad \text{(iv)}$$

En insérant les résultats des intégrales dans l'équation (i), nous obtenons

$$\Phi_E = (-E\pi r^2) + (0) + (E\pi r^2) = 0{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse finale ne dépend pas du module du champ. Tout champ uniforme aurait produit un flux nul, car le cylindre est une surface fermée. En effet, toutes les lignes de champ qui entrent dans le cylindre par le côté gauche sortent par le côté droit, comme le montre la figure ci-dessous.



3.3 Le théorème de Gauss

À première vue, le calcul du flux électrique peut vous sembler abstrait, mais il est nécessaire pour le théorème de Gauss, qui met en relation le flux électrique à travers une surface fermée et la charge à l'intérieur de cette surface. On obtient ce théorème à partir de la loi de Coulomb. Le théorème de Gauss a deux avantages par rapport à la loi de Coulomb :

- pour certaines configurations possédant un haut degré de symétrie, il permet d'obtenir plus facilement le champ électrique.
- il s'applique à des configurations de charges immobiles et à des charges en mouvement, alors que la loi de Coulomb n'est valable qu'en électrostatique.

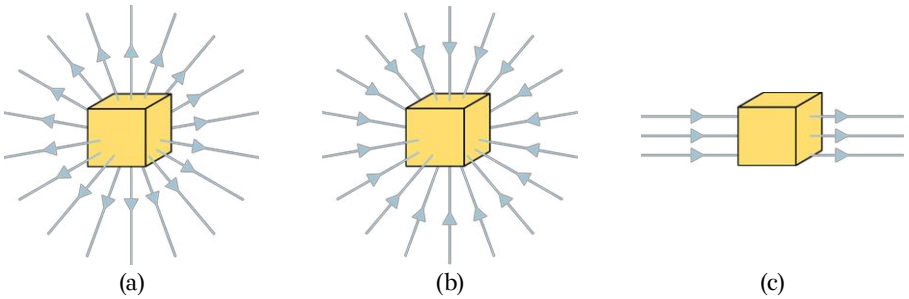


FIGURE 3.18
Les lignes de champ permettent de connaître les charges qui sont dans la boîte.

Pour continuer l'étude du champ électrique, nous allons utiliser la méthode des lignes de champ électrique présentée à la section 2.6. La figure 3.18 montre trois situations où on observe des lignes de champ autour d'une boîte fermée. Sans voir l'intérieur de la boîte, il est possible de deviner qu'il y a des charges électriques à l'intérieur dans les deux premières situations. En effet, les lignes de champ qui sortent de la boîte dans la première situation doivent provenir d'une charge positive. De même, dans la deuxième situation, les lignes de champ qui entrent dans la boîte doivent se rendre à une charge négative. Finalement, dans la troisième situation, on ne peut pas dire si la boîte contient ou non des charges.

Dans les situations précédentes, les lignes de champ qui entrent ou qui sortent de la boîte donnent une information partielle des charges à l'intérieur. Pour analyser des situations, on aura souvent recours à une surface fermée imaginaire, qu'on appelle une *surface de Gauss*. Pour simplifier les figures, on se limitera à faire une coupe transversale plutôt qu'un dessin à trois dimensions.

Pour comprendre la relation entre le flux et la charge, prenons une charge ponctuelle positive q et calculons le flux à travers une surface de Gauss sphérique, de rayon r et centrée sur la charge. La figure 3.19 montre la charge et les lignes de champ. Les lignes de champ ont une symétrie sphérique, tout comme la surface de Gauss utilisée. Selon l'équation 2.3 de la page 33, le champ électrique est radial. Il est donc perpendiculaire à la surface de Gauss, et son module est $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. On obtient alors

$$\Phi_E = \oint_{\text{sphère}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint_{\text{sphère}} E\, dA \cos(0°) = \oint_{\text{sphère}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA\ .$$

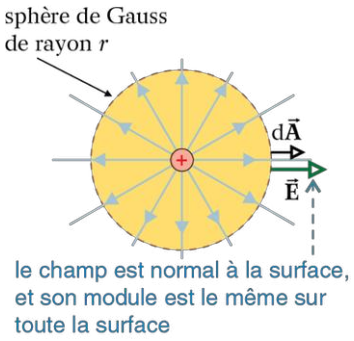


FIGURE 3.19
On calcule le flux électrique à travers la sphère de Gauss.

Le module du champ est le même pour tous les points de la sphère, car ils sont tous à la même distance r de la charge. On peut donc sortir le champ de l'intégrale :

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_{\text{sphère}} dA\ .$$

L'intégrale de surface se résume à la surface complète de la sphère, c'est-à-dire que $A = 4\pi r^2$. Alors,

$$\Phi_E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}\ . \qquad (3.9)$$

REMARQUE

Nous avons calculé le flux électrique pour une charge positive. Pour une charge négative, on obtient un flux négatif, ce qui indique que les lignes de champ entrent dans la surface plutôt que d'en sortir.

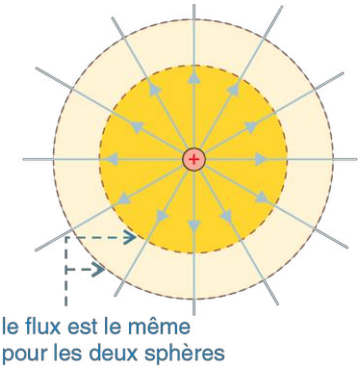


FIGURE 3.20
Les lignes de champ traversent les deux sphères.

L'équation 3.9 est très intéressante. **Le flux ne dépend pas du rayon de la sphère,** mais uniquement de la valeur de la charge à l'intérieur de la sphère. Si on double le rayon de la sphère, l'aire de celle-ci va quadrupler, mais en même temps, le module du champ électrique à la surface de la sphère sera divisé par 4. Les deux effets s'annulent. Il s'agit d'une conséquence de la loi de Coulomb : la force électrique diminue selon $1/r^2$. On peut visualiser ce résultat à l'aide des lignes de champ de la figure 3.20 : les lignes de champ qui traversent la première sphère traversent aussi la deuxième.

Si on entoure la charge ponctuelle d'une surface de Gauss quelconque, il est plus difficile de calculer le flux, car la symétrie ne permet pas de calculer facilement l'intégrale de surface. En effet, le champ électrique n'est pas toujours normal, et son module change d'un point à l'autre de la surface. Par contre, comme le montre la figure 3.21, la surface quelconque est traversée par les mêmes lignes de champ que la surface sphérique. Ceci suggère que le flux ne dépend pas de la forme de la surface fermée.

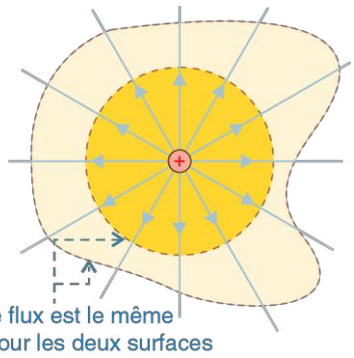


FIGURE 3.21
Les lignes de champ traversent les deux surfaces. Le flux ne change pas.

Dans les derniers exemples, la charge se trouve à l'intérieur de la surface. Si la charge se trouve à l'extérieur, comme à la figure 3.22a, les lignes de champ entrent et ressortent de la surface. Du côté où les lignes de champ entrent, le flux est négatif, alors qu'aux endroits où les lignes sortent, cela produit un flux positif. Au total, le flux net à travers une surface est nul lorsqu'aucune charge ne se trouve à l'intérieur de la surface. De même, s'il y a des charges à l'intérieur, mais que la charge nette est nulle (comme dans le cas d'un dipôle illustré à la figure 3.22b), il y aura alors autant de lignes sortantes que de lignes entrantes. Dans ce cas aussi, le flux net est nul.

Pour terminer, on calcule le flux à travers une surface quelconque lorsqu'il y a N charges présentes, certaines à l'intérieur de la surface (q_1, q_2, …, q_j) et certaines

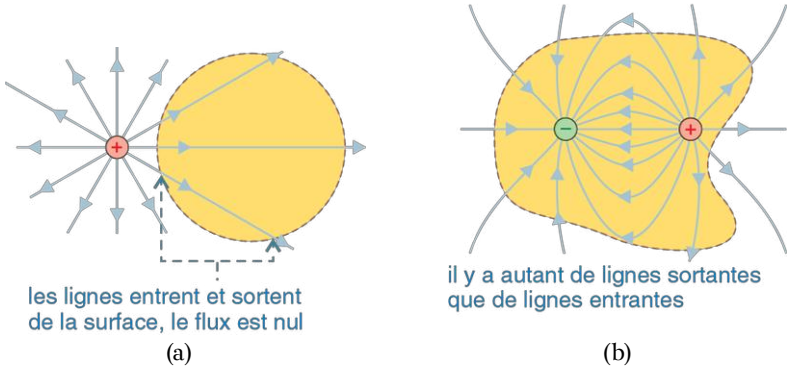


FIGURE 3.22
Deux situations où le flux à travers une surface est nul : (a) la charge est à l'extérieur ; (b) la charge nette à l'intérieur est nulle.

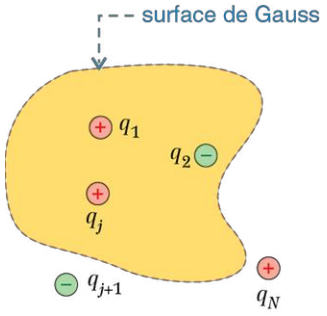


FIGURE 3.23
Seules les charges à l'intérieur contribuent au flux.

à l'extérieur de la surface (q_{j+1}, …, q_N), comme le montre la figure 3.23. Le flux net correspond au flux du champ électrique résultant $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_N$:

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint_{\text{surface}} (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_N) \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$
$$= \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \cdots + \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}}_N \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$
$$= \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N \ .$$

Pour chaque charge à l'intérieur de la surface, le flux est $\Phi_i = q_i/\epsilon_0$, alors que pour chaque charge à l'extérieur, le flux est $\Phi_i = 0$. On remarque que le flux net à travers une surface fermée ne vient que de la charge nette qui se trouve à l'intérieur de cette surface. Soit $Q_{\text{int}} = q_1 + q_2 + \cdots + q_j$ la *charge nette à l'intérieur d'une surface fermée.* On obtient alors

Théorème de Gauss

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \ . \qquad (3.10)$$

C'est le théorème de Gauss, une des nombreuses contributions à la physique et aux mathématiques de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, astronome et physicien allemand, surnommé le *prince des mathématiciens* (*voir la figure 3.24*). On peut résumer le théorème de Gauss par :

> Le flux électrique à travers n'importe quelle surface fermée est proportionnel à la charge nette à l'intérieur de cette surface.

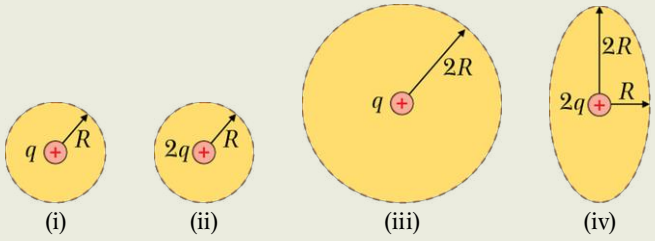
FIGURE 3.24
Carl Friedrich Gauss (1777-1855), l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il a aussi fait des découvertes importantes en astronomie et en physique.

MISE EN GARDE

Le flux ne dépend que de la charge intérieure, mais le champ électrique dans l'équation 3.10 est le champ résultant, produit par les charges à l'intérieur et par les charges à l'extérieur de la surface.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.2

La figure suivante présente quatre charges ponctuelles entourées d'une surface de Gauss. Classez les configurations par ordre croissant du flux traversant la surface.



3.4 Le théorème de Gauss en action

Le théorème de Gauss est très utile pour calculer le champ électrique de systèmes chargés symétriques. Pour une distribution quelconque, on doit utiliser la méthode du chapitre 2, car il est très difficile d'isoler le champ électrique à partir du flux. Par contre, pour les configurations ayant une symétrie sphérique,

cylindrique ou plane, il est possible de choisir une surface de Gauss pour que l'intégrale de surface soit très simple à calculer. Pour ce faire, il faut que **la surface de Gauss ait la même symétrie que la configuration de charges.** En complément, il est possible d'utiliser le principe de superposition si la configuration peut être divisée en plusieurs configurations ayant chacune une des symétries nécessaires. La stratégie suivante indique les étapes importantes pour calculer le module du champ électrique à partir du théorème de Gauss.

STRATÉGIE 3.1 Le champ à l'aide du théorème de Gauss

Illustrer la situation

Dessinez la distribution de charge et tracez le champ électrique selon la symétrie de la distribution.

Décortiquer le problème

- Déterminez la symétrie. Le théorème de Gauss peut être utilisé pour une symétrie sphérique, une symétrie cylindrique ou une symétrie plane.
- Sur le schéma, tracez une surface de Gauss pour laquelle le flux électrique est simple à calculer. L'endroit où on veut obtenir le champ électrique doit être un point sur la surface de Gauss.
- Tracez le vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$, perpendiculaire à la surface de Gauss et orienté vers l'extérieur de la surface. Le vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$ devrait être soit parallèle, soit perpendiculaire au champ électrique.

Identifier la clé

La **clé** est le théorème de Gauss :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Résoudre le problème

- Calculez l'intégrale de surface correspondant au flux. L'intégrale peut être divisée en plusieurs intégrales. Par exemple, l'intégrale sur une surface de Gauss cylindrique est divisée en trois intégrales de surface, qui correspondent aux deux extrémités circulaires et à la partie courbe.
- Calculez la charge Q_{int}, à l'intérieur de la surface de Gauss. Seule la charge à l'intérieur produit un flux net à travers la surface de Gauss.
- Insérez le flux et la charge Q_{int} dans le théorème de Gauss et isolez le module du champ électrique E.
- Ajoutez un vecteur unitaire si c'est le champ électrique qui est recherché.

Valider la réponse

Vérifiez si la réponse a du sens, si l'orientation du champ respecte la symétrie de la distribution.

Les configurations sphériques

La figure 3.25 illustre une sphère chargée. Cette configuration a une symétrie sphérique si la charge est uniformément distribuée ou si la charge volumique est

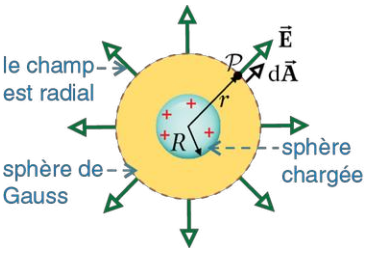


FIGURE 3.25
Pour une configuration sphérique, on utilise une surface de Gauss sphérique.

une fonction de la distance par rapport au centre de la sphère. La sphère peut être une sphère pleine ou une sphère creuse. Comme on l'a vu à la section 3.1, le champ doit être radial. Pour obtenir le module du champ au point $\mathcal{P}$, situé à une distance r du centre de la sphère, on calcule le flux à travers une surface de Gauss sphérique, de rayon r. Pour cette surface, le champ est parallèle à l'élément $d\vec{\mathbf{A}}$, et son module ne peut pas changer pour tous les points de la surface de Gauss, sinon le champ ne respecterait pas la symétrie sphérique de la distribution de charge.

EXEMPLE 3.2 Le champ d'une sphère chargée

Une sphère de rayon R porte une charge Q uniformément distribuée. Quel est le champ électrique à une distance r à l'extérieur de la sphère ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous présentons à la figure 3.26 la sphère chargée entourée d'une sphère de Gauss de rayon r. Le point où nous voulons obtenir le champ est donc sur la surface de Gauss.

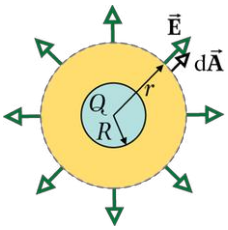


FIGURE 3.26
La surface de Gauss pour l'exemple 3.2

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
Q, R	$\vec{\mathbf{E}}$

Nous choisissons une surface de Gauss sphérique de rayon r. Par symétrie, le champ doit être radial et son module ne doit pas changer le long de la surface de Gauss.

Identifier la clé

La **clé** est le théorème de Gauss, donné par l'équation 3.10 :

$$\Phi_E = \oint_{\text{sphère}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'intégrale de surface. Comme le champ est radial, il est parallèle à l'élément $d\vec{\mathbf{A}}$ ($\theta = 0°$) :

$$\Phi_E = \oint_{\text{sphère}} E \, dA \cos(0°) .$$

De plus, le module du champ ne change pas sur la surface de Gauss. On peut le sortir de l'intégrale :

$$\Phi_E = E \oint_{\text{sphère}} dA = EA_{\text{sphère}} = E4\pi r^2 , \qquad \text{(ii)}$$

où $A_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$ est l'aire de la **sphère de Gauss.** On calcule ensuite la charge à l'intérieur de cette sphère de Gauss. Ceci est simplement Q, la charge de la sphère chargée :

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} . \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons les équations (ii) et (iii) dans l'équation (i) :

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

Comme le champ est radial, nous obtenons

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{\mathbf{u}}_r . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons à la question en donnant un vecteur. Cette réponse est valable pour $r > R$, c'est-à-dire pour les points à l'extérieur de la sphère chargée.

L'exemple précédent est très intéressant : le champ électrique produit par une sphère uniformément chargée est le même que le champ produit par une charge ponctuelle Q qui serait placée au centre de celle-ci. On peut dire que pour les points à l'extérieur de la sphère, la sphère est équivalente à une charge ponctuelle.

Il est possible de calculer le champ produit par une sphère à l'aide de l'équation 2.21 utilisant le calcul intégral. Cependant, cette dernière méthode demande un calcul algébrique plus long et une bonne expérience dans le calcul des intégrales. La méthode du théorème de Gauss est plus simple parce que la symétrie nous permet d'obtenir l'orientation du champ sans calcul.

EXEMPLE 3.3 À l'intérieur d'une sphère

Une sphère isolante a une charge Q uniformément distribuée dans son volume et un rayon R. Calculez le champ pour un point à l'intérieur de la sphère et situé à une distance r du centre.

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous avons encore besoin d'une surface de Gauss sphérique concentrique de rayon r, mais cette fois-ci, la surface de Gauss est plus petite que la sphère chargée (*voir la figure 3.27*).

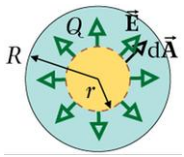


FIGURE 3.27
La sphère de Gauss a un rayon r plus petit que le rayon R de la sphère chargée.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
Q, R	$\vec{\mathbf{E}}$

La distribution de charge a une symétrie sphérique. Le champ doit être radial et son module doit dépendre de r, la distance par rapport au centre de la sphère. Nous avons choisi une surface de Gauss sphérique pour que le champ soit parallèle à $d\vec{\mathbf{A}}$ sur toute la surface.

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge volumique ρ est uniforme :

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} . \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La clé est le théorème de Gauss :

$$\Phi_E = \oint_{\text{sphère}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Le champ est parallèle à $d\vec{\mathbf{A}}$, et son module ne change pas le long de la surface de Gauss. Alors,

$$\oint_{\text{sphère}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint_{\text{sphère}} E\, dA \cos(0°)$$

$$= E \oint_{\text{sphère}} dA = EA = E4\pi r^2 . \qquad \text{(iii)}$$

Il faut faire attention à Q_{int}, qui représente la charge à l'intérieur de la sphère de Gauss et non la charge totale. Nous calculons cette charge à partir de la charge volumique et du volume de la sphère de Gauss :

$$Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{Gauss}} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3} , \qquad \text{(iv)}$$

où nous avons utilisé l'équation (i). Nous insérons les équations (iii) et (iv) dans l'équation (ii) :

$$E4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3} \Rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} .$$

Le champ électrique à l'intérieur est alors

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{\mathbf{u}}_r . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien à la question. Le résultat montre que le champ est nul au centre de la sphère. De plus, le module du champ augmente de façon linéaire avec la distance, jusqu'à la surface de la sphère. Pour un point à la surface $r = R$, le résultat du présent exemple donne la même expression que l'exemple précédent, c'est-à-dire $E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Les résultats des deux derniers exemples sont résumés dans le graphique de la figure 3.28.

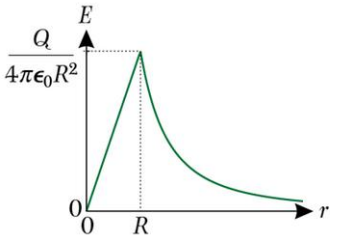


FIGURE 3.28
Le module du champ produit par une sphère chargée en fonction de la distance par rapport au centre de la sphère

Les configurations cylindriques

Pour avoir une configuration à symétrie cylindrique, on a besoin d'un cylindre infini, dont la charge volumique est uniforme, ou d'une fonction de la distance r à l'axe. Le cylindre peut être plein ou creux, avec la charge répartie dans tout son volume ou simplement sur sa surface. Comme nous avons vu à la section 3.1, le champ électrique doit être radial, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe du cylindre, et son module doit être le même pour tous les points situés à la même distance r de l'axe. Pour calculer le module du champ au point $\mathcal{P}$ à une distance r de l'axe, on choisit une surface de Gauss cylindrique, de rayon r et de longueur ℓ, comme il est illustré à la figure 3.29. L'axe du cylindre de Gauss doit coïncider avec l'axe du cylindre chargé pour que l'intégrale de surface soit très simple à calculer.

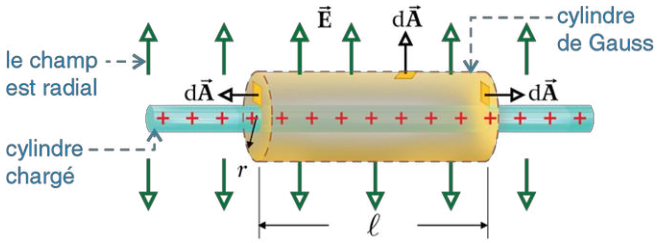


FIGURE 3.29
La surface de Gauss pour les configurations cylindriques

EXEMPLE 3.4 Le champ produit par un cylindre

Un très long cylindre a un rayon de 10,0 cm, et il porte une charge distribuée uniformément sur sa surface. La charge surfacique est $\sigma = -4{,}50 \times 10^{-6}$ C/m^2.

a. Quel est le champ électrique à une distance de 7,00 cm de l'axe du cylindre ?

b. Quel est le champ électrique à une distance de 12,0 cm de l'axe du cylindre ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

Le point $\mathcal{P}$ est à l'intérieur du cylindre. Nous allons donc calculer le flux à travers un cylindre de rayon $r = 7{,}00$ cm et de longueur ℓ. La figure 3.30 montre le cylindre et la surface de Gauss, selon une représentation en trois dimensions et selon une coupe transversale.

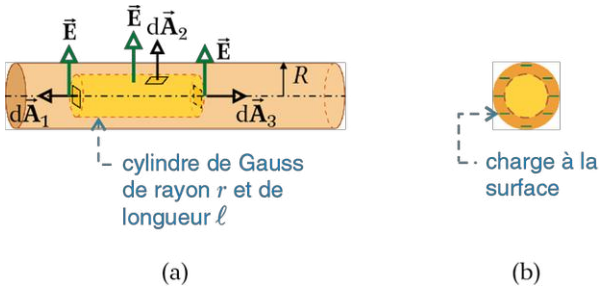


FIGURE 3.30
(a) La surface de Gauss pour l'exemple 3.4a. (b) coupe transversale.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$R = 0{,}100$ m	$\vec{E}$
$\sigma = -4{,}50 \times 10^{-6}$ C/m^2	
$r = 0{,}0700$ m	

Le champ doit être radial, et son module ne doit pas changer le long de la surface courbe du cylindre de Gauss.

Identifier la clé

La clé est le théorème de Gauss :

$$\Phi_E = \oint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

L'intégrale de surface fermée peut être divisée en trois intégrales de surface : pour le cercle de gauche, la partie courbe (le côté du cylindre) et le cercle de droite :

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 .$$

Comme le montre la figure 3.30, $\vec{E}$ et d$\vec{A}_1$ sont perpendiculaires. $\vec{E}$ et d$\vec{A}_3$ le sont également. Alors,

$$\Phi_1 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_{\text{cercle}} E\, dA_1 \cos(90°) = 0$$

$$\Phi_3 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = \int_{\text{cercle}} E\, dA_3 \cos(90°) = 0 .$$

De plus, $\vec{E}$ et d$\vec{A}_2$ ont la même orientation, et le module de $\vec{E}$ doit être constant le long de la surface de Gauss selon la symétrie cylindrique. Alors,

$$\Phi_2 = \int_{\text{côté}} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_{\text{côté}} E\, dA \cos(0°)$$

$$= E \int_{\text{côté}} dA = EA_{\text{côté}} = E\,(2\pi r\ell) . \qquad \text{(ii)}$$

Selon la coupe transversale de la figure 3.30a, il n'y a pas de charge à l'intérieur du cylindre de Gauss, car la charge est limitée à la surface du cylindre chargé. Alors,

$$Q_{\text{int}} = 0 . \qquad \text{(iii)}$$

Nous obtenons donc

$$\Phi_E = E\,(2\pi r\ell) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}\ \text{N/C} . \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le champ est nul même si le point $\mathcal{P}$ n'est pas exactement au centre du cylindre. C'est la conséquence de la symétrie cylindrique et du flux nul.

SOLUTION b.

Illustrer la situation

Pour trouver le champ à une distance $r = 12{,}0$ cm, il faut une surface de Gauss cylindrique de rayon $r = 12{,}0$ cm, comme le montre la figure 3.31.

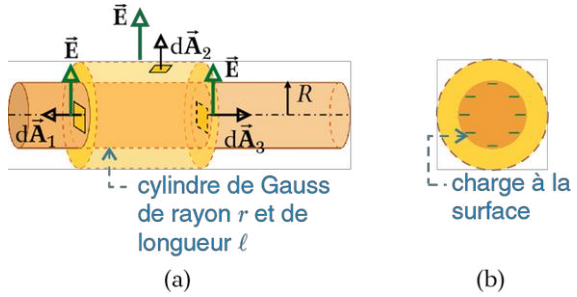


FIGURE 3.31
La surface de Gauss pour l'exemple 3.4b. (b) La coupe transversale.

Décortiquer le problème

Le champ doit être radial, et son module ne doit pas changer le long de la surface courbe du cylindre de Gauss.

Connues	Inconnue
$R = 0{,}100$ m	$\vec{E}$
$\sigma = -4{,}50 \times 10^{-6}$ C/m^2	
$r = 0{,}120$ m	

Identifier la clé

La clé est le théorème de Gauss :

$$\Phi_E = \oint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

L'intégrale de surface se calcule de la même façon que dans la partie a. :

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_1 = \int_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_1 = \int_{\text{cercle}} E\, dA_1 \cos(90°) = 0$$

$$\Phi_2 = \int_{\text{côté}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2 = \int_{\text{côté}} E\, dA \cos(0°)$$

$$= E \int_{\text{côté}} dA = EA_{\text{côté}} = E\,(2\pi r\ell)$$

$$\Phi_3 = \int_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_3 = \int_{\text{cercle}} E\, dA_3 \cos(90°) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_E = E\,(2\pi r\ell)\,. \qquad \text{(v)}$$

Remarquez que l'intégrale de surface dépend du **rayon de la surface de Gauss.**

Pour Q_{int}, nous utilisons la charge surfacique du cylindre et son rayon, en plus de la longueur de la surface de Gauss, car la partie du cylindre chargé, comprise dans la surface de Gauss a une longueur ℓ :

$$Q_{\text{int}} = \sigma\,(2\pi R\ell)\,. \qquad \text{(vi)}$$

Ici, nous utilisons le rayon R du cylindre chargé, car la charge est à la surface de ce cylindre, comme le montre la vue en coupe de la figure 3.31b. En insérant les résultats dans l'équation (iv), nous obtenons

$$E2\pi r\ell = \frac{\sigma 2\pi R\ell}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r\,.$$

Il ne reste qu'à insérer les valeurs :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{-4{,}50\times10^{-6}\ \text{C/m}^2 \times 0{,}100\ \text{m}}{8{,}854\times10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)\times 0{,}120\ \text{m}}\vec{\mathbf{u}}_r$$

$$= -4{,}24\times10^5\ \text{N/C}\,\vec{\mathbf{u}}_r\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le résultat a du sens. Le signe négatif indique que le champ est orienté vers le cylindre. Remarquez que dans les schémas et les équations, nous avons tenu pour acquis que le champ était orienté vers l'extérieur. Il est important d'ajouter le signe négatif seulement à la fin du calcul pour éviter d'insérer ce signe deux fois. De plus, il est préférable de résoudre le problème de façon algébrique, avec des paramètres qui peuvent être positifs ou négatifs, et d'insérer les valeurs à la fin du problème.

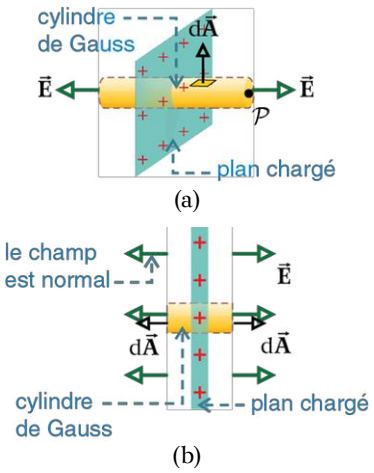


FIGURE 3.32
La surface de Gauss pour un plan infini : (a) vue en perspective ; (b) vue en coupe transversale.

Dans le dernier exemple, seules les charges à l'intérieur de la surface contribuent au flux électrique. Pour cette raison, Q_{int} est proportionnelle à la longueur ℓ du cylindre de Gauss. Cependant, toutes les charges du cylindre contribuent au champ électrique. Les charges à l'extérieur de la surface de Gauss sont essentielles pour que le champ soit radial. Si le cylindre avait une longueur ℓ, on ne pourrait pas utiliser le théorème de Gauss pour obtenir le champ électrique, car la configuration n'aurait pas la symétrie cylindrique.

Les configurations à symétrie plane

Un plan chargé a une symétrie plane s'il est infini et si sa charge surfacique est uniforme. Il doit aussi avoir une épaisseur négligeable. Dans ce cas, la symétrie plane impose un champ électrique normal au plan, et son module doit être le même pour les points situés à la même distance du plan. Pour calculer le module du champ au point $\mathcal{P}$, on utilise comme surface de Gauss un cylindre centré par rapport au plan et dont l'axe est perpendiculaire au plan. Le cylindre de Gauss s'étend de chaque côté du plan, et le point $\mathcal{P}$ se trouve sur une des surfaces circulaires. La figure 3.32 illustre cette surface de Gauss.

EXEMPLE 3.5 Une charge au-dessus d'un plan

Un plan infini, parallèle au plan des xy, a une charge surfacique $\sigma = 2{,}80 \times 10^{-4}$ C/m^2.
Une charge ponctuelle $q = 8{,}90$ µC est placée à une distance de 4,50 cm au-dessus du plan.
Calculez la force électrique exercée sur la charge par le plan.

SOLUTION

Illustrer la situation

Pour calculer le champ électrique à la position de la charge ponctuelle, nous traçons une surface de Gauss cylindrique qui s'étend de chaque côté du plan et qui est centrée par rapport au plan (*voir la figure 3.33*). L'aire transversale du cylindre est égale à A.

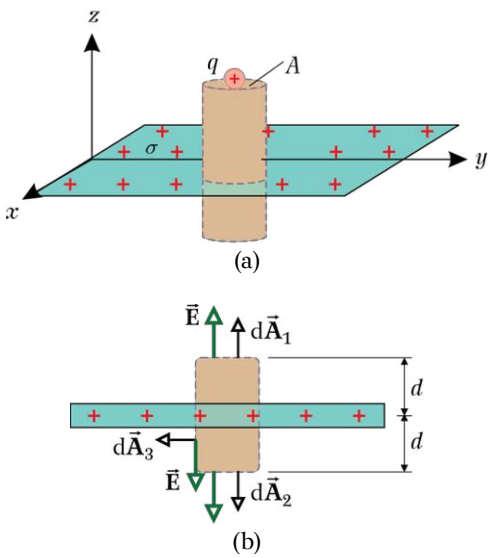


FIGURE 3.33
La surface de Gauss pour l'exemple 3.5 : (a) vue en perspective ; (b) vue en coupe transversale.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\sigma = 2{,}80 \times 10^{-4}$ C/m^2	$\vec{\mathbf{F}}$
$q = 8{,}90 \times 10^{-6}$ C	
$d = 4{,}50$ cm	

La configuration a une symétrie plane. Le champ doit être normal au plan et avoir le même module à une distance d de chaque côté du plan.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 2.2 de la page 31 pour trouver la force électrique sur une charge ponctuelle :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique :

$$\Phi_E = \oint_{\text{cylindre}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

La surface de Gauss peut être divisée en trois surfaces : les deux bouts et le côté du cylindre :

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \,.$$

Pour la première surface, $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}_1$ ont la même orientation, et le module de E ne change pas sur la surface. Alors,

$$\Phi_1 = \int_{\text{bout}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_1 = \int_{\text{bout}} E\, dA_1 \cos(0°)$$
$$= E \int_{\text{bout}} dA_1 = EA \,.$$

On obtient exactement le même résultat pour le deuxième bout :

$$\Phi_2 = \int_{\text{bout}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2 = \int_{\text{bout}} E\, dA_2 \cos(0°)$$
$$= E \int_{\text{bout}} dA_2 = EA \,.$$

Pour le côté du cylindre, $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}_3$ sont perpendiculaires :

$$\Phi_3 = \int_{\text{côté}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_3 = \int_{\text{côté}} E\, dA_3 \cos(90°) = 0 \,.$$

La charge Q_{int} se calcule en multipliant la charge surfacique et l'aire du plan qui intersecte la surface de Gauss. Cette aire est égale à A. Alors,

$$\Phi_E = EA + EA + 0 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_{\text{n}} \,. \qquad \text{(iii)}$$

Pour un point au-dessus du plan, le vecteur normal correspond au vecteur $\vec{\boldsymbol{k}}$. Il reste à insérer le résultat de l'équation (iii) dans l'équation (i) :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\boldsymbol{k}} \\ &= \frac{(8{,}90\times10^{-6}\ \text{C})(2{,}80\times10^{-4}\ \text{C/m}^2)}{2\,(8{,}854\times10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2))}\vec{\boldsymbol{k}} \\ \vec{\mathbf{F}} &= 141\ \text{N}\,\vec{\boldsymbol{k}}\,. \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse

Remarquez que l'équation (iii) est équivalente à l'équation 2.28, que nous avons obtenue au chapitre 2 en utilisant le calcul d'intégrale. La méthode du théorème de Gauss est beaucoup plus simple.

Pour terminer, on peut dire que le théorème de Gauss est toujours valable, mais qu'il est utile pour calculer le champ électrique dans un nombre limité de configurations. Pour les configurations à symétrie sphérique, cylindrique ou plane, le champ électrique est obtenu rapidement avec le théorème de Gauss. Pour les autres configurations, on doit utiliser la méthode expliquée au chapitre 2, car c'est une méthode générale.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.3

À l'aide du théorème de Gauss, on veut calculer le champ électrique à l'extérieur d'un cube dont la charge volumique est uniforme. Quelle forme de la surface de Gauss doit-on utiliser ?

3.5 Les conducteurs en équilibre électrostatique

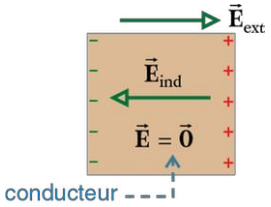


FIGURE 3.34
Dans un conducteur en équilibre électrostatique, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \vec{\mathbf{0}}$

La figure 3.34 montre un conducteur neutre dans un champ électrique extérieur $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$. Comme on l'a vu à la section 1.3, un conducteur possède des électrons qui sont libres de se déplacer à l'intérieur de celui-ci. Ces électrons vont subir une force électrique opposée au champ électrique (leur charge est négative) et ils vont s'accumuler sur la surface du conducteur. Ceci laisse des ions positifs à l'autre extrémité du conducteur. Cette séparation de charge produit un champ supplémentaire $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$, le *champ induit*, qui est opposé au champ extérieur. Le mouvement des électrons va se poursuivre jusqu'à ce que $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$ annule complètement $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ à l'intérieur du conducteur ($\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \vec{\mathbf{0}}$). Le conducteur est alors en *équilibre électrostatique*. On obtient :

Condition d'équilibre électrostatique pour un conducteur

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est nul.

Cet énoncé est aussi valable si le conducteur est chargé, et la forme du conducteur n'a pas d'incidence sur cet énoncé. De plus, le mouvement des électrons est très rapide, ce qui fait en sorte que l'équilibre est atteint après une fraction de seconde.

La charge et le champ près de la surface

Le théorème de Gauss nous permet de connaître la façon dont se distribuent les charges du conducteur. Pour ce faire, on choisit une surface de Gauss qui est tout juste à l'intérieur du conducteur (*voir la figure 3.35*). Comme on vient de le voir, le champ électrique est nul dans tout le conducteur. Donc, le flux à travers la surface est nul. Selon le théorème de Gauss,

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0 \ .$$

Il n'y a pas de charge à l'intérieur du conducteur. **Toute la charge du conducteur doit se répartir sur la surface extérieure.**

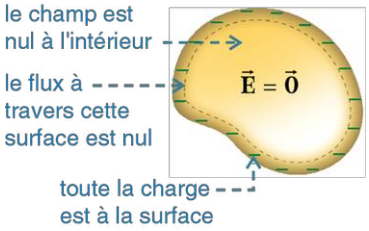


FIGURE 3.35
Une surface de Gauss est placée tout juste à l'intérieur du conducteur chargé.

Le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur, mais pas à l'extérieur. Pour que les charges à la surface soient à l'équilibre, il faut que la composante du champ tangentielle à la surface soit nulle. Si ce n'est pas le cas, une force tangentielle s'exerce sur les électrons, et ces derniers vont se déplacer jusqu'à ce que cette composante soit nulle. De cette façon, **le champ tout juste à l'extérieur du conducteur est normal à la surface,** c'est-à-dire perpendiculaire, comme le montre la figure 3.36.

Pour trouver le module du champ tout juste à l'extérieur, on utilise une surface de Gauss cylindrique, dont l'extrémité transversale traverse à peine le conducteur, et l'aire transversale A est très petite (*voir la figure 3.37*). Le flux à travers cette surface est simplement EA, car le champ traverse uniquement la petite surface transversale. En effet, le champ est nul à l'intérieur du conducteur (ce qui donne un flux nul pour la partie de la surface de Gauss à l'intérieur du conducteur), et il est perpendiculaire à l'élément de surface $d\vec{A}$ de la surface courbe du cylindre.

Soit σ la charge surfacique du conducteur à l'endroit où le cylindre traverse le conducteur. Alors, selon le théorème de Gauss,

$$\Phi_E = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ .$$

Donc, le champ électrique tout juste à l'extérieur du conducteur est

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_n \qquad \text{(tout juste à l'extérieur)} \ , \qquad (3.11)$$

où $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'extérieur de celle-ci. De façon générale, la charge surfacique n'est pas uniforme sur toute la surface du conducteur. Il faut prendre la valeur de σ vis-à-vis de l'endroit où on veut déterminer le champ électrique.

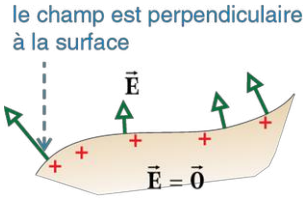


FIGURE 3.36
Le champ électrique à la surface d'un conducteur

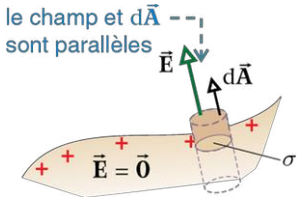


FIGURE 3.37
La surface de Gauss cylindrique perpendiculaire à la surface du conducteur

Une cavité à l'intérieur d'un conducteur

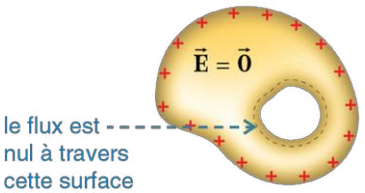


FIGURE 3.38
Un conducteur avec une cavité

Supposons maintenant qu'un conducteur chargé possède une cavité vide. Le champ doit être nul dans le conducteur, mais est-il nul aussi dans la cavité ? Pour répondre à cette question, on entoure la cavité d'une surface de Gauss, comme le montre la figure 3.38. Celle-ci est tout juste dans le conducteur, ce qui implique que le champ est nul sur toute la surface. Selon le théorème de Gauss,

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0 \, .$$

Il n'y a donc pas de charge à l'intérieur de la surface de Gauss. Comme la cavité est vide, cela indique qu'il n'y a pas de charge sur la paroi de la cavité. Toute la charge excédentaire du conducteur se trouve sur sa surface extérieure.

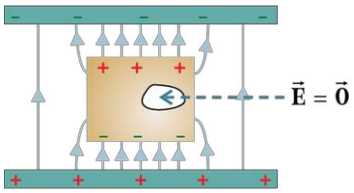


FIGURE 3.39
Une cage de Faraday simple

Comme le champ à l'intérieur du conducteur est nul, et il n'y a pas de charge sur la surface de la cavité, cela implique que le champ à l'intérieur de la cavité doit être nul, quel que soit le champ extérieur. Il s'agit d'un résultat important qui permet d'isoler un objet d'un champ électrique extérieur en plaçant l'objet à l'intérieur d'un conducteur. La figure 3.39 montre les lignes de champ autour d'un conducteur ayant une cavité.

Une *cage de Faraday* est constituée de murs en grillage métallique. Les électrons du grillage se déplacent en fonction du champ électrique extérieur de telle sorte que le champ est nul à l'intérieur de la cage. La photo de l'ouverture du chapitre est une illustration spectaculaire de ce dispositif. Les cages de Faraday sont utilisées pour protéger les instruments sensibles aux champs électriques.

Si une charge q se trouve dans la cavité du conducteur, il y aura alors un champ électrique à l'intérieur de celle-ci. En reprenant la surface de Gauss qui entoure la cavité, comme le montre la figure 3.40, on trouve de nouveau que $Q_{\text{int}} = 0$, car le champ doit rester nul à l'intérieur du conducteur. Ceci implique qu'une charge $-q$ va se répartir sur la paroi intérieure du conducteur. Par exemple, si une charge $+q$ positive est à l'intérieur de la cavité, elle va attirer des électrons du conducteur sur la paroi de la cavité.

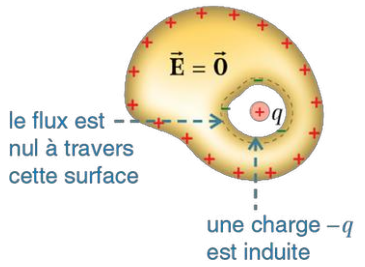


FIGURE 3.40
Une charge dans une cavité d'un conducteur

La charge $-q$ qui s'accumule sur la paroi de la cavité fait partie de la charge du conducteur. Pour un conducteur neutre, les électrons qui se déplacent vont laisser des ions positifs sur la surface extérieure. Si le conducteur a une charge nette Q_{cond} non nulle, cette charge sera égale à la somme des charges sur chacune des parois. Comme le conducteur n'est pas en contact avec d'autres objets, sa charge doit être conservée.

En résumé, on peut trouver les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique à l'aide de la technique suivante :

TECHNIQUE 3.1 Un conducteur en équilibre électrostatique

1. À l'intérieur du conducteur, le champ électrique est nul.
2. La charge excédentaire se trouve uniquement sur la surface extérieure du conducteur.
3. Le champ tout juste à l'extérieur du conducteur est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n ,$$

où σ est la charge surfacique à cet endroit.

4. Si un conducteur possède une cavité, celle-ci est isolée des champs électriques extérieurs.
5. Si une cavité d'un conducteur contient une charge q, il y a une charge induite opposée $(-q)$ sur la paroi de la cavité.

EXEMPLE 3.6 La charge d'une sphère conductrice creuse

Une sphère conductrice creuse a un rayon intérieur $R_1 = 2{,}00$ cm et un rayon extérieur $R_2 = 5{,}00$ cm. La sphère a une charge $Q = 2{,}50$ µC. Au centre de la cavité, il y a une charge ponctuelle $q = 4{,}50$ µC.

a. Calculez la charge surfacique sur la surface intérieure de la sphère creuse.
b. Quel est le champ électrique à une distance $r = 3{,}00$ cm de la charge ponctuelle ?
c. Calculez la charge surfacique sur la surface extérieure de la sphère creuse.

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 3.41.

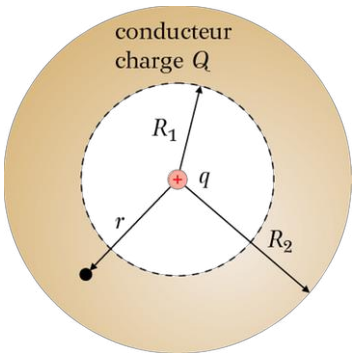


FIGURE 3.41
Le schéma de la situation pour l'exemple 3.6

Décortiquer le problème

La sphère creuse est conductrice. Il y a une charge induite négative sur la paroi intérieure.

Connues	Inconnues
$Q = 2{,}50\times10^{-6}$ C	σ_1
$q = 4{,}50\times10^{-6}$ C	$\vec{\mathbf{E}}$
$R_1 = 0{,}020\,0$ m	σ_2
$R_2 = 0{,}050\,0$ m	
$r = 0{,}030\,0$ m	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La première **clé** est la note **5** de la technique 3.1 : pour une charge q dans une cavité, il y a une charge induite $-q$ opposée sur la paroi de la cavité :

$$Q_1 = -q = -4{,}50\times10^{-6}\,\text{C} .$$

La deuxième **clé** est la définition de la charge surfacique, donnée à l'équation 2.11 :

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi R_1^2} = \frac{-4{,}50\times10^{-6}\,\text{C}}{4\pi\,(0{,}020\,0\,\text{m})^2} = -895\ \mu\text{C/m}^2 .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la note **1** de la technique 3.1 : le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La première **clé** est la conservation de la charge pour la sphère conductrice :

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q - Q_1 \,. \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième **clé** est l'équation (i).

Résoudre le problème

La charge sur la surface extérieure est

$$\begin{aligned} Q_2 &= 2{,}50 \times 10^{-6}\ \text{C} - (-4{,}50 \times 10^{-6}\ \text{C}) \\ &= 7{,}00 \times 10^{-6}\ \text{C} \,. \end{aligned}$$

La charge surfacique sur la surface extérieure est

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{7{,}00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{4\pi\,(0{,}0500\ \text{m})^2} = 223\ \mu\text{C/m}^2 \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La charge induite sur la paroi intérieure est opposée à la charge ponctuelle. La charge sur la surface extérieure est plus grande que la charge nette de la sphère creuse, car il y a une charge induite négative sur la paroi intérieure.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.4

Une sphère creuse conductrice porte une charge positive $+Q$. On place une charge ponctuelle négative q à l'intérieur de la cavité de la sphère creuse. Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai ?

(i) La force exercée sur q est attractive.

(ii) La force exercée sur q est répulsive.

(iii) La force exercée sur q est nulle.

(iv) On doit connaître comment la charge $+Q$ est distribuée pour connaître la force exercée sur q.

Les plaques parallèles conductrices

À première vue, il semble y avoir une différence entre deux des résultats obtenus précédemment. D'abord, nous avons trouvé à la section 2.5 et à l'exemple 3.5 que, dans le cas d'un plan infini, le module du champ électrique produit par une plaque infinie est $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Ensuite, nous avons trouvé que le champ tout juste à l'extérieur d'un conducteur a un module $E = \sigma/\epsilon_0$. Donc, si la plaque infinie est conductrice, quelle est la bonne équation pour le module du champ ? Est-ce que l'équation $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ s'applique uniquement aux isolants et l'équation $E = \sigma/\epsilon_0$ aux conducteurs ?

Pour répondre à ces questions, prenons une très grande plaque conductrice, ayant une aire A. On place une charge Q sur la plaque, comme le montre la figure 3.42a. Cette charge doit se répartir sur la surface extérieure du conducteur, de telle sorte que $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ à l'intérieur. Ceci implique que la charge va se répartir *sur les deux faces* de la plaque, ce qui est équivalent à deux plans de charges. Il y a alors une charge $Q/2$ sur la face gauche et une charge $Q/2$ sur la face droite. Les charges surfaciques sont

$$\sigma_g = \sigma_d = \frac{Q/2}{A} = \frac{Q}{2A} \,. \qquad (3.12)$$

Pour obtenir le champ, on doit utiliser le principe de superposition : chaque plan de charge produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = \sigma_i/(2\epsilon_0)\vec{\mathbf{u}}_{ni}$. On a alors, selon la figure 3.42b :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_g + \vec{\mathbf{E}}_d = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_g}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \dfrac{\sigma_d}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\imath} = \dfrac{Q}{2A\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n & \text{(à gauche)} \\ \dfrac{\sigma_g}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \dfrac{\sigma_d}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \vec{\mathbf{0}} & \text{(à l'intérieur)} \\ \dfrac{\sigma_g}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \dfrac{\sigma_d}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\imath} = \dfrac{Q}{2A\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n\ . & \text{(à droite)} \end{cases}$$

Dans ce cas, on obtient le résultat attendu pour les conducteurs : un champ nul à l'intérieur, et un champ dont le module est $E = \sigma/\epsilon_0$ tout juste à l'extérieur.

Si à la place, la plaque est isolante, alors la charge est distribuée sur une seule face. Alors,

$$\sigma = \frac{Q}{A}\ ,$$

et le champ électrique est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n = \frac{Q}{2A\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_n\ ,$$

ce qui est le même résultat que pour la plaque conductrice. On peut donc dire qu'il n'y a pas d'incohérence entre le résultat d'une plaque infinie, obtenu à l'aide du théorème de Gauss, et le résultat obtenu pour les conducteurs.

Finalement, si l'on place deux très grandes plaques conductrices parallèlement, l'une avec une charge $+Q$ et l'autre avec une charge $-Q$, alors les charges excédentaires vont se répartir seulement sur les faces intérieures de chaque plaque, comme le montre la figure 3.43, car les charges d'une plaque attirent les charges de l'autre plaque. Cette fois-ci, la charge $+Q$ de la plaque de gauche est répartie sur une surface A, et la charge surfacique est $\sigma_+ = Q/A$ (le double de la plaque de la figure 3.42). De même, la plaque négative aura une charge surfacique $\sigma_- = -Q/A$. Cette configuration est identique à celle étudiée à la section 2.5 de la page 53. On obtient alors :

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \overrightarrow{\text{du positif vers le négatif}} & \text{(entre les plaques)} \\ \vec{\mathbf{0}} & \text{(à l'extérieur des plaques)}\ , \end{cases} \qquad (3.13)$$

avec $\sigma = \sigma_+ = Q/A$.

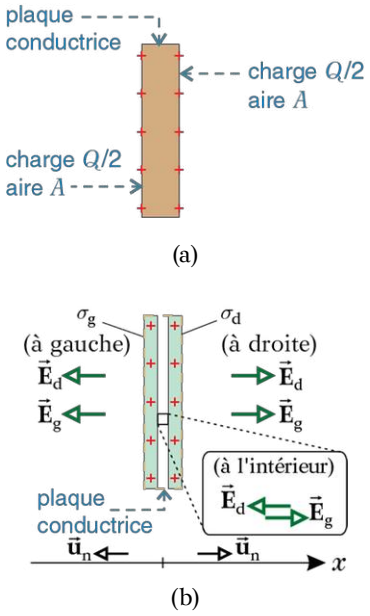


FIGURE 3.42
(a) Très grande plaque conductrice, dont la charge nette est Q. (b) La plaque est remplacée par deux plans ayant des charges surfaciques σ_g et σ_d.

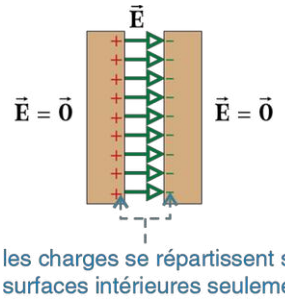


FIGURE 3.43
Deux plaques conductrices de charges opposées

3.6 Le champ électrique dans les diélectriques

Au chapitre 1, nous avons vu qu'un isolant est polarisé lorsqu'il est en présence d'un autre objet chargé. Il y a deux possibilités : dans le cas d'atomes ou de molécules n'ayant pas de moment dipolaire, le champ électrique extérieur sépare légèrement le nuage électronique par rapport au noyau positif, et l'atome devient un dipole induit avec un moment dipolaire parallèle au champ électrique extérieur $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$. Si l'atome possède un moment dipolaire (comme c'est le cas pour les molécules d'eau), le champ va faire tourner les molécules pour

que le moment dipolaire soit parallèle au champ extérieur, comme nous l'avons décrit à la section 2.8. Donc, dans les deux cas, les molécules de l'isolant ont un moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ parallèle au champ extérieur $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ (*voir la section 2.8 à la page 67*). L'isolant est alors appelé un *diélectrique*. La polarisation produit un champ induit $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$ à l'intérieur du diélectrique, ce qui modifie le champ électrique résultant $\vec{\mathbf{E}}$ à l'intérieur du diélectrique.

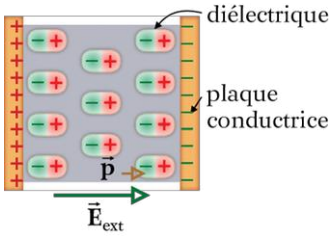


FIGURE 3.44
Un diélectrique dans un champ extérieur est polarisé.

Pour comprendre l'effet de la polarisation sur le champ électrique, on place un diélectrique entre deux grandes plaques parallèles, l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement (*voir la figure 3.44*). Les plaques produisent un champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ orienté de la plaque positive vers la plaque négative. Ce champ polarise le diélectrique en orientant les dipôles moléculaires comme le montre la figure 3.44. Les moments dipolaires $\vec{\mathbf{p}}$ sont dans le même sens que le champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$.

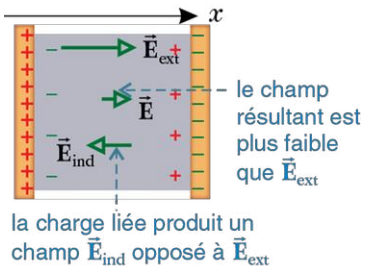


FIGURE 3.45
Le diélectrique polarisé est équivalent à des charges liées, qui produisent un champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$.

L'alignement des dipôles produit un surplus de charges négatives près de la face gauche du diélectrique et un surplus de charges positives près de sa face droite. On appelle ces charges des *charges liées*, car elles ne peuvent pas quitter leurs molécules. Elles produisent néanmoins un champ électrique supplémentaire $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$ à l'intérieur du diélectrique. Comme le montre la figure 3.45, ce champ est opposé au champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$. Avec l'axe des x orienté vers la droite, on obtient comme champ résultant à l'intérieur du diélectrique :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = (E_{\text{ext}} - E_{\text{ind}})\,\vec{\imath}\ .$$

Les charges liées font que le champ $\vec{\mathbf{E}}$ à l'intérieur du diélectrique est plus faible que $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$, sans que $\vec{\mathbf{E}}$ soit nul comme dans le cas du champ électrique à l'intérieur d'un conducteur.

Pour la plupart des diélectriques, le champ résultant est proportionnel au champ extérieur :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}}{\kappa}\ . \tag{3.14}$$

La constante sans unité κ (la lettre grecque kappa minuscule) est la *constante diélectrique* du matériau. C'est une propriété du diélectrique. Comme $\vec{\mathbf{E}}$ est plus faible que $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$, la constante diélectrique est plus grande que 1, sauf pour le vide dont la constante diélectrique est exactement égale à 1. Les substances comme les gaz ont une constante diélectrique très près de 1, car leur polarisation est très faible dans un champ électrique. À l'opposé, la constante diélectrique de l'eau est très élevée, car c'est une molécule qui a un moment dipolaire permanent qui peut facilement être aligné avec le champ extérieur. Le tableau 3.1 donne la valeur de κ pour quelques substances. Ce tableau est aussi présenté à l'annexe C. Nous reparlerons des diélectriques au chapitre 5 lorsque ces derniers seront utilisés dans la fabrication des condensateurs.

TABLEAU 3.1
La valeur approximative de la constante diélectrique à 20 °C

Substance	κ
Air	1,000 59
Eau	80,4
Germanium	16
Glycérine	42,5
Méthanol	33,6
Mica	3 à 6
Papier	3
Plexiglas	3,4
Polyéthylène	2,25
Polystyrène	2,6
Porcelaine	6 à 8
PVC	3,4
Teflon	2,1
Verre	4 à 7

La figure 3.46 montre une surface de Gauss qui est en partie dans le diélectrique. Le théorème de Gauss met en relation le flux électrique et la charge nette à l'intérieur de la surface de Gauss, donc la charge liée et la charge sur le conducteur, qu'on appelle la *charge libre*, car celle-ci est libre de se déplacer d'une molécule à l'autre. On a alors

$$\oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}^{\text{libre}} - Q_{\text{int}}^{\text{liée}}}{\epsilon_0}\ . \tag{3.15}$$

Cette équation est difficile à utiliser au niveau macroscopique, car seule la charge libre se mesure facilement à notre échelle. Pour cette raison, on réécrit habituellement cette équation uniquement en fonction de la charge libre. Pour ce faire, considérons le champ produit uniquement par les charges libres, c'est-à-dire $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$. Alors,

$$\oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}^{\text{libre}}}{\epsilon_0} .$$

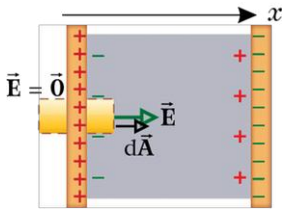


FIGURE 3.46
Une surface de Gauss pour analyser le champ dans le diélectrique

Pour les diélectriques qui suivent l'équation 3.14, on obtient

$$\oint_{\text{surface}} \kappa\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Q_{\text{int}}^{\text{libre}} . \qquad (3.16)$$

On définit la *permittivité du diélectrique* par $\epsilon = \kappa\epsilon_0$. C'est pour cette raison que ϵ_0 est souvent appelée la *permittivité du vide*, car $\kappa = 1$ pour le vide.

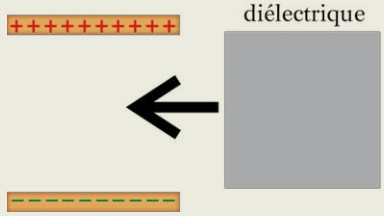
L'équation 3.16 est appelée le théorème de Gauss dans la matière. Nous avons obtenu cette équation pour une situation simple, mais c'est une équation générale, valide aussi lorsque le diélectrique a des charges libres. Il est donc possible d'inclure l'effet de la polarisation du diélectrique dans le théorème de Gauss en ne tenant compte que de la charge libre, la charge qu'on place directement sur un objet. Lorsque la configuration possède l'une des symétries (plane, cylindrique ou sphérique), on applique la méthode de la section 3.4 en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ et en tenant compte seulement de la charge libre à l'intérieur de la surface de Gauss.

REMARQUE

L'équation 3.15 est parfois appelée le *théorème de Gauss dans le vide*, ce qui laisse entendre que cette équation est moins générale que l'équation 3.16 qui s'applique à tous les matériaux, y compris le vide. En fait, les deux équations sont tout à fait équivalentes : la première est plus utile au niveau microscopique, car elle fait intervenir toutes les charges présentes, alors que la seconde équation est plus utile au niveau macroscopique, car elle est écrite en fonction de la charge qu'on mesure facilement au niveau macroscopique, la charge libre.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.5

On insère un diélectrique entre deux plaques parallèles chargées, comme il est indiqué à la figure ci-dessous. Les plaques exercent une force sur le diélectrique durant l'insertion. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Expliquez votre réponse.



RÉSUMÉ

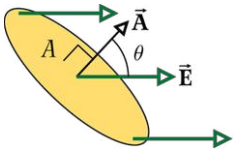
Dans ce chapitre, nous avons vu qu'il est possible de calculer le champ électrique à l'aide du théorème de Gauss et de la symétrie.

LES DÉFINITIONS

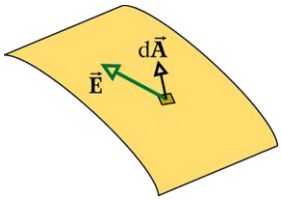
Le **flux électrique** à travers une surface est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent la surface.

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = EA\cos\theta \qquad \text{(champ uniforme)}$$

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}\,. \qquad \text{(équation générale)}$$



($\vec{\mathbf{E}}$ uniforme)



(cas général)

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Selon le **théorème de Gauss**, le flux à travers une surface fermée est proportionnel à la charge Q_{int} à l'intérieur de la surface. La forme de la surface n'influence pas le flux.

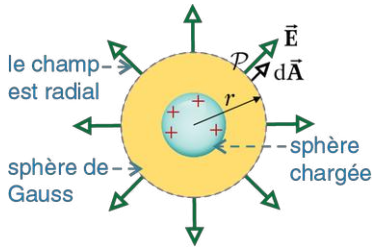
$$\Phi_E = \oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\,.$$

- Le champ électrique doit avoir la même symétrie que la configuration de charges.

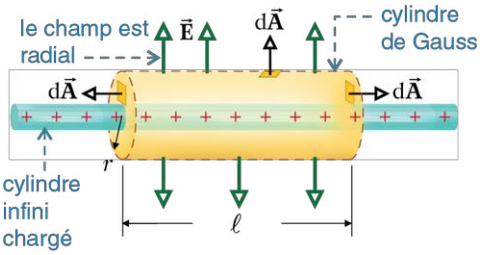
LES RÉSULTATS

Le théorème de Gauss et la symétrie sont utiles pour calculer le champ électrique dans les cas suivants.

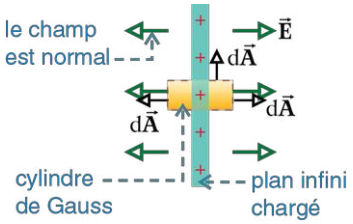
La **symétrie sphérique**



La **symétrie cylindrique**

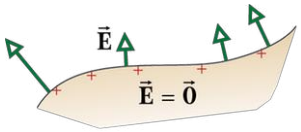


La **symétrie plane**



LES APPLICATIONS

Pour un **conducteur en équilibre électrostatique**:



- à l'intérieur du conducteur, le champ électrique est nul;
- la charge excédentaire se trouve uniquement sur la surface extérieure du conducteur;
- le champ tout juste à l'extérieur du conducteur est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_{\text{n}}\,,$$

où σ est la charge surfacique à cet endroit;

- si un conducteur possède une cavité, celle-ci est isolée des champs électriques extérieurs;
- si une cavité d'un conducteur contient une charge q, il y a une charge induite $-q$ opposée sur la paroi de la cavité.

Dans un **diélectrique**:

- un champ extérieur $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ polarise le diélectrique;
- la polarisation produit un champ induit supplémentaire $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$ à l'intérieur;
- le champ $\vec{\mathbf{E}}$ à l'intérieur est plus faible:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}}{\kappa}\,,$$

où κ est la constante diélectrique du matériau;

- le théorème de Gauss peut s'écrire en fonction de la charge libre:

$$\oint_{\text{surface}} \kappa\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = Q_{\text{int}}^{\text{libre}}\,.$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 3.1 La symétrie

Q1 La figure 3.47 illustre trois configurations cylindriques (vues de face et en coupe transversale) et le champ électrique. Indiquez les configurations qui ne changent pas :

a. lorsque s'effectue une translation le long de l'axe ;

b. lorsque s'effectue une rotation autour de l'axe ;

c. lorsque s'effectue une réflexion par rapport à l'axe ;

d. lorsque s'effectue une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe.

e. Quelle configuration a une symétrie cylindrique.

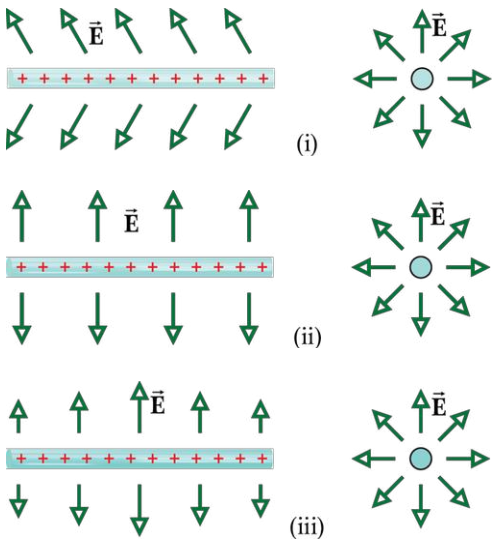


FIGURE 3.47 • Question 1

Q2 La figure 3.48 illustre deux configurations sphériques selon une coupe transversale, et le champ électrique. Indiquez les configurations qui ne changent pas :

a. lorsque s'effectue une rotation autour du centre de la sphère ;

b. lorsque s'effectue une réflexion par rapport à un diamètre à 45° par rapport à l'horizontale.

c. Quelle configuration a une symétrie sphérique ?

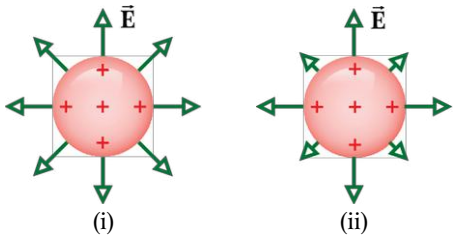


FIGURE 3.48 • Question 2

Q3 La figure 3.49 illustre deux plans infinis, ainsi qu'un cube, avec le champ électrique. Indiquez les configurations qui ne changent pas :

a. lorsque s'effectue une translation ;

b. lorsque s'effectue une réflexion par rapport au plan.

c. Quelle configuration a une symétrie plane ?

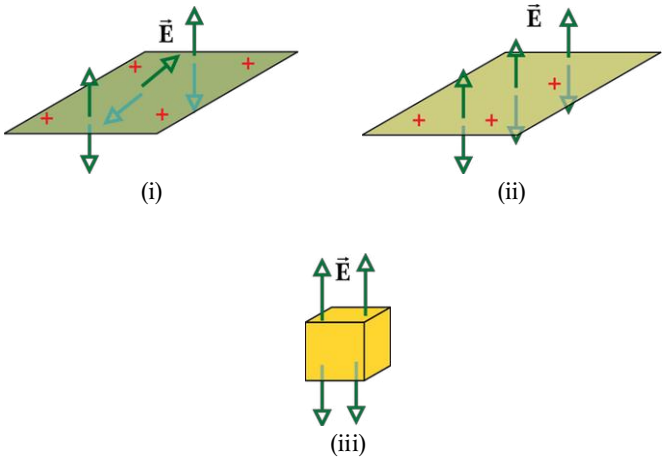


FIGURE 3.49 • Question 3

Section 3.2 Le flux électrique

Q4 Un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ uniforme est perpendiculaire à une surface carrée de côté R. Qu'arrive-t-il au flux électrique :

a. si le champ électrique double ?

b. si la surface diminue de moitié ?

c. si la surface est circulaire de rayon R au lieu d'être carrée ?

d. si l'angle entre le champ et la surface est de 45° ?

E5 Un champ électrique uniforme de 5,50 kN/C traverse un cylindre, de 5,00 cm de rayon et de 10,0 cm de longueur, dans le sens de sa longueur. Quel est le flux électrique à travers le cylindre ?

E6 Un champ électrique a un module de 350 N/C et forme un angle de 40,0° avec la partie positive de l'axe des x. Il traverse un anneau de 60,0 cm de rayon placé perpendiculairement à l'axe des x (*voir la figure 3.50*). Calculez le flux électrique à travers la surface délimitée par l'anneau.

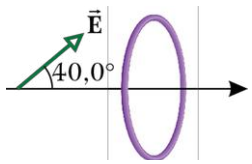


FIGURE 3.50 • Exercice 6

E7 Un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = -360\vec{\imath}$ N/C est uniforme. Une plaque circulaire de 25,0 cm de rayon est située dans ce champ, et son plan forme un angle de 60,0° par rapport à l'axe des x.

a. Calculez le flux électrique traversant la plaque.

b. Par quel facteur le flux est-il multiplié si l'angle diminue pour former un angle de 30,0° ?

c. Par quel facteur le flux est-il multiplié si on remplace la plaque circulaire par une plaque rectangulaire, de 50,0 cm sur 60,0 cm, dont le plan forme un angle de 60,0° par rapport à l'axe des x ?

E8 Une plaque carrée de 30 cm de côté est située dans le plan des xz. Un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (350\vec{\imath} + 400\vec{\jmath} - 260\vec{k})$ N/C traverse la plaque. Calculez le flux électrique à travers la plaque.

P9 Un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (250\vec{\imath} - 150\vec{\jmath})$ N/C traverse un cube dont les côtés mesurent 12,0 cm (*voir la figure 3.51*).

a. Calculez le flux à travers chacune des surfaces.

b. Quel est le flux net à travers le cube ?

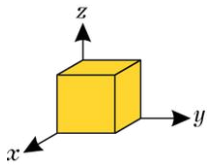


FIGURE 3.51 • Problème 9

Section 3.3 Le théorème de Gauss

Q10 Une charge $+q$ est placée au centre d'une sphère de rayon R. Que devient le flux dans les situations suivantes ?

a. Le rayon de la sphère est triplé.

b. La charge est divisée par 2.

c. La charge est retirée de la sphère.

d. La sphère est remplacée par un cube de côtés R.

E11 Deux charges ponctuelles $q_1 = 4{,}20$ µC et $q_2 = -2{,}50$ µC se situent à l'intérieur d'un cube de 12 cm de côté (*voir la figure 3.52*). Une troisième charge $q_3 = -3{,}00$ µC est à l'extérieur du cube. Quel est le flux net à travers le cube ?

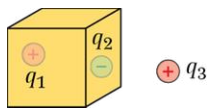


FIGURE 3.52 • Exercice 11

E12 Deux charges ponctuelles $q_1 = 4{,}00$ µC et $q_2 = -7{,}00$ µC sont situées à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique de rayon R. Calculez le flux net à travers la surface de Gauss.

E13 Un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ traverse une hémisphère de rayon R de façon parallèle à l'axe de la demi-sphère, comme il est illustré à la figure 3.53.

a. Quel est le flux à travers la base de l'hémisphère ?

b. Quel est le flux à travers la partie supérieure de l'hémisphère ?

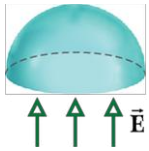


FIGURE 3.53 • Exercice 13

E14 Une charge ponctuelle $q = -25{,}0$ nC est placée au centre d'un cube dont les côtés mesurent 30 cm.

a. Quel est le flux net à travers le cube ?

b. Quel est le flux à travers la face supérieure du cube ?

E15 La figure 3.54 montre un cylindre de Gauss et le champ électrique. Pour chacune des surfaces, le champ est uniforme et perpendiculaire. La figure donne aussi le module et l'orientation du champ électrique vis-à-vis de chaque surface du cylindre. Le cylindre a une longueur de 66,0 cm et un rayon de 15,0 cm.

a. Quel est le flux net à travers la surface ?

b. Quelle est la charge nette dans le cylindre ?

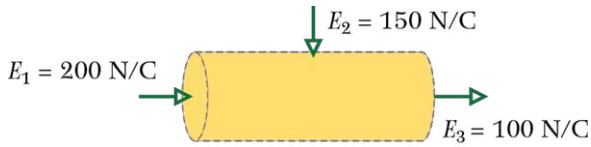


FIGURE 3.54 • Exercice 15

E16 Une surface de Gauss possède une forme cubique dont chaque arête a une longueur L. Trois charges ponctuelles, $+Q$, $-3Q$ et $-Q/2$, se situent à l'intérieur de la surface de Gauss. Une charge de $+2Q$ et une charge de $+Q/2$ se trouvent à l'extérieur de la surface de Gauss.

a. Quel est le flux net traversant la surface de Gauss ?

b. Une deuxième surface englobe toutes les charges. Quel est le flux net traversant cette surface ?

E17 Trois charges ponctuelles $q_1 = 4{,}00$ µC, $q_2 = 1{,}00$ µC et $q_3 = -3{,}00$ µC sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral de 4,00 cm de côté, comme le montre la figure 3.55. Une sphère est centrée sur le point $\mathcal{P}$.

a. Quel est le plus grand rayon de la sphère pour que le flux à travers celle-ci soit nul ?

b. Calculez le flux électrique à travers une sphère de 3,00 cm de rayon, dont le centre se trouve au point $\mathcal{P}$.

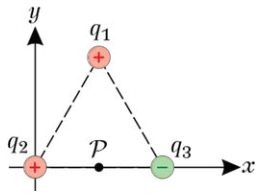


FIGURE 3.55 • Exercice 17

P18 Un cube de 10,0 cm de côté est placé dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = 450y\,\vec{\jmath}$. La base du cube est située dans le plan des xy entre la position y = 10,0 cm et y = 20,0 cm (*voir la figure 3.56*).

a. Calculez le flux électrique qui traverse chaque surface du cube.

b. Calculez le flux net à travers le cube.

c. Calculez la charge à l'intérieur du cube.

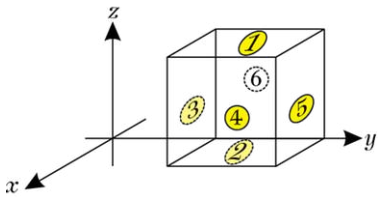


FIGURE 3.56 • Problème 18

Section 3.4 Le théorème de Gauss en action

Q19 À la figure 3.57, une tige infinie a une charge linéique $+\lambda$. Cette tige est entourée de trois surfaces fermées différentes qui ont toutes une longueur L parallèle à la tige chargée. Parmi ces surfaces, déterminez celle dont le flux électrique qui la traverse est $\Phi_E = \lambda L/\epsilon_0$:

(i) le cylindre seulement;

(ii) la sphère seulement;

(iii) le cube seulement;

(iv) le cylindre et la sphère;

(v) les trois surfaces.

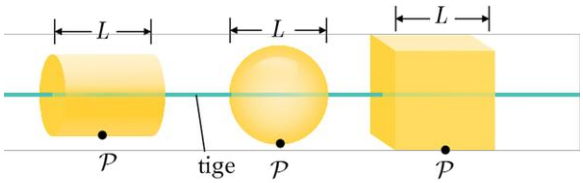


FIGURE 3.57 • Questions 19 et 20

Q20 En vous référant à la figure 3.57, déterminez la surface de Gauss qui permet de trouver facilement le champ électrique au point $\mathcal{P}$, illustré sur chaque surface, à l'aide du théorème de Gauss:

(i) le cylindre seulement;

(ii) la sphère seulement;

(iii) le cube seulement;

(iv) le cylindre et la sphère;

(v) les trois surfaces.

Q21 Une tige isolante uniformément chargée, d'une longueur L et ayant une charge Q, est placée à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique, comme le montre la figure 3.58. L'aire totale de la surface est A. Voici deux énoncés qui se rapportent à cette situation:

(I) Le flux électrique qui traverse cette surface de Gauss est $\Phi_E = Q/\epsilon_0$.

(II) Le module du champ électrique pour n'importe quel point sur la surface de la sphère est

$$E = \frac{\Phi_E}{A} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

Déterminez les énoncés qui sont vrais.

(i) (I) seulement;

(ii) (II) seulement;

(iii) (I) et (II);

(iv) aucun des deux;

(v) il manque des informations pour se prononcer.

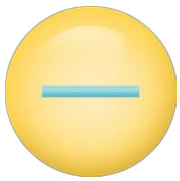


FIGURE 3.58 • Question 21

Q22 Une sphère a un rayon a = 2,0 cm. Elle se trouve au centre d'une sphère creuse, de rayon intérieur b = 4,0 cm et de rayon extérieur c = 6,0 cm. La petite sphère a une charge Q_1 uniformément distribuée dans son volume, et la sphère creuse a une charge Q_2 uniformément distribuée sur sa surface extérieure, comme le montre la figure 3.59 (*voir la page suivante*).

a. On veut calculer le champ électrique à une distance de 5,0 cm du centre des sphères, à l'aide du théorème de Gauss. Quel est le rayon de la surface de Gauss nécessaire?

b. Quelle est la valeur de Q_{int}?

c. Quel est le rayon de la sphère de Gauss nécessaire pour calculer le champ électrique à une distance de 10 cm du centre des sphères?

d. Quelle est alors la valeur de Q_{int}?

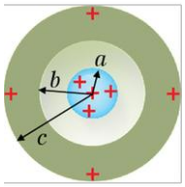


FIGURE 3.59 • Question 22

E23 Deux grandes plaques verticales minces et isolantes, ayant chacune une charge surfacique $-\sigma$, sont placées horizontalement, face à face. Elles sont séparées par une distance d l'une de l'autre. Calculez le module du champ électrique à l'aide du théorème de Gauss :

a. à gauche des deux plaques ;

b. entre les deux plaques ;

c. à droite des deux plaques.

E24 À l'aide du théorème de Gauss, déterminez le champ électrique, à une distance r de l'axe, à l'extérieur d'un long cylindre de rayon R chargé positivement, dont la charge surfacique σ est uniforme.

E25 Une sphère isolante a un rayon de 4,00 cm, et sa charge volumique est de 179 $\mu C/m^3$. Calculez le module du champ électrique :

a. à une distance de 2,00 cm de son centre ;

b. à une distance de 6,00 cm de son centre.

P26 Une longue tige rectiligne, ayant une charge linéique de –240 nC/m, est placée de façon verticale, et possède un diamètre de 60,0 cm. À l'aide du théorème de Gauss, trouvez le champ électrique produit par la tige à une distance de 1,80 m à droite du centre de la tige.

P27 Deux grandes plaques isolantes sont placées de façon parallèle, l'une au-dessus de l'autre. La plaque supérieure possède une charge surfacique de 5,7 nC/m^2, tandis que la plaque inférieure possède une charge surfacique de –7,3 nC/m^2. À l'aide du théorème de Gauss, trouvez le champ électrique :

a. en haut de la plaque supérieure ;

b. entre les deux plaques ;

c. en dessous de la plaque inférieure.

P28 Une sphère, de rayon a, a une charge positive Q répartie uniformément dans son volume. Autour de cette sphère, une sphère creuse, de rayon intérieur $b > a$ et de rayon extérieur $c > b$, a une charge négative $-2Q$ répartie uniformément dans son volume. Les deux sphères sont concentriques (*voir la figure 3.60*). Déterminez le champ électrique dans les quatre situations décrites ci-dessous.

a. $r < a$

b. $a < r < b$

c. $b < r < c$

d. $r > c$

e. Pour quelles distances (autres que l'infini) le champ électrique est-il nul ?

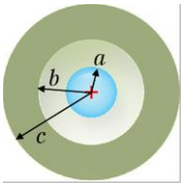


FIGURE 3.60 • Problèmes 28 et 29

P29 Une sphère, de rayon $a = 15{,}0$ cm, a une charge positive $Q = 32{,}0$ nC répartie uniformément dans son volume. Autour de cette sphère, une sphère creuse, de rayon intérieur $b = 25{,}0$ cm et de rayon extérieur $c = 30{,}0$ cm, a une charge négative –64,0 nC répartie uniformément dans son volume. Les deux sphères sont concentriques (*voir la figure 3.60*). Déterminez le champ électrique dans les quatre situations décrites ci-dessous.

a. $r = 12{,}0$ cm

b. $r = 20{,}0$ cm

c. $r = 27{,}0$ cm

d. $r = 35{,}0$ cm

e. Pour quelles distances (autres que l'infini) le champ électrique est-il nul ?

P30 Un long cylindre a un rayon a et une charge volumique uniforme ρ. Il est placé au centre d'un long cylindre creux coaxial, dont le rayon intérieur est b et le rayon extérieur est c. Pour le cylindre creux, la charge est répartie uniformément sur ses surfaces : la charge surfacique sur la surface intérieure est σ_1 et la charge surfacique sur la surface extérieure est σ_2. Les cylindres sont isolants, et ils sont illustrés à la figure 3.61 à la page suivante. Déterminez le champ électrique :

a. à $r < a$ de l'axe ;

b. à $a < r < b$ de l'axe ;

c. à $b < r < c$ de l'axe ;

d. à $r > c$ de l'axe.

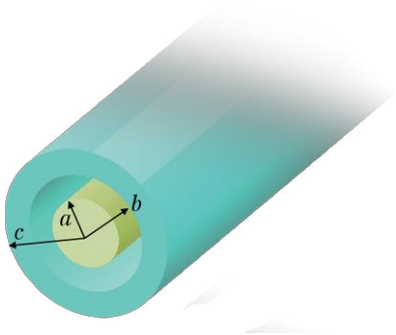


FIGURE 3.61 • Problèmes 30 et 31

P31 Un long cylindre a un rayon $a = 12{,}0$ cm et une charge volumique uniforme $\rho = 9{,}55\ \mu C/m^3$. Il est placé au centre d'un long cylindre creux coaxial, dont le rayon intérieur est $b = 26{,}0$ cm et le rayon extérieur est $c = 30{,}0$ cm. Pour le cylindre creux, la charge est répartie uniformément sur ses surfaces : la charge surfacique sur la surface intérieure est $\sigma_1 = -0{,}440\ \mu C/m^2$, et la charge surfacique sur la surface extérieure est $\sigma_2 = 0{,}170\ \mu C/m^2$. Les cylindres, illustrés à la figure 3.61, sont isolants. Déterminez le champ électrique :

a. à $r = 8{,}00$ cm de l'axe ;

b. à $r = 20{,}0$ cm de l'axe ;

c. à $r = 28{,}0$ cm de l'axe ;

d. à $r = 40{,}0$ cm de l'axe.

P32 On place, entre un plan infini isolant chargé et un cylindre infini chargé, une bille chargée attachée par une corde au plafond. La bille a une masse de 2,40 g, et la corde forme un angle $\theta = 9{,}00°$ par rapport à la verticale. La bille est à 80,0 cm de chaque élément (*voir la figure 3.62*). Le plan a une charge surfacique de $3{,}00\ \mu C/m^2$. Le cylindre est métallique. Il a un rayon de 1,80 cm, et sa charge surfacique est de $-70{,}0\ \mu C/m^2$.

a. Calculez le champ créé par le plan à la position de la bille.

b. Calculez le champ créé par le cylindre à la position de la bille.

c. Déterminez la charge de la bille.

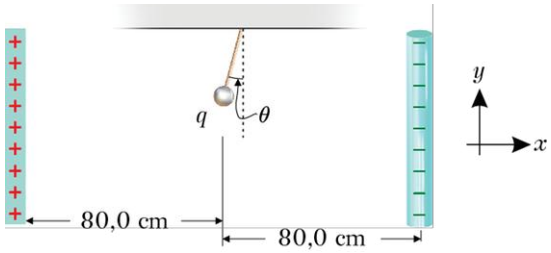


FIGURE 3.62 • Problème 32

P33 Une très grande plaque isolante a une charge surfacique uniforme positive σ_+ positive. On place une seconde très grande plaque isolante, parallèlement à la première, à une distance d. La seconde plaque a une charge surfacique négative σ_-. Calculez le module de la force par unité d'aire exercée sur la seconde plaque par la première.

P34 Une sphère de rayon R a une charge volumique qui dépend de la distance du centre de celle-ci :

$$\rho = \alpha r\ ,$$

où α est une constante. Montrez que le module du champ électrique est

$$E = \begin{cases} \dfrac{\alpha r^2}{4\epsilon_0} & (r \le R) \\ \dfrac{\alpha R^4}{4\epsilon_0 r^2} & (r \ge R) \end{cases}.$$

Section 3.5 Les conducteurs en équilibre électrostatique

Q35 Une charge ponctuelle q est placée à l'intérieur d'une sphère creuse métallique. La sphère métallique a une charge $-3q$.

a. Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère creuse ?

b. Quelle est la charge sur la surface extérieure de la sphère creuse ?

E36 Une longue tige de cuivre a un rayon de 1,00 cm, et sa charge linéique est de 50,5 nC/m. Calculez le module du champ électrique aux endroits suivants :

a. à $r = 5{,}00$ mm de l'axe de la tige ;

b. à $r = 5{,}00$ cm de l'axe de la tige.

E37 Une plaque d'aluminium mesure 40,0 cm de largeur et 60,0 cm de longueur. Elle porte une charge de 4,50 µC.

a. Quelle est la charge surfacique de la plaque ?

b. Quel est le champ électrique tout juste à l'extérieur de la plaque, près de son centre ?

E38 Un long câble coaxial est formé d'un cylindre conducteur intérieur de rayon r_1 ayant une charge surfacique σ_1. Autour de ce cylindre, un cylindre conducteur creux a un rayon intérieur r_2 et un rayon extérieur r_3. Quelle est la charge surfacique de la surface intérieure du cylindre creux ?

P39 Une petite bille métallique de rayon a porte une charge Q_1. On place la bille au centre d'une coquille sphérique métallique de rayon intérieur b, dont l'épaisseur est e et la charge, Q_2 (*voir la figure 3.63 à la page suivante*). Déterminez le champ électrique :

a. à l'intérieur de la bille ;

b. entre la bille et la surface intérieure de la sphère creuse ;

c. à l'intérieur de la sphère creuse (pour $b < r < b + e$) ;

d. à l'extérieur de la sphère creuse.

e. Quelle est la charge surfacique des surfaces intérieure et extérieure de la sphère creuse ?

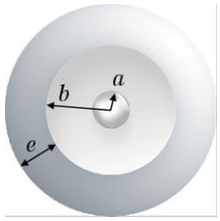


FIGURE 3.63 • Problèmes 39 et 40

P40 Une petite bille métallique de rayon $a = 1{,}0$ mm porte une charge de $-3{,}0$ nC. On place la bille au centre d'une coquille sphérique métallique de rayon intérieur $b = 10$ mm, dont l'épaisseur est $e = 2{,}0$ mm et la charge est de 9,0 nC (*voir la figure 3.63*). Déterminez le champ électrique dans les quatre situations suivantes :

a. à 0,80 mm du centre ;

b. à 5,0 mm du centre ;

c. à 11 mm du centre ;

d. à 13 mm du centre.

e. Quelle est la charge surfacique des surfaces intérieure et extérieure de la sphère creuse ?

Section 3.6 Le champ électrique dans les diélectriques

E41 Deux grandes plaques sont placées parallèlement l'une au-dessus de l'autre. La plaque supérieure possède une charge surfacique $+\sigma$, tandis que la plaque inférieure possède une charge surfacique $-\sigma$. On insère un diélectrique entre les deux plaques, dont la constante diélectrique est κ. Quel est le champ électrique à mi-chemin entre les deux plaques ?

E42 Deux grandes plaques sont placées parallèlement l'une au-dessus de l'autre. La plaque supérieure possède une charge surfacique de 33,0 $\mu C/m^2$, tandis que la plaque inférieure possède une charge surfacique de $-33{,}0$ $\mu C/m^2$. On insère une feuille de mica entre les deux plaques, dont la constante diélectrique est de 3,5. Quel est le champ électrique à mi-chemin entre les deux plaques ?

P43 Le câble coaxial illustré à la figure 3.64 est constitué d'un fil de cuivre de 2,0 mm de diamètre entouré d'un diélectrique de 5,0 mm de diamètre, dont la constante diélectrique est $\kappa = 4{,}0$. Ce fil est entouré d'un cylindre creux en cuivre de 1,0 mm d'épaisseur. Le cylindre est à son tour entouré d'une gaine extérieure en plastique servant d'isolant. Déterminez la charge linéique du fil de cuivre, sachant que le champ dans le diélectrique est $\vec{\mathbf{E}} = (200/r)\vec{\mathbf{u}}_r$, exprimé en N/C.

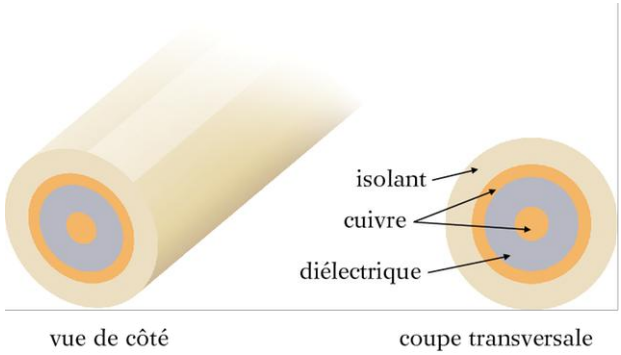
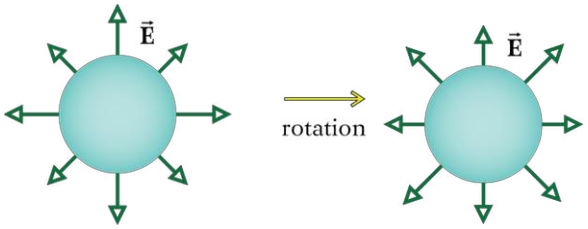


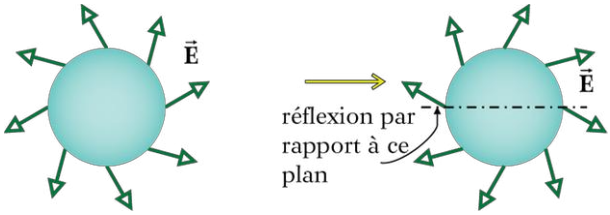
FIGURE 3.64 • Problème 43

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

3.1 **a.** La rotation autour d'un axe passant par le centre



b. La réflexion autour d'un plan



3.2 (i) = (iii) < (ii) = (iv)

Selon le théorème de Gauss, le flux à travers une surface fermée est égal à la charge nette intérieure. La forme et la grandeur de la surface n'ont pas d'importance.

3.3 Aucune

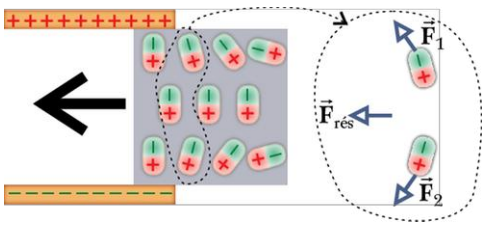
Le cube n'est pas suffisamment symétrique afin que le théorème de Gauss puisse être utilisé pour calculer le champ électrique.

3.4 (iii)

La charge ponctuelle est à l'intérieur d'une cavité d'un conducteur. Le champ produit par les autres charges est nul à l'intérieur de la cavité, donc $\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$.

3.5 La force est attractive.

Le diélectrique va être polarisé. Ainsi, la partie positive des dipôles sera plus près de la plaque négative, et la partie négative des dipôles sera plus près de la plaque positive. Ceci produit des forces obliques sur les dipôles de telle sorte que la force résultante sur le diélectrique est attractive.



Chapitre 04

Le potentiel électrique

Buts du chapitre

Ce chapitre traite de l'énergie potentielle associée à la force électrique. Un important concept y est présenté : le potentiel électrique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de calculer la variation d'énergie potentielle électrique d'un système ;
- d'évaluer la différence de potentiel électrique entre deux points ;
- d'utiliser l'énergie potentielle électrique et la conservation de l'énergie pour analyser le mouvement de charges ;
- de calculer le champ électrique à partir du potentiel ;
- de comprendre les sources de potentiel électrique.

Préalables

Ce chapitre porte sur les concepts d'énergie potentielle et de conservation de l'énergie appliqués aux configurations produisant un champ électrique. Revoyez :

- le champ électrique, étudié aux sections 2.1 et 2.2 ;
- le mouvement des charges et des dipôles dans un champ électrique, analysé aux sections 2.7 et 2.8 ;
- l'énergie potentielle et l'énergie mécanique, présentées aux sections 9.3 et 9.4 du tome 1.

La foudre est produite par une différence de potentiel importante entre les nuages et le sol.

Les premiers chapitres de ce tome portent sur la force entre les charges électriques ainsi que sur le médiateur de cette force, le champ électrique. La force et le champ électrique sont des quantités vectorielles. Dans le tome 1, nous avons vu que le concept d'énergie permet de résoudre certains problèmes plus facilement qu'avec les forces, car l'énergie est une quantité scalaire.

La force électrique est semblable à la force gravitationnelle : les deux forces sont des forces à distance, orientées radialement, dont le module décroît avec la distance au carré. Nous allons utiliser cette similitude pour obtenir l'énergie potentielle électrique associée à la position de charges électriques. Il sera alors possible d'analyser le mouvement de particules chargées à l'aide du principe de conservation de l'énergie, une méthode basée sur des scalaires, plus simple que la méthode des forces qui nécessite le recours aux quantités vectorielles.

L'utilisation de l'énergie électrique dans la vie de tous les jours est indéniable, que ce soit pour se chauffer, s'éclairer ou se divertir. Les différentes applications utilisent l'énergie électrique et la transforment en un autre type d'énergie dans les circuits électriques. Nous allons étudier les circuits, dans les prochains chapitres, à l'aide du concept de potentiel électrique. Nous verrons dans ce chapitre le lien qui existe entre le champ électrique et le potentiel. Le concept de potentiel va apporter des informations supplémentaires sur les conducteurs en équilibre électrostatique.

4.1 L'énergie potentielle électrique

Le travail et l'énergie potentielle

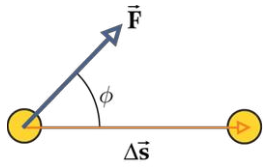


FIGURE 4.1
Le travail effectué sur une particule par une force $\vec{\mathbf{F}}$

Lorsqu'une charge se trouve parmi une configuration de charges, elle subit une force électrique exercée par les autres charges. Lorsque la charge se déplace, la force électrique effectue un travail. Dans le tome 1, nous avons vu que le travail est un transfert d'énergie au moyen d'une force. Pour une force constante $\vec{\mathbf{F}}$ qui est exercée par un agent sur une particule qui a un déplacement rectiligne $\Delta\vec{\mathbf{s}}$, le travail est

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}} = F\,\Delta s\cos\phi\,, \tag{4.1}$$

où $0° \leq \phi \leq 180°$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{F}}$ et $\Delta\vec{\mathbf{s}}$ (*voir la figure 4.1*). Le signe du travail indique si l'énergie est donnée à la particule ($W > 0$ lorsque $0° \leq \phi < 90°$) ou si c'est la particule qui cède de l'énergie à l'agent ($W < 0$ lorsque $90° < \phi \leq 180°$). Lorsque $\phi = 90°$, le travail de la force est nul, et il n'y a pas de transfert d'énergie entre l'agent et la particule.

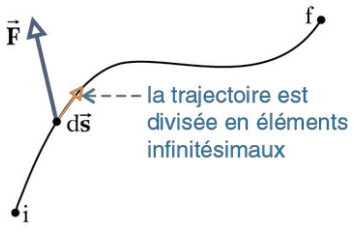


FIGURE 4.2
Le travail pour une force qui change sur une trajectoire curviligne

REMARQUE

La notation $\Delta\vec{\mathbf{s}}$ indique le vecteur déplacement plutôt que la notation $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, utilisée dans le tome 1, pour éviter de la confondre avec la coordonnée radiale r qui apparaît dans l'équation du champ électrique d'une charge ponctuelle.

Dans le cas où la force change durant le déplacement ou si celui-ci n'est pas rectiligne, il faut le diviser en éléments de déplacement infinitésimaux $d\vec{\mathbf{s}}$, comme le montre la figure 4.2. Le travail pour un déplacement infinitésimal est $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Le travail, lorsque la particule se déplace du point i

au point f, est obtenu en calculant la somme (donc l'intégrale) de tous les travaux infinitésimaux :

$$W = \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{4.2}$$

C'est l'équation générale pour calculer le travail d'une force ; c'est une *intégrale curviligne*.

Pour la plupart des forces, le travail dépend de la trajectoire utilisée. On appelle *force conservative* une force pour laquelle le travail ne dépend pas de la trajectoire, mais seulement des points initial et final. En particulier, le travail d'une force conservative est nul lorsque la particule revient à sa position initiale. On peut choisir une trajectoire pour simplifier le calcul de l'intégrale de l'équation 4.2 lorsque la force est conservative. Dans le tome 1, nous avons rencontré deux forces conservatives : la force gravitationnelle et la force élastique exercée, par exemple, par un ressort. La force électrostatique exercée entre les charges doit aussi être une force conservative, car elle est mathématiquement similaire à la force gravitationnelle.

Les forces conservatives sont les seules auxquelles on peut associer une énergie potentielle. Pour un système qui évolue d'un état initial i à un état final f par l'effet d'une force d'interaction conservative $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{c}}$, la variation de l'énergie potentielle du système est

$$\Delta U = U_{\mathrm{f}} - U_{\mathrm{i}} \equiv -W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = -\int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{4.3}$$

MISE EN GARDE

L'énergie potentielle est associée à un **système** et non à une particule.

Dans la figure 4.3, une charge q se déplace d'un point initial i à un point final f dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ produit par des charges sources non illustrées. Dans cet exemple, les charges sources demeurent immobiles de telle sorte que le champ électrique demeure constant. La force exercée sur la charge q est $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{e}} = q\vec{\mathbf{E}}$, et la variation d'énergie potentielle du système est

$$\Delta U_{\mathrm{e}} = -q \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{4.4}$$

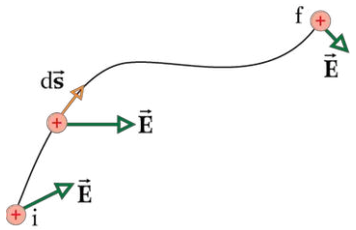


FIGURE 4.3
L'énergie potentielle du système change lorsque q se déplace.

Comme nous avons vu dans le tome 1, l'énergie mécanique est définie ainsi : $E_{\mathrm{méc}} = K + U$, où $K = mv^2/2$ est l'énergie cinétique. De plus, lorsqu'un système est fermé et que ses parties interagissent sous l'effet de forces conservatives uniquement, alors l'énergie mécanique est conservée :

$$\Delta E_{\mathrm{méc}} = \Delta K + \Delta U = 0 \,. \tag{4.5}$$

Dans ce cas, il y a une transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle, et inversement.

REMARQUE

Pour alléger, on omet habituellement l'indice « e » afin d'indiquer que ΔU_{e} est une variation d'énergie potentielle électrique lorsque la seule force conservative est la force électrique.

Le travail extérieur

Lorsque le système est soumis à des forces extérieures, l'énergie mécanique n'est plus conservée. En effet, une force extérieure peut effectuer un travail W_{ext} qui change l'énergie mécanique du système :

$$W_{ext} = \Delta E_{méc} = \Delta K + \Delta U \ . \tag{4.6}$$

Si $W_{ext} > 0$, l'environnement donne de l'énergie au système. Dans le cas contraire où $W_{ext} < 0$, c'est le système qui cède de l'énergie à son environnement.

Un champ électrique uniforme

Pour comprendre la façon d'utiliser l'équation 4.4 afin d'obtenir la variation d'énergie potentielle électrique, revenons sur l'énergie potentielle gravitationnelle. Dans le tome 1, nous avons étudié l'énergie potentielle gravitationnelle principalement dans des problèmes près de la surface de la Terre. Dans ce cas, le champ gravitationnel produit par la Terre est constant : $\vec{\mathbf{g}} = g\ \overrightarrow{\text{vers le bas}} = -g\vec{\boldsymbol{j}}$, où on a orienté l'axe des y vers le haut. La force d'interaction conservative exercée sur un objet par la Terre est $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} = -mg\vec{\boldsymbol{j}}$. À la figure 4.4, la variation d'énergie potentielle lorsque l'objet de masse m va de la hauteur y_i à une hauteur y_f est, selon l'équation 4.3,

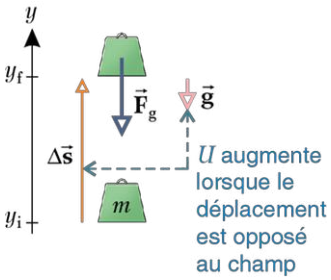


FIGURE 4.4
La variation d'énergie potentielle pour un champ gravitationnel $\vec{\mathbf{g}}$ uniforme

$$\Delta U_g = -\int_i^f (-mg\vec{\boldsymbol{j}}) \cdot (\mathrm{d}y\ \vec{\boldsymbol{j}}) = mg \int_{y_i}^{y_f} \mathrm{d}y = mg\ (y_f - y_i) = mg\ \Delta y \ .$$

Lorsque l'objet se déplace vers le haut (à l'opposé du champ gravitationnel), l'énergie potentielle du système objet-Terre augmente ($\Delta y > 0$). Dans le cas contraire, quand le déplacement de l'objet est vers le bas (dans le même sens que $\vec{\mathbf{g}}$), l'énergie potentielle du système diminue ($\Delta y < 0$).

Pour produire un champ électrique uniforme, on charge deux grandes plaques parallèles avec des charges surfaciques uniformes et opposées (*voir la section 2.5, page 53*). Supposons qu'une charge q se déplace du point initial i au point final f, comme le montre la figure 4.5. Le déplacement de la charge est $\Delta\vec{\mathbf{s}}$, qui forme un angle ϕ par rapport au champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. Les charges sur les plaques ne sont pas affectées par le mouvement de la charge q, ce qui permet de calculer facilement la variation d'énergie potentielle du système :

$$\Delta U = -q \int_i^f \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = -q \int_i^f E \cos\phi \ \mathrm{d}s = -qE \cos\phi \int_i^f \mathrm{d}s \ .$$

L'intégrale donne simplement le module du vecteur déplacement $\Delta\vec{\mathbf{s}}$ reliant le point initial et le point final. On obtient donc la variation d'énergie

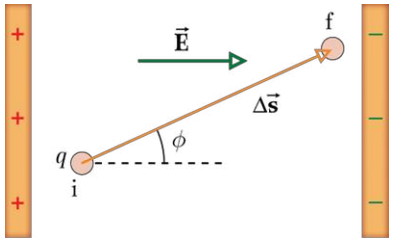


FIGURE 4.5
L'énergie potentielle du système change lorsque la charge q se déplace dans un champ uniforme.

potentielle du système lorsqu'une charge se déplace dans un champ électrique uniforme :

$$\Delta U = -qEs\cos\phi = -q\vec{\mathbf{E}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{s}}\ , \qquad (4.7)$$

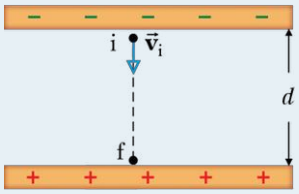
où $0 \leq \phi \leq 180°$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\Delta\vec{\mathbf{s}}$.

Contrairement au champ gravitationnel, le champ électrique peut être orienté de n'importe quelle façon selon l'orientation des plaques. De plus, la charge q peut être positive ou négative. Selon l'équation 4.7, on obtient les résultats suivants en fonction du mouvement de la charge par rapport au champ électrique.

- Pour une charge positive qui se déplace dans un champ électrique, $\Delta U < 0$ quand le déplacement a une composante dans le sens du champ ($0 \leq \phi < 90°$), et $\Delta U > 0$ lorsque le déplacement a une composante opposée au champ ($90° < \phi \leq 180°$).
- Pour une charge négative qui se déplace dans un champ électrique, $\Delta U > 0$ quand le déplacement a une composante dans le sens du champ ($0 \leq \phi < 90°$), et $\Delta U < 0$ lorsque le déplacement a une composante opposée au champ ($90° < \phi \leq 180°$).
- Lorsqu'une charge se déplace perpendiculairement au champ électrique ($\phi = 90°$), $\Delta U = 0$.

EXEMPLE 4.1 La différence entre un proton et un électron

Deux grandes plaques parallèles, séparées par une distance $d = 4{,}30$ cm, ont respectivement une charge surfacique $\sigma_+ = 24{,}7\ \text{nC/m}^2$ et $\sigma_- = -24{,}7\ \text{nC/m}^2$. Un proton est lancé avec une vitesse de $4{,}50 \times 10^5$ m/s vers le bas, comme le montre la figure ci-contre.



a. Quelle est la variation d'énergie potentielle lorsque le proton frappe la plaque positive ?

b. Quel est le module de la vitesse du proton juste avant que celui-ci frappe la plaque ?

c. Si le proton est remplacé par un électron qui se déplace avec la même vitesse initiale, quelle est la variation d'énergie potentielle du système lorsque l'électron frappe la plaque ?

d. Quel est le module de la vitesse de l'électron juste avant que celui-ci frappe la plaque ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.6 montre les plaques, le champ électrique (orienté de la plaque positive vers la plaque négative) et le déplacement $\Delta\vec{\mathbf{s}}$.

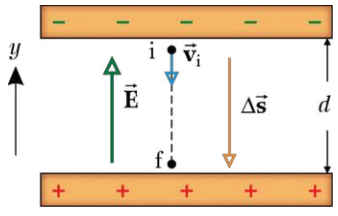


FIGURE 4.6
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.1

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Les masses des particules sont données à l'annexe B. Le déplacement est

$$\Delta\vec{\mathbf{s}} = -d\vec{\boldsymbol{\jmath}}\ . \qquad \text{(i)}$$

Connues	Inconnues
$\sigma = 24{,}7\ \text{nC/m}^2$	ΔU
$d = 0{,}0430$ m	v_f
$v_0 = 4{,}50 \times 10^5$ m/s	
$m_p = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg	
$q = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C	

Identifier les clés

La première **clé** est que des plaques parallèles ayant des charges surfaciques uniformes produisent un champ uniforme obtenu à l'aide de l'équation 2.29 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{j}\,, \qquad \text{(ii)}$$

où $\sigma = \sigma_+$. La deuxième **clé** est l'équation 4.7 qui permet de calculer ΔU d'un système dans lequel une charge se déplace dans un champ uniforme :

$$\Delta U = -q\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les équations (i) et (ii) dans l'équation (iii) :

$$\Delta U = -q\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{j}\right)\cdot(-d\vec{j}) = \frac{q\sigma d}{\epsilon_0}\,, \qquad \text{(iv)}$$

ce qui donne, en insérant les valeurs :

$$\Delta U = \frac{(1{,}602\times10^{-19})(24{,}7\times10^{-9})(0{,}0430)}{8{,}854\times10^{-12}}$$
$$= 1{,}922\times10^{-17}\ \text{J} = 1{,}92\times10^{-17}\ \text{J}\,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

Comme le système est isolé, et que la force électrique est une force conservative, l'énergie mécanique du système est conservée :

$$\Delta E_{\text{méc}} = \Delta K + \Delta U = 0\,,$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{i}}^2 = -\Delta U\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons v_{f} dans l'équation (v) :

$$v_{\text{f}} = \sqrt{v_{\text{i}}^2 - \frac{2\Delta U}{m}}$$
$$= \sqrt{(4{,}50\times10^5)^2 - \frac{2\,(1{,}922\times10^{-17})}{1{,}673\times10^{-27}}}$$
$$v_{\text{f}} = 4{,}24\times10^5\ \text{m/s}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Le proton se déplace à l'opposé du champ électrique. Une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle, ce qui implique que le module de la vitesse diminue. Le proton subit une force électrique opposée à sa vitesse. Nos résultats ont donc du sens.

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

La variation d'énergie potentielle du système se trouve de la même façon que pour le proton. Nous insérons les valeurs pour la charge de l'électron ($q = -e = -1{,}602\times10^{-19}$ C) et pour la masse de l'électron ($m_{\text{e}} = 9{,}109\times10^{-31}$ kg).

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs dans l'équation (iv) :

$$\Delta U = \frac{(-1{,}602\times10^{-19})(24{,}7\times10^{-9})(0{,}0430)}{8{,}854\times10^{-12}}$$
$$= -1{,}922\times10^{-17}\ \text{J} = -1{,}92\times10^{-17}\ \text{J}\,.$$

(réponse)

SOLUTION d.

Résoudre le problème

Nous obtenons le module de la vitesse finale de l'électron en insérant les valeurs dans l'équation (v) :

$$v_{\text{f}} = \sqrt{v_{\text{i}}^2 - \frac{2\Delta U}{m}}$$
$$= \sqrt{(4{,}50\times10^5)^2 - \frac{2\,(-1{,}922)\times10^{-17}}{9{,}109\times10^{-31}}}$$
$$v_{\text{f}} = 6{,}51\times10^6\ \text{m/s}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Lorsque l'électron se déplace entre les mêmes points, l'énergie potentielle du système diminue, car en se déplaçant à l'opposé du champ, l'électron subit une force dans le même sens que sa vitesse. Son énergie cinétique augmente en même temps que l'énergie potentielle du système diminue. C'est bien ce que nous obtenons. La variation de vitesse est beaucoup plus grande pour l'électron, car sa masse est beaucoup plus faible que celle du proton.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.1

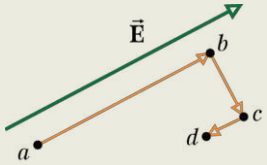
Une particule positive se déplace dans un champ électrique uniforme (*voir la figure ci-dessous*) :

a. du point a au point b ;

b. puis du point b au point c ;

c. puis du point c au point d.

Pour chaque déplacement, indiquez si la variation d'énergie potentielle du système est positive, négative ou nulle.



4.2 Le potentiel électrique

Au chapitre 2, nous avons étudié le champ électrique qui est le médiateur de la force électrique. Le calcul de la force électrique sur une charge se divise en deux étapes : calculer le champ électrique produit par des charges sources, puis calculer la force exercée par le champ sur une charge. Nous allons appliquer une méthode semblable pour l'énergie. Selon l'équation 4.3, la variation d'énergie potentielle électrique d'un système varie lorsqu'une charge q se déplace entre deux points, et cette variation est proportionnelle à la valeur de la charge. On peut donc considérer les charges immobiles comme des charges sources qui produisent le champ électrique. Quand la charge q se déplace, elle passe par des points ayant des potentiels électriques différents. Le potentiel électrique est produit par les charges sources.

On définit la *différence de potentiel* ΔV entre deux points comme la variation d'énergie potentielle par unité de charge que subirait un système constitué de charges sources et d'une charge test q_0 lorsque cette charge se déplace entre les deux points :

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} . \qquad (4.8)$$

Différence de potentiel

La charge q_0 est une sonde qui permet d'obtenir la différence de potentiel. La différence de potentiel est une conséquence des charges sources (soit du champ électrique qu'elles produisent) et non de la charge test.

À partir de cette définition, il est possible de calculer la variation d'énergie potentielle lorsqu'une charge se déplace entre deux points dans l'environnement de charges sources : on calcule d'abord la différence de potentiel entre les deux points, puis la variation d'énergie potentielle causée par le déplacement de la charge q entre deux points par

$$\Delta U = q\,\Delta V . \qquad (4.9)$$

FIGURE 4.7
Alessandro Volta (1745-1827), physicien italien

L'unité du potentiel électrique est le volt (V), d'après le nom du physicien italien Alessandro Volta (1745-1827) (*voir la figure 4.7*), qui est l'inventeur de la première pile. Selon la définition du potentiel, on obtient

$$1\,\mathrm{V} \equiv \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}} = 1\,\mathrm{J/C}\,.$$

MISE EN GARDE

Faites attention à ne pas confondre les symboles exprimant le volume (V), le potentiel (V) et l'unité des volts (V).

Le potentiel à partir du champ électrique

On peut calculer la différence de potentiel entre deux points a et b quand on connaît le champ électrique dans l'environnement de ces points. La figure 4.8 illustre une région où il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ produit par des charges sources non illustrées sur la figure. On prend alors une charge test q_0, qu'on déplace entre les deux points pour calculer le travail produit par le champ électrique. Comme la force électrique est conservative, on peut choisir n'importe quelle trajectoire qui relie les deux points. La variation d'énergie potentielle du système est, selon l'équation 4.3,

$$\Delta U = -q_0 \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}\,.$$

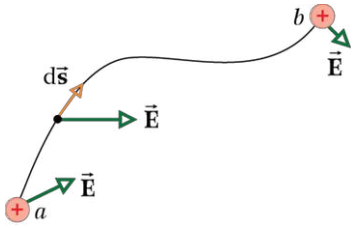


FIGURE 4.8
Le calcul de $V_b - V_a$ à partir du champ électrique

En insérant cette équation dans la définition de la différence de potentiel ($\Delta V = \Delta U/q_0$), on obtient

Différence de potentiel

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}\,. \qquad (4.10)$$

Pour simplifier l'intégrale, on choisit un parcours constitué d'éléments de déplacement parallèles à $\vec{\mathbf{E}}$ et d'éléments perpendiculaires à $\vec{\mathbf{E}}$. On voit que la différence de potentiel entre deux points dépend directement du champ électrique produit par les charges sources. La différence de potentiel est plus facile à utiliser que le champ électrique, car c'est un scalaire.

Dans le cas de la figure 4.9, où le champ est uniforme, il est possible de sortir le champ de l'intégrale pour ainsi obtenir

$$V_b - V_a = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}} = -E\,\Delta s\,\cos\phi\,, \qquad (4.11)$$

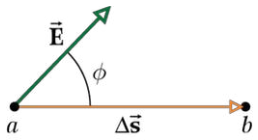


FIGURE 4.9
Le calcul de la différence de potentiel entre les points a et b lorsque $\vec{\mathbf{E}}$ est uniforme.

où $\Delta\vec{\mathbf{s}}$ est le vecteur déplacement reliant le point a et le point b, et ϕ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\Delta\vec{\mathbf{s}}$. Cette équation montre que si le déplacement entre a et b a une composante dans le sens du champ électrique, alors $V_b < V_a$. Ceci peut être résumé de la façon suivante :

Le champ électrique est orienté vers les points ayant un potentiel plus faible.

L'équation 4.11 permet aussi d'exprimer l'unité du champ électrique en fonction du volt (l'unité de la différence de potentiel) et du mètre, car la

différence de potentiel se calcule à partir du champ et d'un déplacement. On obtient

$$1\,\text{V} = 1\,\text{N/C} \times 1\,\text{m} \Rightarrow 1\,\text{N/C} = 1\,\text{V/m}\ .$$

De façon usuelle, on préfère exprimer le champ électrique en V/m, ce qui est l'équivalent du N/C.

À partir du potentiel électrique, on peut réécrire l'équation de la conservation de l'énergie mécanique. Si une charge q se déplace d'un point a à un point b et que le système est isolé, on a

$$\Delta E_{\text{méc}} = \Delta K + q\,\Delta V = 0$$
$$\Delta K = -q\,\Delta V\,. \qquad (4.12)$$

Cette équation permet de définir une unité d'énergie qui est fréquemment utilisée en physique subatomique, l'*électron-volt*, symbolisé par eV :

Électron-volt

L'électron-volt représente la variation d'énergie cinétique acquise par un électron qui se déplace entre deux points ayant une différence de potentiel de 1 V.

Donc, pour une différence de potentiel $\Delta V = 1$ V $= 1$ J/C et $q = -e = -1{,}602 \times 10^{-19}$ C pour l'électron, on obtient le facteur de conversion :

$$1\,\text{eV} = 1e \times 1\,\text{V} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 1\,\text{J/C} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}\ . \qquad (4.13)$$

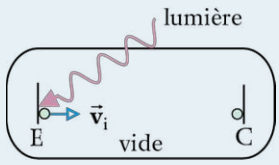
L'électron-volt est une unité de mesure d'énergie très utile dans le contexte de la physique moderne parce que cette unité est bien adaptée aux valeurs d'énergie qu'on rencontre. La physique moderne fait partie des sujets d'étude que nous aborderons dans le tome 3.

Lorsqu'une force extérieure est appliquée, l'énergie mécanique change. L'équation 4.6 peut s'écrire en fonction de la différence de potentiel :

$$W_{\text{ext}} = \Delta K + q\,\Delta V\ . \qquad (4.14)$$

EXEMPLE 4.2 L'effet photoélectrique

En projetant de la lumière sur une plaque (l'émetteur E), il y a éjection d'électrons. C'est l'effet photoélectrique. Pour mesurer l'énergie cinétique et le module de la vitesse des électrons, on applique une différence de potentiel $V_C - V_E$ de $-4{,}50$ V entre l'émetteur et une seconde plaque (le capteur C), de telle sorte que les électrons sont tout juste arrêtés en arrivant au capteur (*voir la figure ci-contre*). Tout le système est dans un tube à vide.



a. Quelle est l'énergie cinétique initiale des électrons ? Exprimez la réponse en eV et en J.

b. Quel est le module de la vitesse initiale des électrons ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Le système est dans le vide, ce qui signifie qu'aucune force extérieure n'est appliquée sur le système (la force gravitationnelle sur les électrons est négligeable). De plus, l'énergie cinétique des électrons au capteur est nulle ($K_C = 0$).

Connues	Inconnues
$q = -e = -1{,}602 \times 10^{-19}$ C	K_E
$V_C - V_E = -4{,}50$ V	v_E
$m = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la conservation de l'énergie mécanique, selon l'équation 4.12 :

$$K_C - K_E = -q\,(V_C - V_E)\,.$$

Résoudre le problème

L'énergie cinétique des électrons, lorsque ces derniers quittent l'émetteur, est

$$K_E = q\,(V_C - V_E)\,.$$

Pour obtenir l'énergie cinétique en eV, il faut garder q sous forme de multiples de la charge élémentaire. Donc,

$$K_E = -e\,(-4{,}50\,\text{V}) = 4{,}50\,\text{eV}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Pour obtenir l'énergie cinétique en joules, il faut exprimer q en coulombs :

$$\begin{aligned} K_E &= -1{,}602\times10^{-19}\,\text{C}\,(-4{,}50\,\text{V}) \\ &= 7{,}209\times10^{-19}\,\text{J} \\ K_E &= 7{,}21\times10^{-19}\,\text{J}\,. \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous obtenons le module de la vitesse à l'aide de la définition de l'énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}\,.$$

Résoudre le problème

Pour trouver la vitesse en m/s, nous devons exprimer l'énergie cinétique dans les unités du SI, c'est-à-dire en joules :

$$v_E = \sqrt{\frac{2\times7{,}209\times10^{-19}\,\text{J}}{9{,}109\times10^{-31}\,\text{kg}}}$$

$$v_E = 1{,}26\times10^{6}\,\text{m/s}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Dans ce problème, l'énergie cinétique initiale de l'électron se transforme en énergie potentielle électrique du système. Nous reparlerons de l'effet photoélectrique dans le tome 3, lorsque nous examinerons la dualité onde-particule de la lumière.

Le point de référence

Jusqu'à présent, nous avons étudié la différence d'énergie potentielle et la différence de potentiel. Dans le tome 1, nous avons vu qu'il est souvent utile de définir une fonction énergie potentielle en choisissant un point de référence $\mathcal{O}$ où $U = 0$. Dans le cas de l'énergie potentielle gravitationnelle près de la surface de la Terre, le sol $y = 0$ est un choix judicieux. Il est possible de choisir un autre point de référence, sans rien changer aux résultats physiques.

De même, dans le cas de l'énergie potentielle électrique, on peut définir une fonction énergie potentielle électrique en choisissant un point de référence $\mathcal{O}$, où $U = 0$. Ce point sera aussi l'endroit où le potentiel électrique sera nul. Le choix du point $\mathcal{O}$ est arbitraire, car il ne change pas les résultats physiques.

Pour calculer le potentiel électrique au point $\mathcal{P}$ en fonction d'un point de référence $\mathcal{O}$, on calcule la différence de potentiel $\Delta V = V_{\mathcal{P}} - V_{\mathcal{O}}$:

$$V(\mathcal{P}) = V_{\mathcal{P}} - V_{\mathcal{O}} = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}\,. \quad (4.15)$$

Comme la force électrique est une force conservative, on peut choisir un parcours entre les deux points qui simplifie le calcul de l'intégrale.

La fonction potentiel permet d'écrire l'équation de la conservation de l'énergie mécanique en fonction de l'énergie mécanique initiale et de l'énergie mécanique finale :

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad (4.16)$$

$$K_i + qV_i = K_f + qV_f\,. \quad (4.17)$$

EXEMPLE 4.3 Le potentiel d'un cylindre infini

Un long cylindre conducteur a un rayon $R = 10{,}0$ cm, et sa charge est uniformément distribuée sur sa surface. La charge surfacique est $\sigma = 4{,}50 \times 10^{-9}$ C/m^2. Selon le résultat de l'exemple 3.4b, le champ électrique dans cette situation est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r \ .$$

On choisit la surface du cylindre comme point de référence.

a. Trouvez une expression algébrique pour le potentiel à une distance r de l'axe du cylindre. Exprimez le potentiel en fonction de r, R et σ.

b. Quel est le potentiel à une distance $r = 20{,}0$ cm ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous présentons à la figure 4.10 le cylindre avec le point $\mathcal{P}$, le point de référence $\mathcal{O}$ et le parcours d'intégration avec l'élément $d\vec{\mathbf{s}}$. Comme le champ électrique est radial, le parcours le plus simple est un parcours radial, où $d\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{u}}_r\, dr$.

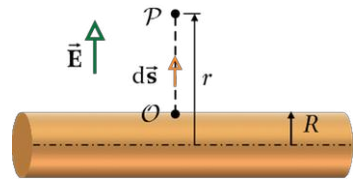


FIGURE 4.10
Le parcours d'intégration pour l'exemple 4.3

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\sigma = 4{,}50 \times 10^{-9}$ C/m^2	$V(r)$
$R = 0{,}100$ m	$V(0{,}200$ m$)$
$r = 0{,}200$ m	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.15 :

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons l'expression du champ donné dans l'énoncé et l'élément $d\vec{\mathbf{s}}$:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_R^r \left(\frac{\sigma R}{\epsilon_0 r'}\vec{\mathbf{u}}_r\right) \cdot \vec{\mathbf{u}}_r\, dr' \\ &= -\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\int_R^r \frac{dr'}{r'} \\ &= -\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\ln(r')\Big|_R^r \end{aligned}$$

$$V(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

REMARQUE

Nous avons utilisé le symbole r' comme variable d'intégration pour la différencier de la distance r où l'on veut le potentiel. Remarquez aussi que l'expression obtenue est valable pour $r > R$.

SOLUTION b.

Résoudre le problème

Il s'agit de remplacer les valeurs dans l'expression trouvée en a. pour $V(r)$:

$$\begin{aligned} V(0{,}200) &= -\frac{(4{,}50\times10^{-9})(0{,}100)}{8{,}854\times10^{-12}}\ln\left(\frac{0{,}200}{0{,}100}\right) \\ &= -35{,}2 \text{ V} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse

La valeur négative du potentiel indique que le point $\mathcal{P}$ est à un potentiel plus faible que le point de référence situé à la surface du cylindre. Ce résultat est correct, car le champ électrique doit être orienté vers des points de potentiel moins élevés.

4.3 Les surfaces équipotentielles

Pour illustrer le champ électrique, on a recours à des lignes de champ électrique. Afin de visualiser le potentiel, on trace les *surfaces équipotentielles*. Pour expliquer cette méthode, nous reprenons l'analogie gravitationnelle avec une méthode bien connue des randonneurs. La figure 4.11a illustre le profil de deux collines rapprochées. Sur une carte en deux dimensions, l'altitude est représentée par des courbes de niveau représentant des points de même altitude, comme à la figure 4.11b. Si vous suivez une courbe de niveau, vous restez à la même altitude. Par contre, si vous vous déplacez perpendiculairement aux courbes de niveau, vous allez dans la direction où la pente est la plus importante. Finalement, plus les courbes de niveau sont rapprochées, plus la pente est importante.

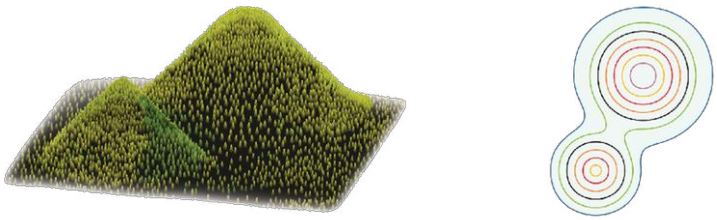


FIGURE 4.11
(a) Le profil en trois dimensions de collines. (b) Les courbes de niveau correspondantes.

Il est possible de définir le potentiel gravitationnel comme l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse. Pour les points près de la surface, ce potentiel est proportionnel à l'altitude. La figure 4.11a représente donc le potentiel gravitationnel des collines, alors que la figure 4.11b montre une coupe transversale de surfaces équipotentielles gravitationnelles.

De la même façon, pour une configuration de charges électriques produisant un potentiel électrique, on trace les surfaces équipotentielles.

Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est une surface dont les points sont tous au même potentiel électrique.

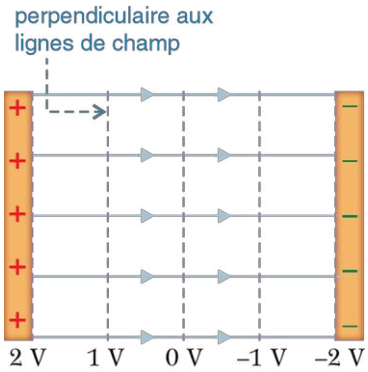


FIGURE 4.12
Les lignes de champ (en bleu) et une coupe transversale des surfaces équipotentielles (en violet) pour un champ uniforme

Pour simplifier les schémas, on trace seulement une coupe transversale des surfaces équipotentielles, équivalente à une carte avec des courbes de niveau. Vous devez alors imaginer la forme tridimensionnelle des surfaces équipotentielles, comme un randonneur qui imagine le relief à partir d'une carte avec des courbes de niveau.

Lorsqu'on se déplace le long d'une surface équipotentielle, le potentiel ne change pas, quelle que soit la distance qu'on parcourt. Cela implique que le déplacement doit être perpendiculaire au champ électrique, de telle sorte que $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$, ce qui implique que le champ électrique (et donc les lignes de champ) est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

Prenons par exemple un système composé de deux grandes plaques ayant des charges surfaciques opposées. On a vu que ce système produit un champ électrique uniforme entre les plaques, orienté de la plaque positive vers la plaque négative. Les surfaces équipotentielles doivent donc être des plans. La figure 4.12

montre les lignes de champ électrique et une coupe transversale des surfaces équipotentielles.

Le champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, et son sens est vers le potentiel plus faible.

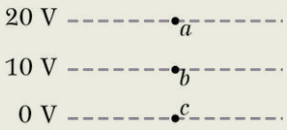
Si on place une charge positive près de la plaque positive, elle va accélérer vers la droite en suivant une ligne de champ. L'énergie potentielle du système va diminuer à mesure que l'énergie cinétique de la charge augmente. On a ajouté des valeurs numériques aux lignes équipotentielles dans la figure 4.12 pour montrer que les lignes de champ vont des potentiels plus élevés vers les potentiels plus faibles.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.2

La figure suivante présente une coupe transversale de surfaces équipotentielles. On place successivement au point *b* un proton et un électron, tous les deux au repos.

a. Vers quel point le proton va-t-il se déplacer ?

b. Vers quel point l'électron va-t-il se déplacer ?



4.4 Le potentiel de charges ponctuelles

Une charge ponctuelle q produit un champ électrique autour d'elle. Pour calculer le potentiel électrique associé à ce champ, on utilise une charge ponctuelle q, placée à l'origine, et un point $\mathcal{P}$, situé à une distance r de la charge ponctuelle. On doit d'abord choisir un point de référence $\mathcal{O}$ où $V = 0$. Un choix intéressant est $r \to \infty$, ce qui veut dire que le potentiel est nul lorsqu'on est très loin de la charge.

La figure 4.13 illustre la charge q et le parcours d'intégration entre le point de référence $\mathcal{O}$ ($r \to \infty$) et le point $\mathcal{P}$ (situé à une distance r de q). Le champ électrique d'une charge ponctuelle est radial* :

$$\vec{\mathbf{E}}(r') = \frac{kq}{r'^2}\,\vec{\mathbf{u}}_r \ .$$

Le parcours choisi est radial $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = dr'\,\vec{\mathbf{u}}_r$.

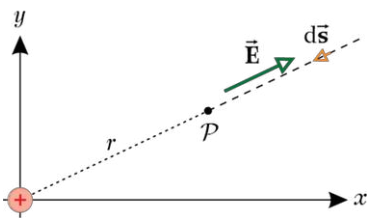


FIGURE 4.13
Le parcours d'intégration pour le calcul du potentiel d'une charge ponctuelle

MISE EN GARDE

Il est tentant d'ajouter un signe négatif pour $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$, car ce vecteur est orienté vers l'origine. Il faut résister à cette tentation, car l'élément dr' est déjà négatif lorsqu'on se déplace de l'infini vers le point $\mathcal{P}$. L'orientation de $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ est obtenue par l'ordre des bornes de l'intégrale.

* Nous utilisons r' comme variable d'intégration, car le symbole r est déjà utilisé pour représenter la distance entre q et le point $\mathcal{P}$.

On obtient alors :

$$\Delta V = V(\mathcal{P}) - 0 = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$$

$$V(\mathcal{P}) = -\int_{\infty}^{r} \left(\frac{kq}{r'^2} \vec{\mathbf{u}}_r \right) \cdot (\mathrm{d}r' \, \vec{\mathbf{u}}_r)$$

$$= -kq \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = \left. \frac{kq}{r'} \right|_{\infty}^{r}$$

Potentiel d'une charge ponctuelle

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} . \tag{4.18}$$

On voit qu'une charge positive produit un potentiel positif qui diminue lorsqu'on s'éloigne de la charge, alors qu'une charge négative produit un potentiel négatif qui augmente (s'approche de zéro) lorsqu'on s'éloigne de la charge. Les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques. La figure 4.14 illustre le potentiel et une coupe transversale des surfaces équipotentielles pour chaque charge. L'équation 4.18 donne aussi le potentiel *à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée*, car le champ électrique est le même que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Physiquement, c'est la différence de potentiel qui est importante. La différence de potentiel entre le point b (situé à une distance r_b de la charge) et un point a (situé à une distance r_a de la charge) est

$$V_b - V_a = \frac{kq}{r_b} - \frac{kq}{r_a} . \tag{4.19}$$

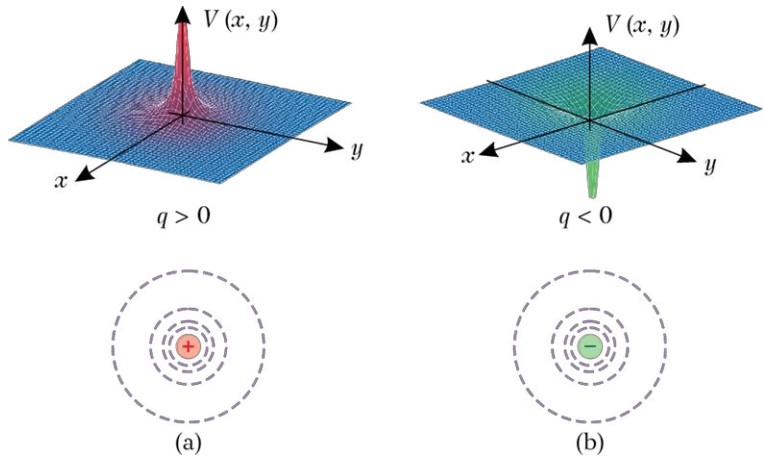


FIGURE 4.14

Le potentiel et une coupe transversale des surfaces équipotentielles pour : (a) une charge ponctuelle positive ; (b) une charge ponctuelle négative.

REMARQUE

L'équation 4.18 décrit le potentiel par rapport au point de référence $r \to \infty$. Il est possible de choisir un autre point de référence. Ceci ajoute une constante à l'équation 4.18. Par contre, la différence de potentiel entre deux points est indépendante du point de référence.

EXEMPLE 4.4 Un proton contre une sphère

Un proton est lancé vers le centre d'une sphère immobile, uniformément chargée, de 2,00 cm de rayon. Le potentiel à la surface de la sphère est de 1500 V. Le proton a une vitesse de $4{,}4 \times 10^5$ m/s lorsqu'il se trouve à une distance de 1,00 m de la sphère.

a. Quelle est la charge sur la sphère ?

b. À quelle distance de la sphère le proton s'immobilise-t-il ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous traçons d'abord le schéma de la situation initiale et finale, comme l'illustre la figure 4.15.

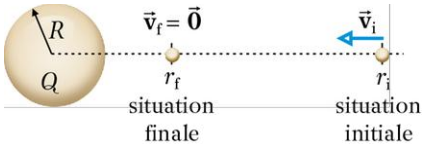


FIGURE 4.15
Schéma de la situation pour l'exemple 4.4

Décortiquer le problème

Connues	
$R = 0{,}0200$ m	$V(R) = 1500$ V
$v_i = 4{,}4 \times 10^5$ m/s	$r_i = 1{,}00$ m
$v_f = 0{,}0$ m/s	$q = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C
$m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg	

Inconnues
Q
r_f

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.18 qui donne le potentiel à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée :

$$V = \frac{kQ}{r} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous connaissons le potentiel à $r = R = 0{,}0200$ m. Nous isolons Q dans l'équation (i) :

$$Q = \frac{VR}{k} = \frac{1500 \times 0{,}0200}{8{,}99 \times 10^9} = 3{,}337 \times 10^{-9} \text{ C}$$
$$= 3{,}34 \text{ nC} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la conservation de l'énergie mécanique, car le système sphère-proton est un système isolé qui interagit par la force électrique, une force conservative. Comme la sphère demeure approximativement immobile (sa masse est beaucoup plus grande que celle du proton), nous utilisons l'équation 4.17 :

$$K_i + qV_i = K_f + qV_f$$
$$\frac{1}{2}mv_i^2 + q\frac{kQ}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 + q\frac{kQ}{r_f} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons r_f en tenant compte que $v_f = 0$:

$$r_f = \frac{kQq}{\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{kQq}{r_i}}$$
$$r_f = 0{,}0288 \text{ m} = 2{,}9 \text{ cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

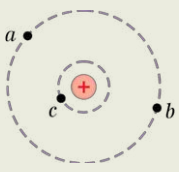
Valider la réponse

La réponse indique que le proton ne frappe pas la sphère : il s'arrête avant d'atteindre la surface. Le proton va ensuite repartir dans l'autre sens. Ceci est correct, car les charges de même signe se repoussent.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.3

La figure suivante montre une coupe transversale de surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle et trois points. Classez, par ordre croissant (du plus négatif au plus positif), les différences de potentiel suivantes :

(i) $V_c - V_b$
(ii) $V_c - V_a$
(iii) $V_b - V_a$
(iv) $V_a - V_c$



Le potentiel d'une configuration de charges ponctuelles

Défi animé 4.1
Dans un système de deux charges ponctuelles, sur la droite qui relie les deux charges, combien de points peut-on trouver pour lesquels le potentiel électrique est nul, en supposant que ces charges sont de même signe ou de signe opposé ?

Lorsqu'une configuration est constituée de plusieurs charges ponctuelles, on calcule le potentiel à un point $\mathcal{P}$ en appliquant le principe de superposition. Comme le champ électrique résultant est la somme vectorielle des champs produits par chacune des charges, le potentiel net est égal à la somme algébrique des potentiels produits par chacune des charges. Si r_i est la distance entre la charge q_i et la position du point $\mathcal{P}$ où l'on veut le potentiel, alors on a

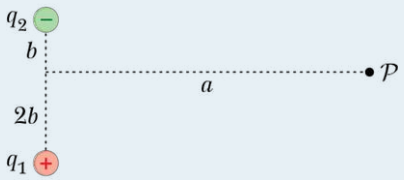
Potentiel d'une configuration de charges ponctuelles

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum \frac{kq_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} . \qquad (4.20)$$

Le potentiel est plus simple à calculer que le champ électrique, car dans l'équation 4.20, on doit faire une somme algébrique plutôt qu'une somme vectorielle. Dans l'équation 4.20, le point de référence est de nouveau $r \to \infty$.

EXEMPLE 4.5 Le potentiel produit par deux charges

Dans la figure ci-contre, une charge $q_1 = 4{,}5$ nC est placée près d'une charge $q_2 = -2{,}5$ nC. Calculez le potentiel au point $\mathcal{P}$ si $a = 12$ cm et $b = 4{,}0$ cm.



SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 4.16.

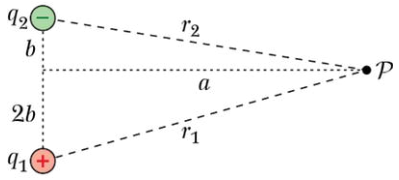


FIGURE 4.16
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.5

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$q_1 = 4{,}5 \times 10^{-9}$ C	$V(\mathcal{P})$
$q_2 = -2{,}5 \times 10^{-9}$ C	
$r_1 = \sqrt{a^2 + (2b)^2} = 0{,}1442$ m	
$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}1265$ m	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.20 :

$$V(\mathcal{P}) = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} . \qquad (i)$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (i) :

$$V = \frac{8{,}99 \times 10^9 \times 4{,}5 \times 10^{-9}}{0{,}1442} + \frac{8{,}99 \times 10^9 (-2{,}5 \times 10^{-9})}{0{,}1265}$$
$$= 103 \text{ V} = 1{,}0 \times 10^2 \text{ V} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le signe indique que le point $\mathcal{P}$ a un potentiel plus élevé que le point à l'infini. Donc, une charge positive qui arriverait de l'infini aurait besoin d'une certaine énergie cinétique initiale ou d'une force extérieure pour se rendre au point $\mathcal{P}$.

4.5 L'énergie potentielle de charges ponctuelles

Jusqu'à présent, on a supposé qu'une seule charge se déplaçait et que les autres charges (les charges sources) étaient immobiles. Dans certaines situations, plusieurs charges se déplacent, ce qui change l'énergie potentielle du système. Pour analyser ce problème, il faut être capable de calculer l'énergie potentielle selon la position de chaque charge.

Voyons d'abord l'énergie potentielle associée à un système de deux charges q_1 et q_2. On choisit comme point de référence la situation où les charges sont très éloignées l'une de l'autre : q_1 à une position fixe et q_2 à $r \to \infty$. Dans cette situation, $U = 0$. Supposons maintenant qu'on déplace, au moyen d'une force $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, la charge q_2 de sa position initiale à une position où elle se retrouve à une distance r_{12} de q_1 (*voir la figure 4.17*). L'énergie potentielle U de la configuration correspond à la variation d'énergie potentielle du système, engendrée par le déplacement de q_2 dans le champ électrique de q_1 :

$$\Delta U = U - 0 = q_2 \, \Delta V_1 \, ,$$

où ΔV_1 est la différence de potentiel produite par la charge q_1. Selon l'équation 4.18, on obtient l'énergie potentielle du système (avec $r \to \infty$ comme point de référence) :

$$U = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}} \, . \tag{4.21}$$

L'énergie potentielle est positive lorsque les charges ont le même signe (et qu'elles se repoussent), et l'énergie potentielle est négative lorsque les charges ont des signes opposés (et qu'elles s'attirent).

Pour comprendre la signification du signe dans l'énergie potentielle, on trace les diagrammes d'énergie pour la situation où les deux charges ont le même signe (*voir la figure 4.18*) et pour la situation où les charges sont opposées (*voir la figure 4.19*). Dans ces diagrammes, on trace la fonction U en fonction de r_{12} (qui est nécessairement positif) et une ligne horizontale représentant l'énergie mécanique. L'énergie cinétique est la différence entre ces deux courbes.

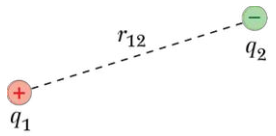


FIGURE 4.17
Le système a une énergie potentielle lorsque les charges sont séparées par une distance de r_{12}.

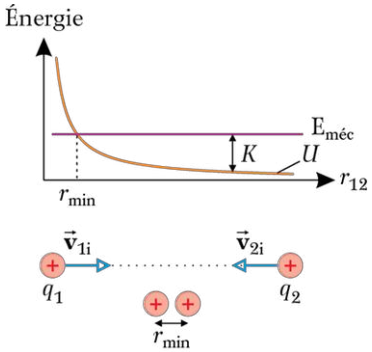


FIGURE 4.18
Le diagramme d'énergie pour deux charges de même signe

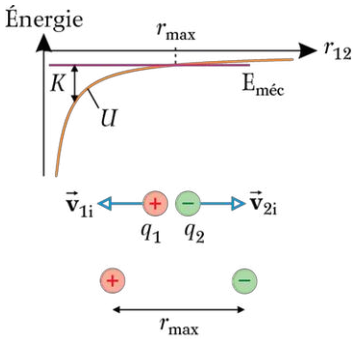


FIGURE 4.19
Le diagramme d'énergie pour deux charges de signes opposés

La figure 4.18 montre deux charges identiques qu'on lance l'une vers l'autre, dans le référentiel où le centre de masse du système est immobile. En se rapprochant, les charges ralentissent à cause de la répulsion électrique. L'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle électrique. Lorsque $r = r_{min}$, la droite de l'énergie mécanique rencontre la courbe de l'énergie potentielle. Toute l'énergie cinétique s'est transformée en énergie potentielle, et les charges sont momentanément immobiles. La distance r_{min} est la distance minimale entre les deux charges. Ensuite, les charges s'éloignent l'une de l'autre.

À la figure 4.19, deux charges de signes opposés sont lancées avec des vitesses opposées. Les charges s'éloignent avec un module de vitesse qui diminue. Dans le cas où l'énergie mécanique est négative, les charges vont s'éloigner jusqu'à une distance maximale r_{max}, où elles sont momentanément arrêtées (dans le référentiel du centre de masse). Ensuite, l'attraction électrique va les ramener l'une vers l'autre. Si l'énergie mécanique est positive, les charges vont ralentir, mais leur énergie cinétique est suffisante pour vaincre l'attraction électrique, et elles vont pouvoir se rendre jusqu'à l'infini.

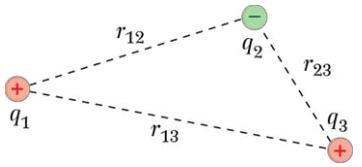


FIGURE 4.20
Le calcul de l'énergie potentielle du système de trois charges

On peut construire un système de trois charges en ajoutant une charge q_3, qu'on déplace de l'infini jusqu'à la position désirée, comme à la figure 4.20. Ceci change l'énergie potentielle du système :

$$\Delta U = q_3 \, \Delta V = q_3 \left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}} \right),$$

où ΔV est la différence de potentiel entre la position désirée et l'infini produite par les deux autres charges. L'énergie potentielle avant le déplacement était égale à l'énergie potentielle du système des deux charges, donnée par l'équation 4.21. Alors, l'énergie potentielle du système de trois charges est

Énergie potentielle d'une configuration de charges ponctuelles

$$U = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} . \qquad (4.22)$$

Remarquez qu'on peut construire la configuration dans un autre ordre et obtenir le même résultat. Dans le cas où il y a N charges, on calcule l'énergie potentielle pour chaque paire de charges, puis on fait la somme :

$$U = \sum_{i<j}^{N} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} , \qquad (4.23)$$

où r_{ij} représente la distance entre les charges q_i et q_j, et la condition $i < j$ est présente pour ne pas compter deux fois la même paire.

EXEMPLE 4.6 La vitesse de libération

Deux sphères identiques ont une masse de 20 g et des charges opposées $q_1 = 28$ nC et $q_2 = -28$ nC. On les lance dans des sens opposés, avec une vitesse de module v. Lorsque les sphères sont lancées, elles sont séparées par une distance de 1,0 cm. Quel est le module de la vitesse initiale minimale v pour qu'elles ne reviennent pas l'une vers l'autre ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous présentons le schéma de la situation, avec l'état initial et l'état final du système, à la figure 4.21.

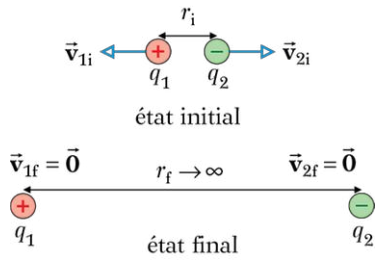


FIGURE 4.21
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.6

Décortiquer le problème

Le système constitué des deux charges est fermé, et la force d'interaction est conservative. Pour que les charges ne reviennent pas l'une vers l'autre, il faut que la distance qui les sépare soit $r_f \to \infty$. Le module de la vitesse minimale qu'elles doivent avoir à la fin est une vitesse nulle ($\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{0}$).

Connues		Inconnue
$m_1 = m_2 = 0{,}020$ kg	$r_i = 0{,}010$ m	$v_{1i} = v_{2i} = v$
$q_1 = 28 \times 10^{-9}$ C	$q_2 = -28 \times 10^{-9}$ C	
$v_{1f} = v_{2f} = 0{,}0$ m/s	$r_f \to \infty$	

Identifier la clé

La clé est la conservation de l'énergie mécanique donnée par l'équation 4.16 :

$$K_i + U_i = K_f + U_f \ ,$$

où

$$U = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} \ .$$

Résoudre le problème

L'énergie cinétique finale est nulle, car la vitesse des charges est nulle. De plus, l'énergie potentielle finale du système est nulle, car $r_f \to \infty$. Nous obtenons

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{kq_1q_2}{r_i} = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{-\frac{2kq_1q_2}{r_i(m_1 + m_2)}} \ .$$

Nous remplaçons ensuite les valeurs :

$$v = \sqrt{-\frac{2 \times 8{,}99 \times 10^9 \ (28 \times 10^{-9})(-28 \times 10^{-9})}{0{,}010 \ (0{,}020 + 0{,}020)}}$$

$$= 0{,}19 \text{ m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les deux signes négatifs dans la racine carrée se simplifient, comme il se doit. La réponse est positive, car on veut un module.

4.6 Le potentiel d'une distribution continue

Lorsqu'une charge est distribuée dans un volume, sur une surface ou le long d'une ligne, on calcule le potentiel à un point $\mathcal{P}$ en divisant la distribution continue en éléments de charge dq (*voir la figure 4.22 à la page suivante*) comme on l'a fait pour calculer le champ électrique. Chaque élément de charge peut être considéré comme une charge ponctuelle, produisant un potentiel d$V = k$ dq/r,

où r est la distance entre l'élément de charge et le point $\mathcal{P}$. Le potentiel net se calcule à l'aide du principe de superposition. On obtient

Potentiel d'une distribution continue

$$V = k\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}. \tag{4.24}$$

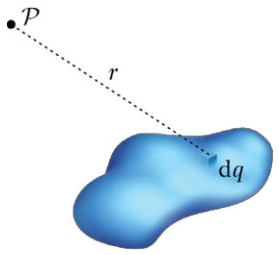


FIGURE 4.22
Le calcul de $V(\mathcal{P})$

La stratégie suivante peut être utilisée.

STRATÉGIE 4.1 Le potentiel produit par une distribution continue de charge

Illustrer la situation

Dessinez l'objet avec un système de coordonnées. Indiquez bien le point $\mathcal{P}$ où vous voulez calculer le potentiel. Sur le schéma, décomposez l'objet en éléments dq pour lesquels vous pouvez calculer le potentiel dV.

Décortiquer le problème

- Exprimez l'élément dq en fonction d'une densité de charge :

$$dq = \begin{cases} \lambda\, dx & \text{(ligne)} \\ \sigma\, dA & \text{(surface)} \\ \rho\, dV & \text{(volume)}. \end{cases}$$

- Exprimez la distance r en fonction de la variable d'intégration et des autres paramètres.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.24 :

$$V = k\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}.$$

Les bornes de l'intégrale correspondent aux limites de l'objet.

Résoudre le problème

- Si le facteur à intégrer est une somme, écrivez l'intégrale comme une somme d'intégrales. Sortez les constantes de l'intégrale.
- Calculez l'intégrale en utilisant au besoin la table d'intégrales de l'annexe E.
- Remplacez les bornes de l'intégrale.

Valider la réponse

Vérifiez l'ordre de grandeur et le signe de la réponse. Il est aussi possible de vérifier le potentiel à une grande distance : si $\mathcal{P}$ est très éloigné par rapport aux dimensions de l'objet, celui-ci devient équivalent à une charge ponctuelle et le potentiel $V \approx \frac{kQ}{r}$.

MISE EN GARDE

Dans l'équation 4.24, le point de référence est $r \to \infty$. Ceci donne des valeurs finies lorsque la distribution est finie. Dans le cas d'une distribution infinie, comme un fil infini ou un plan infini, l'équation 4.24 donne une réponse infinie, car le point $r \to \infty$ ne convient pas comme point de référence. Il est préférable, dans ces cas, d'utiliser la méthode de l'exemple 4.3 pour calculer le potentiel.

EXEMPLE 4.7 Le potentiel d'une tige

Une tige de longueur L a une charge Q uniformément distribuée sur sa longueur. Calculez le potentiel à une position y au-dessus du centre de la tige.

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous présentons le schéma de la situation à la figure 4.23, avec un élément dq situé à la coordonnée x. Nous avons placé l'axe des x parallèlement à la tige, avec l'origine vis-à-vis du centre de celle-ci.

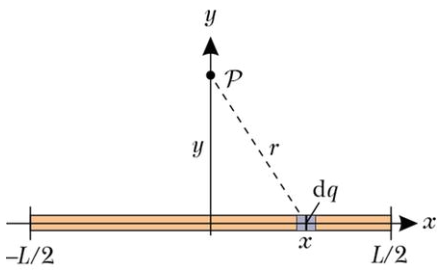


FIGURE 4.23
Le schéma de la situation de l'exemple 4.7

Décortiquer le problème

La charge est uniformément distribuée sur la tige; alors la charge linéique est $\lambda = Q/L$, et l'élément de charge est

$$dq = \lambda\, dx = \frac{Q}{L}\, dx\,. \qquad \text{(i)}$$

La distance r entre l'élément dq et le point $\mathcal{P}$ est, selon la figure 4.23,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Ici, y est un paramètre, et x varie de $x = -L/2$ à $x = L/2$.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.24 :

$$V = k\int \frac{dq}{r} = k\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous sortons λ de l'intégrale, puis en nous référant à la table d'intégrales de l'annexe E, nous obtenons

$$\begin{aligned} V &= k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= k\lambda \ln\left[x + \sqrt{x^2 + y^2}\right]\Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{kQ}{L}\left\{\ln\left[\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}\right] - \ln\left[-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier la dernière expression, nous utilisons l'identité $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$:

$$V = \frac{kQ}{L} \ln\left[\frac{\sqrt{y^2 + \frac{L^2}{4}} + \frac{L}{2}}{\sqrt{y^2 + \frac{L^2}{4}} - \frac{L}{2}}\right]. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le potentiel doit avoir le même signe que la charge Q, quel que soit le signe de y, ce qui est le cas puisque la fonction ln est toujours positive. Il est possible de vérifier que $V \approx kq/y$ pour $y \to \infty$, mais cette vérification est presque aussi longue que l'exemple. Remarquez que pour une tige infinie ($L \to \infty$), le potentiel tend aussi vers l'infini. Ceci indique que le point $r \to \infty$ n'est pas un bon point de référence pour une tige infinie.

Le potentiel d'un anneau et d'un disque

Pour calculer le potentiel à une coordonnée z sur l'axe d'un anneau, de rayon R, uniformément chargé, on doit diviser l'anneau en éléments dq, comme le montre la figure 4.24. Dans ce cas, tous les éléments de charge sont à une distance $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Le potentiel est alors

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}\int dq\,.$$

L'intégrale donne simplement la charge Q de l'anneau. Le potentiel est donc

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}\,. \qquad (4.25)$$

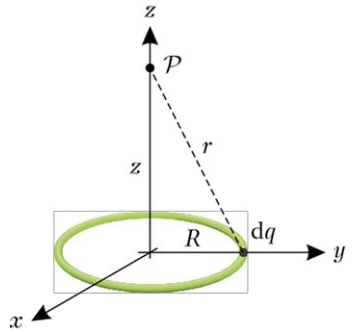


FIGURE 4.24
Le calcul du potentiel sur l'axe d'un anneau chargé

Le potentiel a le même signe que la charge : si l'anneau est chargé positivement ($Q > 0$), le potentiel est positif, et si l'anneau est chargé négativement, le potentiel est négatif. Remarquez aussi que pour $z \gg R$, l'anneau doit ressembler à une charge ponctuelle. Selon l'équation 4.25, on obtient, dans ce cas,

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|},$$

ce qui est bien le potentiel d'une charge ponctuelle.

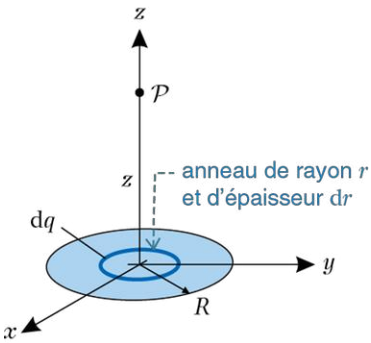


FIGURE 4.25
Le calcul du potentiel sur l'axe d'un disque chargé

La figure 4.25 illustre un disque de rayon R ayant une charge surfacique σ uniforme. Pour calculer le potentiel à une coordonnée z sur l'axe, on divise le disque en éléments infinitésimaux en forme d'anneau de rayon r et d'épaisseur dr. La charge sur un anneau est

$$dq = \sigma\, dA = \sigma\, 2\pi r\, dr\ .$$

Le potentiel dV d'un anneau est obtenu en remplaçant cette charge et le rayon r dans l'équation 4.25 :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\sigma 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\right).$$

Le potentiel du disque complet est obtenu en calculant la somme (c'est-à-dire l'intégrale) sur tous les petits anneaux infinitésimaux, dont les rayons varient de $r = 0$ à $r = R$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r^2+z^2}\Big|_0^R \\ V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right). \end{aligned} \qquad (4.26)$$

Encore une fois, le signe du potentiel dépend uniquement du signe de la charge surfacique. Cette équation donne le potentiel autant pour un point au-dessus du disque (avec $z > 0$) que pour un point en dessous du disque (avec $z < 0$). Pour vérifier si l'équation 4.26 donne l'expression du potentiel d'une charge ponctuelle lorsque $z \gg R$, on peut réécrire l'équation ainsi :

$$V = \frac{Q/(\pi R^2)}{2\epsilon_0}|z|\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right).$$

Selon l'approximation du binôme (*voir l'annexe E*), $(1+x)^n \approx 1+nx$, on obtient

$$V \approx \frac{Q|z|}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}-1\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|z|}.$$

Si une configuration possède plusieurs disques ou anneaux, on trouve le potentiel à l'aide du principe de superposition :

$$V = V_1 + V_2 + \cdots. \qquad (4.27)$$

4.7 Le calcul du champ électrique à partir du potentiel

On a vu à la section précédente qu'il est plus simple de calculer le potentiel que de calculer le champ électrique pour les distributions continues, sauf dans les cas étudiés au chapitre 3 où la symétrie simplifie grandement le calcul. À partir du potentiel, peut-on calculer le champ électrique correspondant ? On a défini la différence de potentiel à partir d'une intégrale du champ électrique à l'équation 4.10. Est-il possible d'inverser cette équation pour obtenir $\vec{\mathbf{E}}$ à partir de V ?

La figure 4.26 illustre une région où il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z)$. Les points a et b sont très rapprochés, de telle sorte que le champ ne change pas. Le vecteur déplacement entre les deux points est infinitésimal : $d\vec{\mathbf{s}}_1 = dx\,\vec{\imath}$. La différence de potentiel entre ces deux points est

$$V_b - V_a = dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_1 = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\imath}\, dx = -E_x\, dx\ .$$

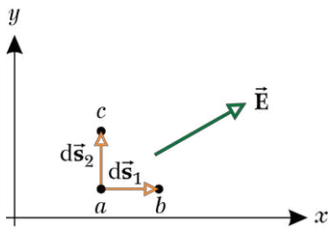


FIGURE 4.26
On calcule la différence de potentiel entre deux points éloignés de façon infinitésimale.

Selon le calcul différentiel, la différentielle d'une variable V peut s'exprimer en fonction d'une variable indépendante x de la façon suivante :

$$dV = \frac{dV}{dx}\, dx\ .$$

Ceci implique que

$$\frac{dV}{dx}\, dx = -E_x\, dx\ .$$

Comme les points a et b sont arbitraires, l'élément dx est aussi arbitraire. Cette équation implique alors que

$$E_x = -\frac{dV}{dx}\ . \tag{4.28}$$

On peut aussi analyser la différence de potentiel entre les points a et c, reliés par le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{\mathbf{s}}_2 = dy\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. On obtient alors

$$V_c - V_a = dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_2 = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}}\, dy = -E_y\, dy\ .$$

Cette fois-ci, on exprime la différentielle dV en fonction de la variable indépendante y, pour obtenir

$$dV = \frac{dV}{dy}\, dy = -E_y\, dy \Rightarrow E_y = -\frac{dV}{dy}\ . \tag{4.29}$$

Il est possible de faire la même analyse dans la direction de z pour obtenir $E_z = -\dfrac{dV}{dz}$. Donc, chaque composante du champ électrique est obtenue par l'opposé de la dérivée du potentiel par rapport à la coordonnée correspondante. Chaque coordonnée est indépendante des autres coordonnées. Les dérivées

sont alors des *dérivées partielles*, qu'on représente par le symbole ∂. Donc, le champ électrique est donné par

Champ électrique à partir du potentiel

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{4.30}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V = -\vec{\nabla}V\ .$$

L'opérateur $\vec{\nabla}V$ désigne une opération vectorielle appelée le *gradient* de V. Le champ électrique est donc l'opposé du gradient du potentiel. De façon générale, le gradient permet d'obtenir une quantité vectorielle à partir d'un scalaire non uniforme dans l'espace.

REMARQUE

Pour calculer une dérivée partielle par rapport à x, on calcule la dérivée par rapport à x en considérant les coordonnées y et z comme des constantes. De même, pour le calcul de la dérivée partielle par rapport à y ou par rapport à z, on calcule la dérivée en considérant les autres coordonnées comme des constantes.

Lorsque le potentiel dépend uniquement de la coordonnée radiale r, le champ électrique doit être radial, avec

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\ . \tag{4.31}$$

Pour calculer le champ électrique d'une configuration complexe, il est plus simple de déterminer d'abord le potentiel à l'aide de l'équation 4.24, car le potentiel est un scalaire. Ensuite, on obtient le champ électrique à l'aide d'une dérivée.

EXEMPLE 4.8 Le champ électrique d'un anneau

Le potentiel à une position z sur l'axe d'un anneau, de charge Q et de rayon R, est

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\ .$$

Calculez le champ électrique à la position z.

SOLUTION

Identifier la clé

La clé est l'équation 4.30 :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(z^2+R^2)^{-1/2}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

La dérivée est

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^2+R^2)^{-1/2} = \frac{-2z}{2}(z^2+R^2)^{-3/2}$$

$$= -\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

En insérant ce résultat dans l'équation (i), nous obtenons

$$\vec{\mathbf{E}} = \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{k}\right)\frac{-z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{k}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

C'est bien le résultat obtenu à l'équation 2.22 de la page 54.

Dans un graphique du potentiel en fonction d'une coordonnée cartésienne, la composante du champ est l'opposé de la pente. Ceci implique que le module du champ est important lorsque le potentiel varie rapidement d'un point à l'autre. Dans le tome 1, nous avons obtenu un résultat semblable dans le graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position : la force conservative est l'opposé de la pente.

Il est aussi possible d'utiliser ce résultat dans les schémas de surfaces équipotentielles. En effet, plus les équipotentielles sont rapprochées, plus le module du champ sera grand. À la figure 4.27, les surfaces équipotentielles sont plus rapprochées près de la charge ponctuelle, car le champ y est plus intense.

FIGURE 4.27
Les surfaces équipotentielles sont plus rapprochées aux endroits où le champ est plus intense.

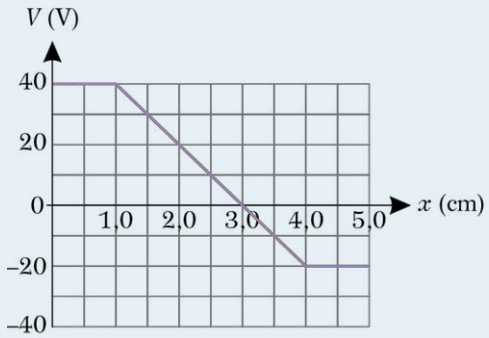
Le module du champ électrique est plus grand lorsque les surfaces équipotentielles sont rapprochées. Le champ est orienté perpendiculairement aux surfaces équipotentielles, et il est orienté vers les surfaces de potentiel plus faible.

EXEMPLE 4.9 Un graphique V en fonction de x

Le potentiel en fonction de x est présenté dans le graphique ci-contre. Le potentiel dépend uniquement de la coordonnée x.

a. Quel est le champ à $x = 3{,}0$ cm ?

b. Quelle est la force exercée par le champ sur un électron se trouvant à $x = 3{,}0$ cm ?



SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.30, qui peut être écrite de la façon suivante :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\imath}\ (\text{pente})\ .$$

Résoudre le problème

Pour calculer la pente à $x = 3{,}0$ cm, nous prenons les points (1,0 cm ; 40 V) et (4,0 cm ; –20 V) sur le graphique :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\imath}\,\frac{(-20\ \text{V}) - 40\ \text{V}}{0{,}040\ \text{m} - 0{,}010\ \text{m}} = 2{,}0\times10^{3}\ \text{V/m}\ \vec{\imath}\ .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.2 de la page 36, en utilisant $q = -1{,}60\times10^{-19}$ C pour un électron :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\vec{\mathbf{F}} = (-1{,}60\times10^{-19}\ \text{C})\ 2{,}0\times10^{3}\ \text{V/m}\ \vec{\imath}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = -3{,}2\times10^{-16}\ \text{N}\ \vec{\imath}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le champ électrique a une composante positive, car la pente est négative. La force est opposée au champ, car l'électron est une particule négative.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.4

La figure suivante présente une coupe transversale de surfaces équipotentielles. Tracez le champ électrique correspondant.

4.8 Le potentiel des conducteurs en équilibre électrostatique

Le potentiel électrique et sa relation avec le champ électrique vont maintenant nous permettre d'obtenir d'importants résultats supplémentaires sur les conducteurs en équilibre électrostatique. À la section 3.5, nous avons vu entre autres que lorsqu'un conducteur est en équilibre électrostatique, le champ électrique est nul à l'intérieur. De plus, la charge excédentaire doit se trouver sur la surface du conducteur.

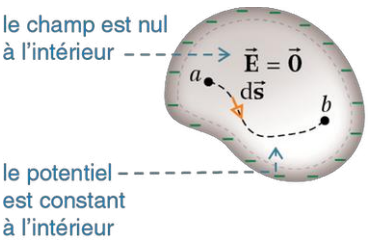


FIGURE 4.28
Le calcul de la différence de potentiel à l'intérieur d'un conducteur

On veut maintenant calculer la différence de potentiel entre deux points quelconques a et b à l'intérieur du conducteur. La figure 4.28 illustre le parcours d'intégration utilisé. On obtient

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_b = V_a \,, \tag{4.32}$$

car $\vec{E} = \vec{0}$ sur tout le parcours. Comme les points choisis sont quelconques :

> Tous les points d'un conducteur en équilibre électrostatique sont au même potentiel.

Ceci inclut la surface du conducteur. Donc, **la surface du conducteur est une surface équipotentielle.** On peut alors dire que le conducteur est à un potentiel donné.

Il est intéressant d'étudier comme exemple le cas d'une sphère conductrice de rayon R, qui porte une charge Q. On sait que le champ à l'extérieur de celle-ci est équivalent au champ d'une charge ponctuelle, ce qui implique que le potentiel à l'extérieur est le même que le potentiel d'une charge ponctuelle. Pour un point de référence à l'infini, le potentiel à un point $\mathcal{P}$ situé à une distance r du centre de la sphère est

$$V(r) = \frac{kq}{r} \qquad (r \geq R) \,.$$

Le potentiel est constant à l'intérieur, et il est égal au potentiel à la surface. On obtient donc le potentiel d'une sphère conductrice de rayon R :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R} & (r \leq R) \\ \dfrac{kQ}{r} & (r \geq R) \end{cases} . \tag{4.33}$$

La figure 4.29 montre le graphique du potentiel et le graphique du module du champ éléctrique en fonction de la distance r par rapport au centre de la sphère. Remarquez que le potentiel a la même valeur des deux côtés de la surface, alors que le module du champ change très rapidement à la surface, de zéro à kQ/R^2.

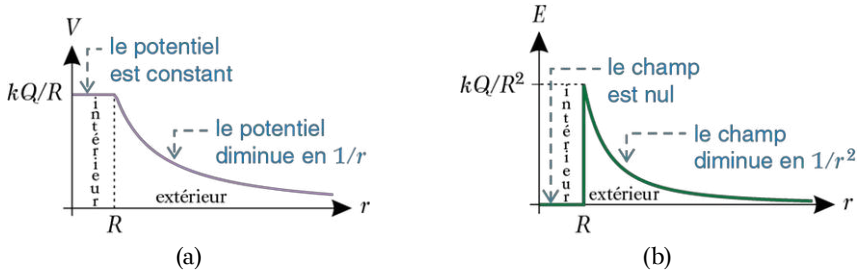


FIGURE 4.29
(a) Le potentiel et (b) le champ en fonction de la distance au centre de la sphère conductrice

Dans le cas d'un conducteur non sphérique, le module du champ électrique à l'extérieur est plus complexe que le champ d'une charge ponctuelle, comme c'est le cas pour un conducteur sphérique. Pour modéliser qualitativement le comportement d'un conducteur de forme irrégulière, on prend deux sphères conductrices qui sont reliées par un long fil conducteur, comme le montre la figure 4.30. Les deux sphères et le long fil ne forment alors qu'un seul grand conducteur non sphérique, au même potentiel. La petite sphère a un rayon R_1 et une charge Q_1, et la grande sphère a une charge Q_2 et un rayon $R_2 > R_1$. Puisqu'elles sont au même potentiel,

$$\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{4.34}$$

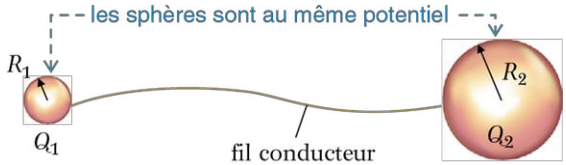


FIGURE 4.30
Deux sphères conductrices reliées par un conducteur sont au même potentiel.

La plus petite sphère porte une charge plus faible que la grande sphère. Le potentiel est le même, mais le champ électrique à la surface de chaque sphère est différent. Pour un conducteur, on a vu à la section 3.5 que le module du champ tout juste à l'extérieur d'un conducteur est $E = \sigma/\epsilon_0$. On obtient alors

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1/\epsilon_0}{\sigma_2/\epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Pour une sphère conductrice, la charge est uniformément distribuée ($\sigma = Q/[4\pi R^2]$), ce qui donne

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/(4\pi R_1^2)}{Q_2/(4\pi R_2^2)} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

En remplaçant le résultat de l'équation 4.34, on obtient

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (4.35)$$

La petite sphère produit donc un plus grand champ électrique sur sa surface extérieure que la grande sphère.

Les objets conducteurs non sphériques n'ont pas des charges uniformément distribuées sur leur surface. Toutefois, l'exemple des sphères montre que vis-à-vis des endroits pointus, équivalents à des sphères de petit rayon, le module du champ tout juste à l'extérieur est plus grand. C'est ce qu'on appelle l'*effet de pointe*.

FIGURE 4.31
L'effet couronne autour de l'anneau de protection d'un isolateur d'une ligne à haute tension.

Lorsque le module du champ électrique atteint une certaine valeur, appelé le *champ disruptif*, il commence à ioniser les molécules d'air. L'air devient donc conducteur, et il y a un mouvement de charges entre le conducteur et l'air. C'est l'*effet couronne*, aussi appelé l'*effet corona* (*voir la figure 4.31*), car la décharge est accompagnée de lumière lorsque des électrons se recombinent aux ions positifs.

L'effet couronne est utilisé pour produire des ions à l'aide d'une pointe métallique. Par exemple, les filtres électrostatiques transfèrent une charge aux grains de poussière, puis ceux-ci traversent un champ électrique perpendiculaire au mouvement de l'air. L'effet couronne est aussi utilisé dans les photocopieurs et les systèmes de peinture pour les surfaces métalliques, afin de charger les gouttelettes de peinture. L'effet permet aussi la réduction de charge de façon graduelle pour éviter une décharge incontrôlée sur les ailes d'avion. L'effet couronne doit être minimisé dans les composantes électriques (transformateurs, moteurs, condensateurs), car elle peut les endommager. De même, il faut en tenir compte dans la conception des lignes de transmission à haute tension.

Dans le cas où le champ est intense sur une longue distance, il y a un *arc électrique*. C'est ce qui se produit durant un orage électrique. Le champ électrique entre un nuage et un point de la surface de la Terre devient suffisamment important pour qu'une décharge se produise entre ces deux points. L'effet de pointe fait qu'il est plus probable que l'éclair frappe un objet pointu en hauteur, comme la cime d'un arbre (*voir l'ouverture du chapitre, page 119*). Pour éviter de telles décharges sur les édifices en hauteur, on utilise un paratonnerre, composé d'une tige métallique reliée au sol par un conducteur et située au sommet de l'immeuble. La tige du paratonnerre doit être plutôt arrondie pour qu'un effet couronne se produise entre la tige et l'air ambiant, ce qui diminue graduellement la charge et le champ électrique près de l'édifice. S'il y a quand même un arc électrique, alors le conducteur relié à la terre va protéger l'édifice du mouvement important de charges électriques.

Deux conducteurs en contact

À la section 1.3, nous avons vu que lorsque deux conducteurs chargés sont mis en contact ou reliés par un fil conducteur, la charge est transférée d'un conducteur à l'autre. On a maintenant ce qu'il faut pour obtenir la configuration finale. Étant donné que deux conducteurs en contact forment un seul conducteur, ceux-ci auront le même potentiel lorsqu'ils sont en équilibre. Comme le montre la figure 4.32, le premier conducteur a une charge Q_{1i} et un potentiel V_{1i} avant

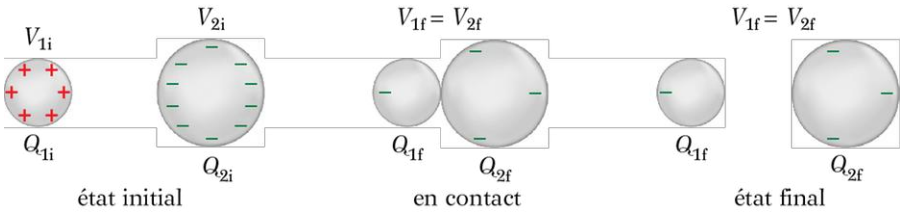


FIGURE 4.32
Lorsque deux conducteurs sont mis en contact, la charge se distribue pour que les conducteurs soient au même potentiel.

le contact, et le deuxième conducteur a une charge Q_{2i} et un potentiel V_{2i} avant le contact. Alors, après le contact,

$$V_{1f} = V_{2f} \ . \tag{4.36}$$

De plus, la charge doit être conservée. Alors,

$$Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} \ . \tag{4.37}$$

Ces deux équations permettent de calculer deux inconnues, par exemple la charge de chaque conducteur après le contact.

EXEMPLE 4.10 Deux nouvelles sphères en contact

Deux sphères conductrices ont des rayons respectifs de 3,00 cm et de 1,80 cm. Elles ont initialement une charge de 40,0 nC chacune. On les met en contact, puis on les éloigne. Quelle est la charge sur chaque sphère après le contact ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 4.33.

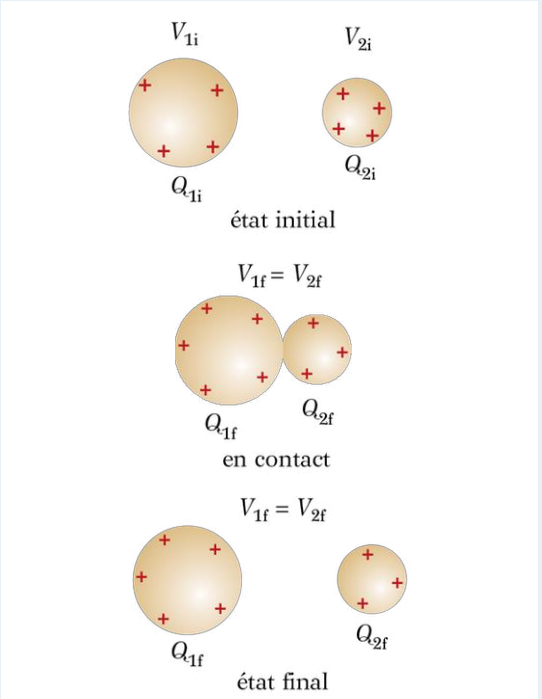


FIGURE 4.33
Le diagramme de la situation pour l'exemple 4.10

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$R_1 = 3{,}00$ cm	$Q_{1i} = 40{,}0$ nC	Q_{1f}
$R_2 = 1{,}80$ cm	$Q_{2i} = 40{,}0$ nC	Q_{2f}

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 4.33 qui permet de calculer le potentiel à la surface d'une sphère :

$$V = \frac{kQ}{R} \quad (\text{pour } r = R) \ . \tag{i}$$

La deuxième **clé** est l'équation 4.36, qui indique que les deux sphères sont au même potentiel après le contact :

$$V_{1f} = V_{2f} \ . \tag{ii}$$

La troisième **clé** est le principe de conservation de la charge, donné par l'équation 4.37 :

$$Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} \ . \tag{iii}$$

Résoudre le problème

Insérons l'équation (i) dans l'équation (ii) :

$$\frac{kQ_{1f}}{R_1} = \frac{kQ_{2f}}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_{1f}}{R_1} = \frac{Q_{2f}}{R_2} \ . \tag{iv}$$

Selon l'équation (iii), nous avons

$$40\ \text{nC} + 40\ \text{nC} = Q_{1f} + Q_{2f} \Rightarrow Q_{2f} = 80\ \text{nC} - Q_{1f}\ . \qquad \text{(v)}$$

Nous insérons l'équation (v) dans l'équation (iv) :

$$\frac{Q_{1f}}{R_1} = \frac{80{,}0\ \text{nC} - Q_{1f}}{R_2}$$

$$R_2 Q_{1f} = R_1\,(80{,}0\ \text{nC}) - R_1 Q_{1f}$$

$$Q_{1f} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) 80{,}0\ \text{nC}$$

$$= \left(\frac{3{,}00\ \text{cm}}{3{,}00\ \text{cm} + 1{,}80\ \text{cm}}\right) 80{,}0\ \text{nC}$$

$$Q_{1f} = 50{,}0\ \text{nC}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Nous obtenons la charge finale de la deuxième sphère en insérant le résultat précédent dans l'équation (v) :

$$Q_{2f} = 80{,}0\ \text{nC} - 50{,}0\ \text{nC} = 30{,}0\ \text{nC}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

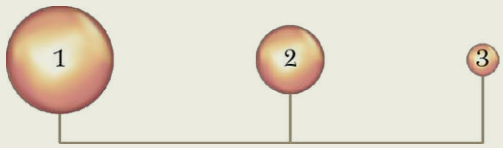
Valider la réponse

La plus grosse sphère a une charge plus grande, comme il se doit. De plus, l'équation (v) est vérifiée.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.5

Trois sphères conductrices sont reliées par un fil conducteur, comme le montre la figure suivante. Classez les sphères par ordre croissant, selon :

a. le potentiel ;
b. la charge ;
c. le module du champ à l'intérieur ;
d. le module du champ tout juste à l'extérieur.



4.9 Les sources de différence de potentiel

Dans les prochains chapitres, nous allons étudier les circuits électriques dans lesquels les charges électriques (habituellement les électrons) se déplacent en fonction de la différence de potentiel présente dans le circuit. Nous avons vu dans ce chapitre que pour produire une différence de potentiel, il faut rapprocher des charges de même signe pour qu'elles soient près l'une de l'autre, afin d'obtenir une énergie potentielle électrique qui peut ensuite être transformée en énergie cinétique ou en d'autres formes d'énergie. Pour déplacer des charges positives vers un potentiel plus élevé ou pour déplacer des charges négatives vers un potentiel plus faible, il faut une force extérieure qui va effectuer un travail. Ce travail va transférer de l'énergie d'une source extérieure au système.

Le générateur de Van de Graaff

Le générateur de Van de Graaff, présenté à la figure 4.34a, est un appareil utilisé dans les démonstrations d'électrostatique. Il a été développé par le physicien américain Robert Van de Graaff (1901-1967) pour produire des hautes tensions et concevoir un accélérateur de particules utilisé en physique nucléaire.

Un schéma du générateur est présenté à la figure 4.34b. Ce dernier est constitué d'une sphère métallique en haut d'un tube isolant. Dans le tube se trouve une grande courroie isolante en mouvement grâce à un moteur. Dans le bas du générateur, une électrode en pointe est soumise à une différence de potentiel élevée. Ceci permet de produire des ions positifs qui sont repoussés sur la courroie. Le mouvement de la courroie déplace les ions positifs vers la sphère conductrice. La charge est transférée de la courroie vers la sphère conductrice, de nouveau par effet couronne, à l'aide d'une deuxième électrode reliée à la sphère. La charge se distribue alors sur la surface extérieure de la sphère. Ainsi, il y a une différence de potentiel entre la sphère positive et le sol neutre.

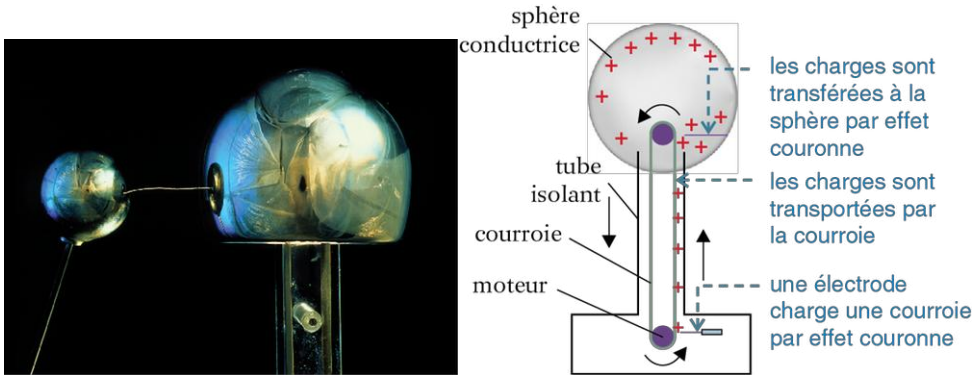


FIGURE 4.34
(a) Un générateur de Van de Graaff. (b) Un schéma simplifié du générateur de Van de Graaff.

Les charges positives situées sur la surface de la sphère produisent un champ électrique vers le bas du tube isolant. La courroie transporte des charges positives de façon mécanique vers d'autres charges positives, à l'opposé du champ électrique. Durant ce déplacement, la force électrique produit un travail négatif. Il faut donc appliquer une force extérieure pour effectuer un travail positif. C'est le rôle du moteur situé à la base du générateur. Ceci montre qu'un appareil produit une différence de potentiel en déplaçant des charges électriques à l'opposé de la force électrique.

Les appareils utilisés en classe peuvent atteindre des différences de potentiel de l'ordre de 100 kV. Le plus gros générateur à l'air libre, construit par Van de Graaff lui-même, se trouve au Boston Museum of Science, et possède deux sphères de 4,5 m en contact (*voir la photo d'ouverture du chapitre 3, à la page 81*). Il peut produire une différence de potentiel de l'ordre de 2,5 MV.

Les piles et les générateurs

La source de potentiel souvent utilisée dans les circuits est la *pile*. Une pile est constituée d'un électrolyte et de deux électrodes (les *bornes*) faites de métaux différents. Les réactions chimiques produisent un déplacement d'ions positifs vers la borne positive et un déplacement d'ions négatifs vers la borne négative, comme le montre la figure 4.35. On peut dire que les réactions chimiques jouent le rôle de la courroie du générateur de Van de Graaff, en déplaçant des charges à l'opposé de la force électrique qu'elles subissent. **Il y a conversion d'énergie chimique en énergie potentielle électrique.**

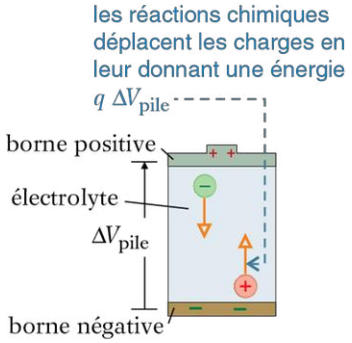


FIGURE 4.35
Le schéma d'une pile

Pour déplacer une charge positive de la borne négative à la borne positive, les réactions chimiques effectuent un travail W_{pile}. Ce travail dépend de la réaction chimique et des substances utilisées comme électrodes et comme électrolyte. On définit la f.é.m. $\mathcal{E}$ (un E stylisé) de la pile comme le travail par unité de charge effectué :

f.é.m.

$$\mathcal{E} \equiv \frac{W_{\text{pile}}}{q} . \tag{4.38}$$

La f.é.m. se mesure en J/C = V. Si une charge q se déplace de la borne négative à la borne positive, la pile effectue un travail $W_{\text{pile}} = q\mathcal{E}$, ce qui se transforme en énergie potentielle électrique $\Delta U = q\ \Delta V_{\text{pile}}$. Pour une pile idéale, toute l'énergie électrique est transformée en énergie potentielle électrique et on a :

$$\begin{aligned} & W_{\text{pile}} = q\mathcal{E} = q\,\Delta V \\ & \Rightarrow \mathcal{E} = \Delta V_{\text{pile}} \qquad \text{(pile idéale)} . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Pour une pile idéale, la f.é.m. correspond à la différence de potentiel à ses bornes. Les piles réelles ne convertissent pas complètement l'énergie chimique en énergie potentielle électrique, et il y a une différence entre $\mathcal{E}$ et ΔV_{pile}. Nous reparlerons des piles réelles au chapitre 7.

REMARQUE

L'abréviation f.é.m. vient du terme « force électromotrice », une expression ancienne qui date de l'époque où on ne comprenait pas vraiment le mouvement des charges électriques. La f.é.m. n'est pas une force, mais bien un travail par unité de charge, et elle est mesurée en volts.

La différence de potentiel produite par une pile est de l'ordre de quelques volts. Pour obtenir une plus grande différence de potentiel, il est possible d'associer plusieurs piles l'une à la suite de l'autre. Lorsque ce groupement de piles est placé dans un boîtier, on obtient une *batterie*.

Il est possible de transformer d'autres types d'énergie en énergie potentielle électrique. Dans une cellule photovoltaïque, c'est l'énergie lumineuse qui est transformée en énergie électrique. Le principe de fonctionnement sera vu dans le tome 3, lorsqu'on étudiera la physique moderne. De même, un générateur transforme l'énergie cinétique en énergie potentielle électrique. Les générateurs sont utilisés, entre autres, dans les centrales électriques et les éoliennes. Nous en reparlerons au chapitre 10.

Une pile, un générateur et une cellule photovoltaïque ne fonctionnent pas de la même façon, mais ils produisent tous une différence de potentiel en déplaçant des charges électriques. Ceci s'effectue en transformant de l'énergie non électrique en énergie électrique. Ces appareils sont appelés les *sources de f.é.m.* Le travail par unité de charge qu'ils produisent est la f.é.m. $\mathcal{E}$. Dans les schémas de circuits électriques, on représente les sources de f.é.m. par le symbole

, où la ligne plus courte indique la borne négative et la ligne la plus longue, la borne positive.

4.10 L'énergie potentielle associée à un dipôle dans un champ électrique

Rappelons qu'un dipôle constitué d'une charge $+q$ et d'une charge $-q$ séparées par le vecteur $\vec{\mathbf{d}}$ (qui va de la charge négative vers la charge positive) est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}}$. À la section 2.8, nous avons vu que lorsqu'un dipôle électrique est dans un champ électrique uniforme, il subit un moment de force qui tend à aligner le moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ dans le même sens que le champ électrique. Selon le résultat obtenu à la section 12.4 du tome 1, l'agent qui exerce le moment de force effectue un travail sur un objet qui effectue un déplacement angulaire.

La figure 4.36 montre un dipôle dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}}$. Le moment de force exercé par le champ fait tourner le dipôle d'un angle initial ϕ_i jusqu'à un angle final ϕ_f. Selon l'équation 2.40 de la page 68, le moment de force exercé par le champ est

$$\tau_z = -pE \sin\phi \, .$$

Le signe négatif est présent, car dans la situation illustrée à la figure 4.36, le moment de force est en sens horaire (pour aligner $\vec{\mathbf{p}}$ sur $\vec{\mathbf{E}}$, donc $\tau_z < 0$).

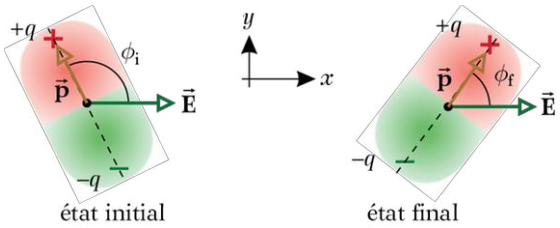


FIGURE 4.36
Entre l'état initial et l'état final, le champ électrique effectue un travail.

Selon l'équation 12.6 du tome 1, le travail effectué est

$$W = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \tau_z \, d\phi = -\int_{\phi_i}^{\phi_f} pE \sin\phi \, d\phi \, .$$

Ici, p et E sont des constantes. Il ne reste qu'à intégrer la fonction sinus à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E :

$$W = -pE \int_{\phi_i}^{\phi_f} \sin\phi \, d\phi = pE \cos\phi \Big|_{\phi_i}^{\phi_f}$$
$$W = pE \cos\phi_f - pE \cos\phi_i \, . \qquad (4.40)$$

On voit que le travail ne dépend pas de la trajectoire, mais seulement de l'angle initial et de l'angle final entre $\vec{\mathbf{p}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$. Ceci permet de définir l'énergie potentielle du système charges sources+dipôle, associée à l'orientation du dipôle.

En utilisant l'équation 4.3 de la page 121, on obtient la variation de l'énergie potentielle du système lorsque l'orientation du dipôle change :

$$\Delta U = -W_c^{i\to f} = -pE\cos\phi_f + pE\cos\phi_i \ . \tag{4.41}$$

Pour simplifier, on choisit $\phi_i = 90°$ comme point de référence, où $U = 0$. En faisant ce choix, la fonction énergie potentielle du système est

Energie potentielle d'un dipôle

$$U = -pE\cos\phi = -\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{E}}\ , \tag{4.42}$$

où ϕ est l'angle entre le moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ et le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$.

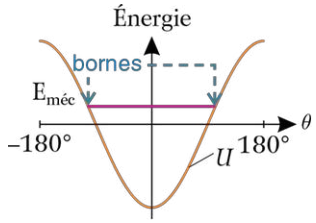


FIGURE 4.37
Le diagramme d'énergie pour un dipôle dans un champ électrique

La figure 4.37 montre le diagramme d'énergie d'un dipôle dans un champ électrique. L'énergie potentielle est minimale à $\phi = 0°$. Cela représente le point d'équilibre stable, avec $\tau_z = 0$. Le point $\theta = 180°$ est un point d'équilibre instable, car $\tau_z = 0$ à cet angle, mais si l'angle est légèrement différent, le dipôle va tourner vers $\theta = 0°$. En traçant la ligne de l'énergie mécanique, on obtient les bornes, c'est-à-dire les angles où le mouvement de rotation du dipôle change de sens.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.6

Un dipôle immobile a un moment dipolaire qui forme un angle $\phi = 178°$ par rapport à un champ électrique uniforme. On le laisse aller. On observe le dipôle dans les situations où l'angle ϕ prend les valeurs suivantes :
(i) $\phi = 90°$, (ii) $\phi = 20°$, (iii) $\phi = -30°$, (iv) $\phi = -120°$.

Classez les situations selon un ordre décroissant :

a. de l'énergie mécanique du système ;
b. de l'énergie potentielle du système ;
c. de l'énergie cinétique de rotation du dipôle.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons vu comment calculer le potentiel électrique pour analyser le mouvement des charges à l'aide de l'énergie.

LES DÉFINITIONS

- Le **potentiel électrique** est produit par les charges électriques.
- La **différence de potentiel** entre deux points est obtenue en déplaçant une charge test q_0 entre les deux points :

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} .$$

Lorsque le champ électrique est connu,

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} .$$

- Lorsqu'une charge q se déplace entre deux points, l'énergie potentielle du système change :

$$\Delta U = q\ \Delta V .$$

- Le **potentiel électrique** au point $\mathcal{P}$ est obtenu en choisissant un point de référence $\mathcal{O}$, où $V = 0$:

$$V = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} .$$

- Le **champ électrique** peut être calculé à partir du potentiel :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} .$$

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Lorsqu'un système constitué de charges électriques est isolé, l'énergie mécanique $E_{\text{méc}} = K + U$ ne change pas :

$$\Delta K + \Delta U = 0$$
$$K_\mathrm{i} + U_\mathrm{i} = K_\mathrm{f} + U_\mathrm{f} .$$

- Lorsque le système est soumis à une force extérieure, l'énergie mécanique du système varie :

$$W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U .$$

- L'énergie potentielle d'une configuration de charges est

$$U = \sum_{i<j}^{N} \frac{k q_i q_j}{r_{ij}} ,$$

où le point de référence (où $U = 0$) est $r \to \infty$.

- L'énergie potentielle d'un système composé d'un dipôle (ayant un moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$) dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est

$$U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = -pE\cos\phi .$$

LES RÉSULTATS

Le **potentiel**, avec $r \to \infty$ comme point de référence.

- Une charge ponctuelle :

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

- Une configuration de N charges ponctuelles :

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} .$$

- Une distribution continue :

$$V = k\int \frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r} .$$

Les **surfaces équipotentielles** permettent de visualiser le potentiel.

- Une surface équipotentielle est une surface dont les points sont tous au même potentiel.
- Le champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et son sens est vers le potentiel plus faible.

LES APPLICATIONS

Les **conducteurs en équilibre électrostatique**

- Tous les points d'un conducteur sont au même potentiel. La surface est une surface équipotentielle.
- Le champ électrique à l'intérieur est nul.
- Le champ électrique à l'extérieur a un plus grand module vis-à-vis des endroits pointus, ceux-ci ayant des petits rayons de courbure.
- Lorsque deux conducteurs sont mis en contact, les charges se distribuent pour que les deux conducteurs soient au même potentiel. La charge est conservée :

$$V_{1\mathrm{f}} = V_{2\mathrm{f}}$$
$$Q_{1\mathrm{i}} + Q_{2\mathrm{i}} = Q_{1\mathrm{f}} + Q_{2\mathrm{f}} .$$

Une **source de f.é.m.** transforme une forme d'énergie en énergie potentielle électrique en effectuant un travail. Le travail par unité de charge est la f.é.m. :

$$\mathcal{E} = \frac{W_{\text{ext}}}{q} .$$

Pour une source de f.é.m. idéale, $\mathcal{E} = \Delta V_{\text{source}}$.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • E exercices simples • P problèmes • solution disponible

Section 4.1 L'énergie potentielle électrique

Q1 Déterminez le signe de la variation de l'énergie potentielle du système dans chacune des situations qui suivent.

a. Un électron se déplace dans un champ électrique de sens opposé à son mouvement.

b. Un proton se déplace dans un champ électrique de sens opposé à son mouvement.

c. Une particule alpha ($q = 2e$) se déplace dans un champ électrique dans le même sens que son mouvement.

d. Un électron se déplace en orbite circulaire autour d'une charge positive fixe.

E2 Quel travail faut-il fournir pour déplacer une charge de 5,0 µC de $x_i = 3{,}0$ m à $x_f = 7{,}0$ m dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (32{,}0\vec{\imath} + 65{,}0\vec{\jmath})$ N/C, si la charge est immobile au début et à la fin ?

E3 Un électron, initialement au repos, est accéléré par un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 4{,}50 \times 10^3$ N/C $\vec{\imath}$. Quel est le déplacement de l'électron pour que celui-ci atteigne un module de vitesse de $4{,}50 \times 10^6$ m/s ?

E4 Un proton est accéléré de $2{,}50 \times 10^5$ m/s à $9{,}22 \times 10^5$ m/s sur une distance de 1,70 m par un champ électrique uniforme et parallèle à sa vitesse.

a. Quelle est la variation d'énergie potentielle du système ?

b. Quel est le module du champ électrique ?

E5 Une particule alpha (la charge est $q = 2e$) se déplace entre deux plaques, de la position $\vec{\mathbf{r}}_i = (15{,}3\vec{\imath} + 9{,}2\vec{\jmath})$ m à la position $\vec{\mathbf{r}}_f = (26{,}7\vec{\imath} + 4{,}5\vec{\jmath})$ m. Le champ électrique uniforme est $\vec{\mathbf{E}} = 260{,}0$ N/C $\vec{\imath}$. Quelle est la variation d'énergie potentielle du système ?

E6 Un électron est projeté horizontalement à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 5{,}0 \times 10^6$ m/s $\vec{\imath}$ vers une cible située 20,0 cm plus loin. On applique un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = -2{,}0 \times 10^3$ N/C $\vec{\imath}$.

a. Déterminez la variation d'énergie potentielle électrique du système au cours du déplacement de l'électron.

b. Quel est le module de la vitesse de l'électron lorsque celui-ci frappe la cible ?

Section 4.2 Le potentiel électrique

Q7 Un proton se déplace entre les points a et b, dans une région où il y a un champ électrique. Le module de sa vitesse change durant le trajet. Déterminez le signe de $V_b - V_a$ dans les situations qui suivent.

a. $v_b = v_a$

b. $v_b > v_a$

c. $v_b < v_a$

Q8 Un électron se déplace entre les points c et d, dans une région où il y a un champ électrique. Indiquez comment le module de la vitesse de l'électron change dans les situations qui suivent.

a. $V_d > V_c$

b. $V_d = V_c$

c. $V_d < V_c$

E9 Un champ électrique uniforme de 600 V/m est orienté selon un angle de 63° au-dessus de la partie positive de l'axe des x. Déterminez la différence de potentiel $\Delta V = V_b - V_a$ entre le point $x_b = -2{,}0$ m et le point $x_a = 2{,}0$ m.

E10 Un électron, initialement immobile, est accéléré par une différence de potentiel de 1 000 V.

a. Quelle est l'énergie cinétique finale de l'électron ? Exprimez votre réponse en eV et en J.

b. Quel est le module de la vitesse finale de l'électron ?

E11 Une particule alpha ($q = 2e$ et $m = 4{,}00$ u) est émise par un noyau de radium avec une énergie cinétique de 4,87 MeV.

a. Quel est le module de la vitesse de la particule alpha ?

b. Quelle est la différence de potentiel nécessaire pour arrêter la particule alpha ?

E12 Une charge $q = -4{,}0$ µC est déplacée de l'infini au point $\mathcal{P}$, où le potentiel est de $-3{,}8 \times 10^5$ V. La charge est immobile au début et à la fin.

a. Quel est le travail extérieur nécessaire pour déplacer la charge ?

b. Que signifie le signe de votre réponse ?

P13 Un électron est lancé à une vitesse de module de $1{,}10 \times 10^7$ m/s à partir du point central entre deux grandes plaques parallèles (*voir la figure 4.38*).

a. Quelle plaque l'électron va-t-il frapper ?

b. Quel est le module de la vitesse de l'électron à l'instant où celui-ci frappe une plaque ?

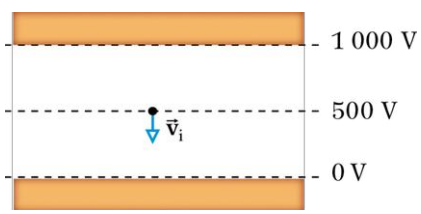


FIGURE 4.38 • Problème 13

P14 Un *compteur de Geiger-Müller* est un détecteur de particules servant à mesurer des rayonnements ionisants comme les rayons X et les rayons gamma. Pour détecter les particules, il est composé d'un long fil métallique (l'anode), de rayon r_a, entouré d'un long cylindre creux métallique coaxial (la cathode), de rayon r_c (*voir la figure 4.39*). Un gaz à faible pression remplit l'espace entre le fil et le cylindre. L'anode a une charge linéique λ, et la cathode a une charge linéique $-\lambda$.

a. À l'aide du théorème de Gauss, déterminez le champ électrique à l'intérieur du compteur de Geiger-Müller.

b. Quelle est la différence de potentiel $V_a - V_c$?

c. Un certain détecteur a une anode de 1,00 mm de rayon et une cathode de 10 mm de rayon. Quelle est la charge linéique sur l'anode si la différence de potentiel entre l'anode et la cathode est de 1 000 V ?

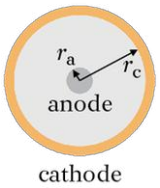


FIGURE 4.39 • Problème 14

P15 Une sphère isolante de rayon R a une charge Q uniformément distribuée dans son volume. On choisit comme point de référence le centre de la sphère. Le champ électrique à l'intérieur de la sphère est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{\mathbf{u}}_r .$$

a. Quel est le potentiel à une distance r du centre ?

b. Quel est le potentiel à la surface de la sphère ?

P16 Une charge ponctuelle $q = 3{,}50\ \mu\text{C}$ se déplace dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = (3{,}00\vec{\imath} - 4{,}00\vec{\jmath} + 2{,}00\vec{k})\ \text{kV/m}$.

a. Déterminez la différence de potentiel $V_b - V_a$ entre les points $\vec{\mathbf{r}}_b = (-1{,}00\vec{\imath} + 2{,}00\vec{\jmath} + 3{,}00\vec{k})\ \text{m}$ et $\vec{\mathbf{r}}_a = (2{,}00\vec{\imath} - 3{,}00\vec{\jmath} + 2{,}00\vec{k})\ \text{m}$.

b. Quelle est la variation d'énergie cinétique de la charge lorsque celle-ci se déplace du point a au point b ?

Section 4.3 Les surfaces équipotentielles

Q17 Quel est le travail extérieur nécessaire pour déplacer une charge q à vitesse constante le long d'une surface équipotentielle dont le potentiel est de 10 V ?

Q18 La figure 4.40 montre les lignes de champ relatives à un champ uniforme.

a. Tracez qualitativement les surfaces équipotentielles.

b. Classez les points illustrés par ordre croissant selon leur potentiel.

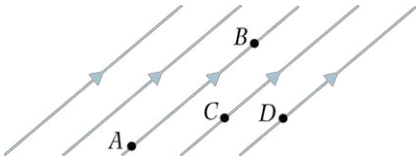


FIGURE 4.40 • Question 18

Section 4.4 Le potentiel de charges ponctuelles

Q19 La figure 4.41 illustre deux charges ponctuelles et cinq points (le point c est à mi-chemin entre les charges) sur l'axe des x. Le point de référence, où $V = 0$, est $r \to \infty$.

a. Quels sont les points pour lesquels le potentiel est nul ?

b. Existe-t-il des points en dehors de l'axe des x où $V = 0$, en excluant l'infini ?

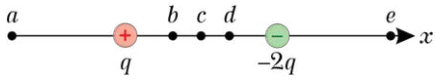


FIGURE 4.41 • Question 19

Q20 Deux particules ponctuelles de $+q$ et de $+2q$ sont séparées par une distance égale à $4d$. Considérez les points a, b et c illustrés à la figure 4.42. Classez, par ordre croissant, les différences de potentiel suivantes :

(i) $V_c - V_b$

(ii) $V_c - V_a$

(iii) $V_a - V_b$

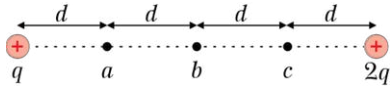


FIGURE 4.42 • Question 20

E21 Une charge ponctuelle $q = -2{,}0\ \mu\text{C}$ se situe à l'origine.

a. Quelle est la différence de potentiel $V_b - V_a$ entre un point b à $x_b = 2{,}0$ cm et un point a à $x_a = 5{,}0$ cm ?

b. Quelle est la différence de potentiel $V_b - V_c$ entre un point b à $x_b = 2{,}0$ cm et un point c à $y_c = 5{,}0$ cm ?

E22 Trois charges ponctuelles sont fixées aux sommets d'un triangle isocèle, comme l'illustre la figure 4.43. Si $V = 0$ à l'infini, calculez le potentiel au point $\mathcal{P}$.

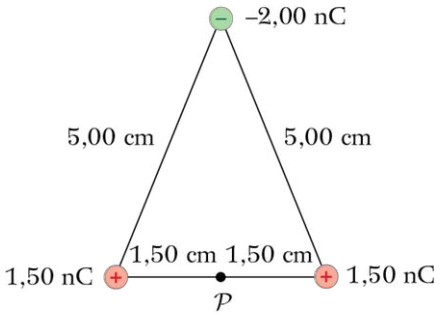


FIGURE 4.43 • Exercice 22

E23 On place quatre charges sur les coins d'un rectangle dont les dimensions sont $\ell = 5{,}0$ cm et $h = 3{,}0$ cm, comme le montre la figure 4.44. On suppose que $V = 0$ à l'infini.

a. Trouvez le potentiel au point a.

b. Trouvez le potentiel au point b.

c. Quel travail est requis pour déplacer une charge de $-5{,}0$ µC du point a au point b, si la charge est immobile au début et à la fin ?

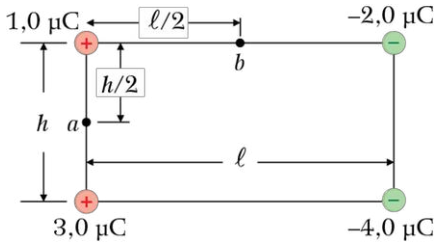


FIGURE 4.44 • Exercice 23

E24 Deux charges $q_1 = -q$ et $q_2 = +3q$ sont situées sur l'axe des y et sont séparées par une distance $d = 6{,}00$ cm (*voir la figure 4.45*). On suppose que $V = 0$ à l'infini.

a. Trouvez les points sur l'axe des y où le potentiel est nul.

b. Trouvez les points sur l'axe des x où le potentiel est nul.

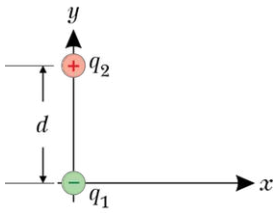


FIGURE 4.45 • Exercice 24

E25 Deux charges ponctuelles q_1 et q_2, situées sur l'axe des x, sont séparées par une distance de 2,00 m, comme le montre la figure 4.46. Si le potentiel est nul à l'infini et à $x = 1{,}60$ m, quelle doit être la relation entre les charges q_1 et q_2 ?

FIGURE 4.46 • Exercice 25

Section 4.5 L'énergie potentielle de charges ponctuelles

Q26 Un électron immobile est placé à l'origine dans les quatre situations illustrées à la figure 4.47. Les autres charges illustrées sont fixes. La force électrique fait déplacer l'électron vers l'infini. Classez les situations par ordre croissant selon l'énergie cinétique de l'électron lorsque celui-ci se trouve très loin des autres charges.

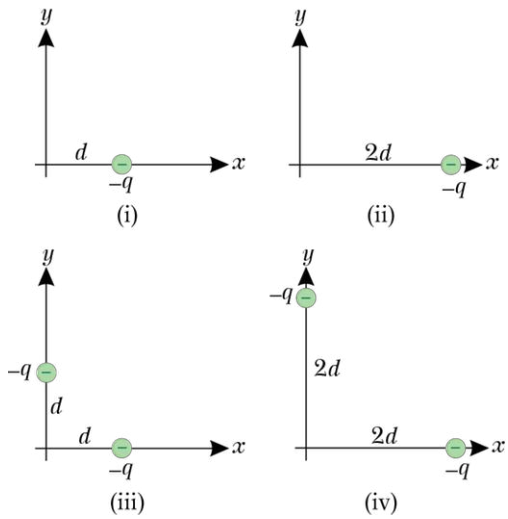


FIGURE 4.47 • Question 26

E27 Un système est constitué de deux charges ponctuelles fixes : $q_1 = 3{,}00$ µC, située à $\vec{\mathbf{r}}_1 = 4{,}00\vec{\boldsymbol{\imath}}$ cm, et $q_2 = 2{,}00$ µC, située à $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-3{,}00\vec{\boldsymbol{\imath}} + 2{,}00\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 1{,}00\vec{\boldsymbol{k}})$ cm. Quel est le travail extérieur nécessaire pour déplacer vers l'origine une charge $q_3 = -1{,}00$ µC provenant de l'infini si la charge est immobile au départ et à la fin ?

E28 Quel travail faut-il fournir pour amener de l'infini trois charges $+q$, $-q$ et $-q$ respectivement, et les placer sur les coins d'un triangle équilatéral de côté L, comme le montre la figure 4.48 ?

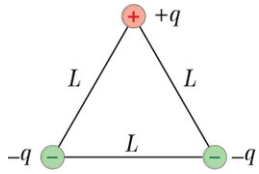


FIGURE 4.48 • Exercice 28

E29 Un cube ayant des arêtes de longueur L possède une charge q à chacun de ses coins (*voir la figure 4.49*). Quelle est l'énergie potentielle du système ?

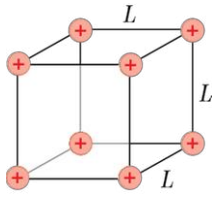


FIGURE 4.49 • Exercice 29

P30 Deux protons sont séparés par une distance de 6,00 fm. On lance une particule alpha à partir de l'infini ; celle-ci s'immobilise à mi-chemin entre les deux protons. Quel était le module de la vitesse initiale de la particule alpha ? (La particule alpha a une charge de $2e$ et une masse de 4,00 u.)

P31 On maintient fixe une particule de 35,00 µC à l'origine. On place une seconde particule de 63,00 µC à $x_i = 7{,}20$ cm et on la laisse aller. Les deux particules ont une masse de 20,0 g. Quel est le module de la vitesse de la particule lorsque sa position est à $x_f = 19{,}60$ cm ?

P32 Une particule de charge Q est fixe. Une seconde particule de masse m et de charge $-q$ se déplace à vitesse constante autour de la charge Q, sur une trajectoire circulaire de rayon r_1. Quel travail doit fournir un agent extérieur sur la seconde particule pour augmenter à r_2 le rayon de sa trajectoire ? (Attention, la particule n'a pas la même vitesse sur chacune des deux orbites.)

P33 Selon le *modèle de Bohr*, un atome d'hydrogène est constitué d'un proton fixe et d'un électron qui orbite autour du proton sur des orbites circulaires. L'orbite la plus rapprochée a un rayon de 52,9 pm. Exprimez toutes vos réponses en eV.

a. Quelle est l'énergie potentielle du système ?

b. Quelle est l'énergie cinétique de l'électron autour du proton ?

c. Quel est le travail extérieur nécessaire pour ioniser l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire pour que l'électron se retrouve à l'infini avec une vitesse nulle ?

P34 Deux petites sphères de métal ont un diamètre de 0,50 cm, une masse de 0,500 g et une charge de 1,00 µC. Une des sphères est déposée sur un support isolant. L'autre sphère est lancée vers la première. Déterminez le module minimal de la vitesse que doit avoir la sphère en mouvement pour qu'il y ait un contact entre les deux sphères. (Vous pouvez considérer que les sphères sont initialement assez éloignées l'une de l'autre pour ne pas interagir entre elles, et vous pouvez négliger la force gravitationnelle.)

P35 On lance un proton à une vitesse de $2{,}50 \times 10^5$ m/s sur un noyau de plomb, qui est constitué de 82 protons et 126 neutrons. Le proton est initialement très éloigné du noyau de plomb, et ce dernier demeure approximativement immobile. À quelle distance du noyau de plomb le proton s'arrête-t-il ?

P36 Une particule alpha ($q = 2e$ et $m = 4{,}00$ u) et un proton sont séparés par une distance de 20,0 fm, et ils sont immobiles. Quel est le module de la vitesse de chaque particule lorsqu'elles se trouvent très éloignées l'une de l'autre ?

Section 4.6 Le potentiel d'une distribution continue

Q37 Une tige de longueur L a une charge Q uniformément distribuée. Pour $V = 0$ à l'infini, on veut calculer le potentiel électrique au point $\mathcal{P}$, situé à une distance d à droite de l'origine (*voir la figure 4.50*).

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge de la tige.

b. Quelle est la distance r entre l'élément dq illustré et le point $\mathcal{P}$?

c. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer V, sans la résoudre.

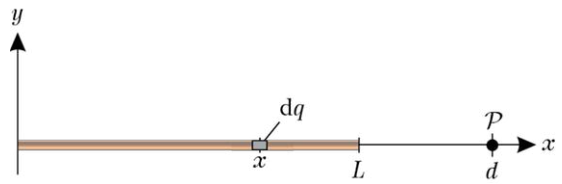


FIGURE 4.50 • Question 37

Q38 Une tige de longueur L a une charge linéique λ uniforme. Pour $V = 0$ à l'infini, on veut calculer le potentiel électrique au point $\mathcal{P}$, situé à une distance y au-dessus de l'extrémité de la tige (*voir la figure 4.51*).

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge linéique de la tige.

b. Quelle est la distance r entre l'élément dq illustré et le point $\mathcal{P}$?

c. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer V, sans la résoudre.

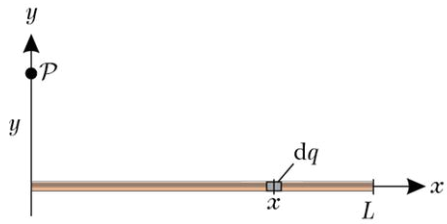


FIGURE 4.51 • Question 38

E39 On courbe une tige en forme de demi-cercle de rayon R, comme le montre la figure 4.52 (*voir la page suivante*). La charge linéique λ est uniforme. Pour $V = 0$ à l'infini, on veut calculer le potentiel électrique au point $\mathcal{P}$, situé à l'origine.

a. Écrivez une expression pour l'élément dq en fonction de la charge linéique et du rayon du demi-cercle.

b. Écrivez l'intégrale nécessaire pour calculer V, sans la résoudre.

c. Calculez l'intégrale pour trouver V au point $\mathcal{P}$.

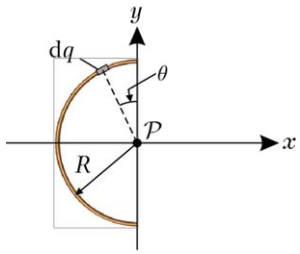


FIGURE 4.52 • Exercice 39

P40 Un fil uniformément chargé a une longueur de 6,00 m et une charge linéique de 230 µC/m (*voir la figure 4.53*). On suppose que $V = 0$ à l'infini.

a. Calculez le potentiel au point $\mathcal{P}_1$ si $d = 7{,}00$ m.

b. Calculez le potentiel au point $\mathcal{P}_2$ si $R = 4{,}00$ m.

c. Quelle est la différence de potentiel $V_2 - V_1$, entre les points $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1$?

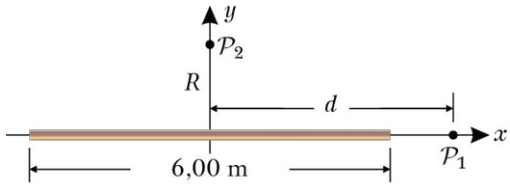


FIGURE 4.53 • Problème 40

P41 Une tige de 3,00 m a une charge linéique uniforme de 150 µC/m. Une sphère ayant une charge $q = -2{,}50$ µC et une masse de 80,0 g est située au point $\mathcal{P}_1$, à une distance de 0,500 m de l'extrémité de la tige (*voir la figure 4.54*). Quel est le module de la vitesse nécessaire pour que la sphère se rende jusqu'au point $\mathcal{P}_2$, situé à une distance de 4,00 m de l'extrémité de la tige ?

FIGURE 4.54 • Problème 41

P42 Deux tiges parallèles de longueur $L = 6{,}00$ m et de charge linéique $\lambda = 150$ µC/m sont séparées par une distance $d = 2{,}00$ m, comme le montre la figure 4.55. Les points $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont à mi-chemin entre les deux tiges. On suppose que $V = 0$ à l'infini.

a. Quel est le potentiel au point $\mathcal{P}_1$, situé vis-à-vis du centre de chaque tige ?

b. Quel est le potentiel au point $\mathcal{P}_2$, situé vis-à-vis de l'extrémité de chaque tige ?

c. Quelle est la différence de potentiel $V_2 - V_1$ entre les points $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1$?

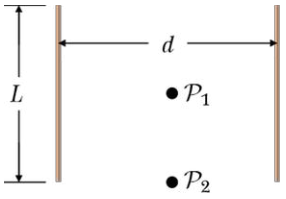


FIGURE 4.55 • Problème 42

P43 Un anneau de rayon $R = 2{,}50$ m possède une charge $Q = 300$ µC, et il est placé dans le plan des xy à $z = 0{,}00$ m. Un disque de même rayon est placé parallèlement à l'anneau, à une hauteur $z = 4{,}20$ m au-dessus de l'anneau. Quelle est la charge surfacique du disque pour que le potentiel à mi-chemin entre les deux objets soit nul, en supposant $V = 0$ à l'infini ?

P44 Un précipitateur électrostatique est un appareil servant à filtrer la poussière ou la fumée à l'aide de la force électrostatique. Il est constitué d'un fil central de 0,125 cm de rayon entouré d'un long cylindre métallique de 0,155 m de rayon. Pour ioniser les molécules polluantes, on doit fournir une différence de potentiel qui permet d'avoir un champ électrique d'au moins $3{,}00 \times 10^6$ V/m sur la surface du fil central. Ce champ électrique est nécessaire pour faire perdre un électron aux molécules polluantes (par effet couronne). Ayant perdu cet électron, la molécule se dirige vers le cylindre, qui est négatif. Quelle est la différence de potentiel nécessaire pour faire fonctionner ce précipitateur électrostatique ?

Section 4.7 Le calcul du champ électrique à partir du potentiel

Q45 La figure 4.56 montre trois régions avec des coupes transversales de surfaces équipotentielles.

a. Classez les situations par ordre croissant selon le module du champ électrique.

b. Donnez le sens du champ électrique pour chacune des situations.

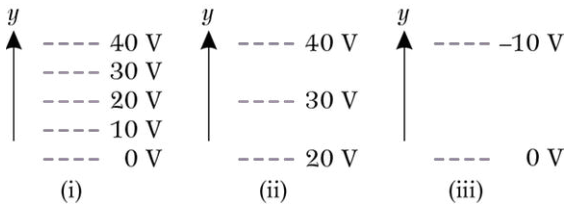


FIGURE 4.56 • Question 45

Q46 La figure 4.57 montre le graphique du potentiel en fonction de x.

a. Dans quelles régions le champ électrique est-il nul ?

b. Classez les régions par ordre croissant de la composante x du champ électrique (de la plus négative à la plus positive).

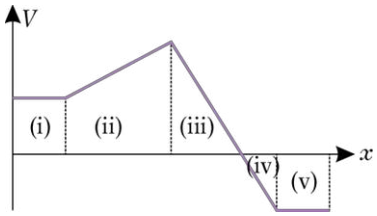


FIGURE 4.57 • Question 46

E47 Le potentiel électrique dans une région donnée, en fonction de la position x, est illustré à la figure 4.58. Tracez le graphique de la composante x du champ électrique en fonction de x.

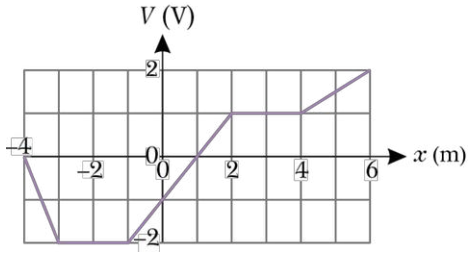


FIGURE 4.58 • Exercice 47

P48 Une charge ponctuelle $q = 25{,}0\ \mu C$ se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}} = (-1{,}20\vec{\imath} - 2{,}50\vec{\jmath} + 1{,}80\vec{k})$ m dans une région où le potentiel est $V = (35{,}0x^2 - 24{,}0yz) \times 10^3$, et où les coordonnées sont exprimées en mètres et le potentiel, en volts.

a. Donnez l'expression algébrique du champ électrique.

b. Quel est le champ électrique à la position de la charge ?

c. Quel est le module de la force exercée sur la charge ?

P49 Un disque de rayon R a une charge surfacique σ uniforme. Selon l'équation 4.26, le potentiel à une distance z au-dessus du disque, le long de son axe, est

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right).$$

Montrez que le champ électrique, pour un point situé au-dessus du disque le long de son axe, est donné par l'expression :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{k}.$$

P50 Un dipôle électrique a un moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ orienté vers l'axe des y, et il est centré sur l'origine. Le potentiel est

$$V = \frac{kpy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}.$$

Trouvez l'expression du champ électrique.

Section 4.8 Le potentiel des conducteurs en équilibre électrostatique

Q51 Une sphère conductrice de rayon R_1 se trouve au centre d'une épaisse coquille conductrice, de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3. Lequel des graphiques de la figure 4.59 représente correctement le potentiel en fonction de la distance r au centre de la sphère ?

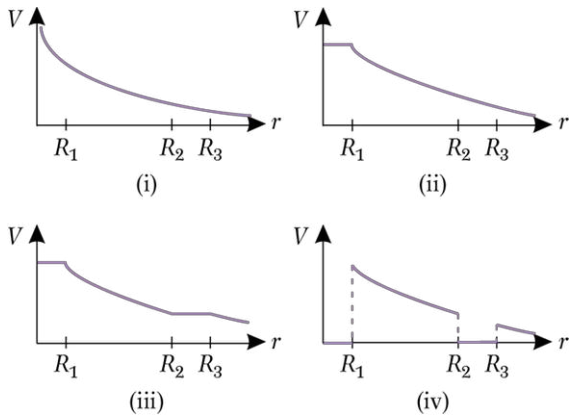


FIGURE 4.59 • Question 51

Q52 On insère un disque conducteur dans un champ électrique uniforme. Comment se comportent les éléments qui suivent ?

a. Les lignes de champ :

(i) s'approchent du conducteur ;

(ii) s'éloignent du conducteur ;

(iii) ne sont pas affectées.

b. Les surfaces équipotentielles :

(i) s'approchent du conducteur ;

(ii) s'éloignent du conducteur ;

(iii) ne sont pas affectées.

E53 Une sphère conductrice de 30,0 cm de rayon a un potentiel de –300 V par rapport au point à l'infini. Calculez la charge à la surface de la sphère.

E54 Une sphère conductrice de rayon R a une charge q. On choisit $V = 0$ à l'infini.

a. Montrez que le potentiel d'un point $\mathcal{P}_1$, situé à l'extérieur de la sphère à une distance r du centre, est donné par

$$V = \frac{kq}{r}.$$

b. Montrez que le potentiel d'un point $\mathcal{P}_2$, situé à l'intérieur de la sphère à une distance r du centre, est donné par

$$V = \frac{kq}{R}.$$

P55 Une sphère conductrice a un rayon $R_1 = 15{,}0$ cm et une charge de $-25{,}0$ µC. À l'aide d'un long conducteur, on la relie à une deuxième sphère conductrice, initialement neutre, ayant un rayon $R_2 = 8{,}00$ cm. Quelle est la charge sur chaque sphère lorsque l'équilibre électrostatique est atteint ?

P56 Deux sphères conductrices très éloignées l'une de l'autre ont des charges respectives $Q_1 = 12{,}0$ µC et $Q_2 = -18{,}0$ µC. La première sphère a un rayon $R_1 = 5{,}00$ cm et la seconde, un rayon $R_2 = 9{,}00$ cm. On les relie à l'aide d'un long conducteur.

a. Quelle est la charge sur chaque sphère lorsque l'équilibre est atteint ?

b. En choisissant $V = 0$ à l'infini, quel est le potentiel au centre de chaque sphère ?

c. Combien d'électrons ont été échangés entre les deux sphères ?

P57 Une sphère conductrice creuse est neutre. Son rayon intérieur est de 33,0 cm et son rayon extérieur est de 67,0 cm. On place au centre de la sphère creuse une charge ponctuelle $Q = 290$ µC. On choisit $V = 0$ à l'infini.

a. Déterminez le potentiel pour $r = 1{,}0$ m.

b. Déterminez le potentiel pour $r = 50$ cm.

c. Déterminez le potentiel pour $r = 20$ cm.

Section 4.9 Les sources de différence de potentiel

E58 Un générateur de Van de Graaff produit une différence de potentiel de 50,0 kV entre la sphère conductrice et le pied du générateur. Quel doit être le travail effectué par le moteur pour ajouter une charge de 10,0 µC sur la sphère conductrice ?

E59 Une pile idéale de 1,50 V est branchée à une diode électroluminescente de 0,10 W.

a. Quel est le travail effectué par la pile en 1,00 min ?

b. Si la pile fonctionne pendant 20,0 h avant d'être à plat, déterminez la charge qui a circulé à l'intérieur de la pile.

E60 Une batterie idéale de 9,0 V est branchée à un moteur qui déplace un bloc de 1,5 kg sur une table horizontale sans frottement. Le bloc, initialement immobile, accélère jusqu'à un module de vitesse de 4,5 m/s. Le moteur utilise 60 % de l'énergie électrique pour déplacer le bloc.

a. Quel est le travail effectué par le moteur ?

b. Quelle est la charge qui circule dans la pile ?

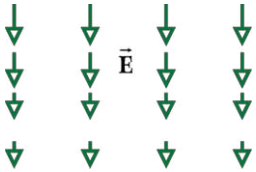
Section 4.10 L'énergie potentielle associée à un dipôle dans un champ électrique

Q61 Une molécule dipolaire, située à l'origine est placée dans un champ électrique dont le sens est opposé à l'axe des y. Pour quelle orientation du moment dipolaire l'énergie potentielle du système est-elle négative ? Donnez l'angle θ du dipôle par rapport à l'axe des x.

E62 Une molécule d'eau a un moment dipolaire de $6{,}17 \times 10^{-30}$ C · m. Quelle est l'énergie potentielle maximale du système si elle se trouve dans un champ électrique de $3{,}42 \times 10^6$ N/C $\vec{\imath}$?

P63 Un dipôle, formé d'une charge positive de 5,00 µC en $\vec{r}_+ = (3{,}40\vec{\imath} + 7{,}20\vec{\jmath})$ cm et d'une charge négative de $-5{,}00$ µC en $\vec{r}_- = (5{,}30\vec{\imath} - 1{,}20\vec{\jmath})$ cm, est situé dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 360$ N/C $\vec{\jmath}$. Quelle est l'énergie potentielle du système ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

4.1	**a.** $\Delta U < 0$	La charge positive se déplace dans le même sens que le champ électrique.
	b. $\Delta U = 0$	La charge se déplace perpendiculairement au champ électrique.
	c. $\Delta U > 0$	La charge positive se déplace dans le sens opposé au champ électrique.
4.2	**a.** Vers le point c	L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique : $\Delta U = q\,\Delta V$ est négatif, donc le potentiel doit diminuer lorsque $q > 0$. La charge positive se déplace « naturellement » vers les potentiels plus faibles.
	b. Vers le point a	L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique : $\Delta U = q\,\Delta V$ est négatif, donc le potentiel doit augmenter pour $q < 0$. La charge négative se déplace « naturellement » vers les potentiels plus élevés.
4.3	(iv) < (iii) < (i) = (ii)	Le potentiel diminue en s'éloignant de la charge positive, alors $V_c > V_a$ et $V_a = V_b$, car ces points sont sur la même surface équipotentielle.
4.4		Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, donc il est vertical. Il va des surfaces équipotentielles plus élevées vers les plus faibles, donc vers le bas. La distance entre les surfaces équipotentielles diminue vers le haut, donc le module du champ est plus grand vers le haut.
4.5	**a.** $V_1 = V_2 = V_3$	Les sphères reliées par le fil conducteur forment un grand conducteur. Le potentiel est le même pour tous les points d'un conducteur en équilibre électrostatique.
	b. $Q_3 < Q_2 < Q_1$	La charge sur une sphère conductrice est proportionnelle à son rayon.
	c. $E_1 = E_2 = E_3$	Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique.
	d. $E_1 < E_2 < E_3$	Le module du champ tout juste à l'extérieur est plus important pour une sphère dont le rayon est plus petit.
4.6	**a.** Toutes égales	L'énergie mécanique est conservée, car il n'y a pas de force extérieure sur le système, et la force électrique est conservative.
	b. (iv) > (i) > (iii) > (ii)	L'énergie potentielle du système est $U = -pE\cos\theta$.
	c. (ii) > (iii) > (i) > (iv)	C'est l'ordre inverse de celui qu'on a obtenu en **b.**, car $K = E_{méc} - U$, avec $E_{méc}$ qui ne change pas.

Chapitre 05

Les condensateurs

Buts du chapitre

Ce chapitre traite d'un premier élément utilisé dans les circuits électriques : le condensateur. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de définir et de calculer la capacité d'un condensateur ;
- de calculer l'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur ;
- d'analyser des circuits qui comprennent plusieurs condensateurs.

Préalables

Ce chapitre porte sur l'utilisation des concepts d'énergie potentielle électrique et de potentiel électrique. Revoyez :

- le potentiel électrique, expliqué à la section 4.2 ;
- le potentiel des conducteurs, étudié à la section 4.8 ;
- les sources de différence de potentiel, présentées à la section 4.9 ;
- les propriétés des diélectriques, examinées à la section 3.6.

Le flash de l'appareil photo utilise l'énergie emmagasinée dans un condensateur.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié l'énergie électrique et avons vu qu'un travail est nécessaire pour séparer les charges positives des charges négatives. Ce travail transforme une énergie extérieure en énergie électrique. Dans ce chapitre, nous étudions un dispositif qui permet d'emmagasiner des charges et donc de l'énergie électrique : le condensateur.

Les condensateurs sont des éléments essentiels de plusieurs circuits électriques. Pour fonctionner, le flash d'un appareil photo a besoin d'une quantité d'énergie très rapidement, ce que ne peut pas donner directement une pile. La pile de l'appareil sert plutôt à charger un condensateur, ce qui prend environ une seconde. Ensuite, cette énergie peut être envoyée rapidement vers le flash. De la même façon, un défibrillateur cardiaque a besoin d'une grande quantité d'énergie rapidement pour produire un choc électrique au cœur qui bat de façon irrégulière. Un condensateur permet d'emmagasiner l'énergie nécessaire. On trouve des condensateurs entre autres dans les récepteurs radios, la mémoire des ordinateurs et les adaptateurs de tension utilisés dans plusieurs appareils électroniques.

Nous commençons dans ce chapitre l'étude des circuits électriques. Pour l'instant, nous nous limitons encore à l'électrostatique, c'est-à-dire que les situations étudiées seront des configurations où les charges sont en équilibre électrostatique. Nous étudierons les situations avec des charges en mouvement dans les prochains chapitres.

5.1 La capacité d'un condensateur

FIGURE 5.1
Différents condensateurs utilisés dans les circuits électriques

Les condensateurs prennent différentes formes, comme le montre la figure 5.1. Ils sont conçus pour emmagasiner des charges. Ils sont composés de deux conducteurs, appelés les *armatures*, séparés par un diélectrique, c'est-à-dire un isolant (le vide ou l'air peut servir d'isolant). Pour charger un condensateur, on place une charge $+Q$ sur une armature et une charge $-Q$ sur l'autre armature, comme le montre la figure 5.2. Les charges produisent un champ électrique, avec des lignes de champ qui vont de l'armature positive vers l'armature négative. Puisque chaque armature est un conducteur, le potentiel est constant sur chacune des armatures. On peut donc dire qu'il y a une différence de potentiel $\Delta V_C = V_+ - V_-$ entre les armatures, ce qui est la conséquence du champ électrique.

On définit la *capacité* C du condensateur de la façon suivante :

Capacité

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V_C} . \tag{5.1}$$

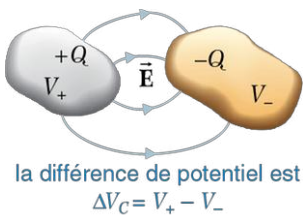


FIGURE 5.2
Dans un condensateur, les armatures ont respectivement des charges $+Q$ et $-Q$.

Dans le système international, la capacité se mesure en farads (F), en l'honneur du physicien anglais Michael Faraday. Selon la définition de la capacité, on obtient

$$1\,\text{F} \equiv \frac{1\,\text{C}}{1\,\text{V}} = 1\,\text{C/V} . \tag{5.2}$$

Donc, un condensateur de 1 F aura une charge de 1 C pour une différence de potentiel de 1 V. Ceci correspond à une très grande capacité. Dans les circuits, on rencontre des condensateurs dont la capacité est de l'ordre du picofarad ($1\ \text{pF} = 1 \times 10^{-12}\ \text{F}$), jusqu'à une capacité de l'ordre du microfarad ($1\ \mu\text{F} = 1 \times 10^{-6}\ \text{F}$).

Si on double la charge sur chaque armature, le module du champ électrique va doubler, selon le principe de superposition. Ceci implique que la différence de potentiel sera aussi doublée. Par contre, le rapport entre la charge et la différence de potentiel, c'est-à-dire la capacité du condensateur, ne changera pas.

La capacité du condensateur est une propriété de celui-ci. Elle dépend de la géométrie du condensateur (la forme des armatures, la distance entre celles-ci) et du diélectrique utilisé.

REMARQUE

La charge nette d'un condensateur est nulle, car il y a une charge $+Q$ sur une armature et une charge $-Q$ sur l'autre armature. Lorsqu'on indique que la charge d'un condensateur est Q, on donne la charge sur l'armature positive et non la charge nette du condensateur. De même, la différence de potentiel ΔV_C représente une quantité positive, car c'est la différence de potentiel $V_+ - V_-$.

Pour charger un condensateur, on peut brancher chaque armature aux bornes d'une pile en utilisant des fils conducteurs. La figure 5.3 montre un condensateur, composé de deux plaques parallèles, branché à une pile, à deux instants : d'abord à $t = 0$ où il n'y a pas de charge sur les armatures, puis après un temps assez long. La pile est une source de f.é.m., c'est-à-dire qu'elle produit, entre ses bornes, une différence de potentiel $\Delta V_{\text{pile}} = \mathcal{E}$, égale à la f.é.m. Ceci produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ dans les fils conducteurs. Des électrons de l'armature supérieure vont quitter l'armature du haut, à l'opposé du champ électrique. De même, des électrons du fil conducteur vont se déplacer vers l'armature du bas. Ceci produit un mouvement de charges, qu'on appelle un *courant électrique*.

La charge de l'armature supérieure devient de plus en plus positive, alors que la charge de l'armature inférieure devient de plus en plus négative, ce qui diminue le champ électrique résultant. Après un certain temps, le condensateur est complètement chargé, et il n'y a plus de courant électrique. La différence de potentiel aux bornes du condensateur ΔV_C est

$$\Delta V_C = V_+ - V_- = \Delta V_{\text{pile}} .$$

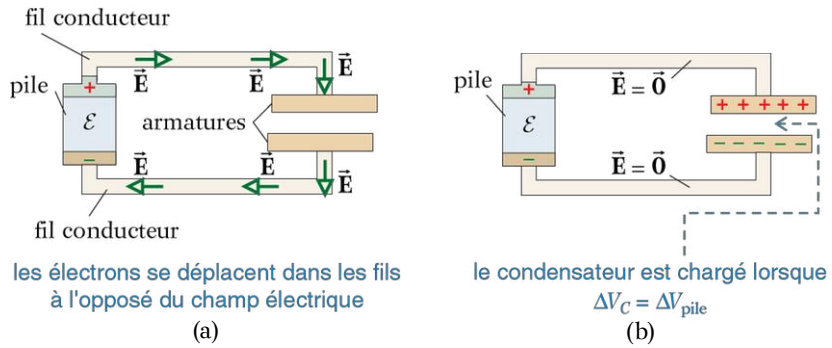


FIGURE 5.3

(a) Un condensateur sans charge est branché à une pile. (b) Lorsque le condensateur est complètement chargé, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ dans les fils conducteurs.

Dans ce cas, la plaque positive a le même potentiel que la borne positive de la pile, alors que la plaque négative a le même potentiel que la borne négative. Il n'y a plus de différence de potentiel dans les fils, et le champ électrique dans les fils est nul. Ainsi, il n'y a plus de courant électrique, car les charges ne sont plus en mouvement.

Selon la définition de la capacité, indiquée à l'équation 5.1, la charge du condensateur est

$$Q = C\,\Delta V_C \ . \tag{5.3}$$

Si on débranche le condensateur de la pile, ce dernier reste chargé. Nous verrons à la section 5.3 qu'un condensateur chargé a de l'énergie potentielle qui pourra être transformée en une autre forme en branchant le condensateur à un appareil.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.1

Deux condensateurs identiques sont branchés à des piles. Le premier condensateur est branché à une pile de 3 V et le second, à une pile de 1,5 V. Lorsque les condensateurs sont complètement chargés, déterminez les rapports qui suivent.

a. $\Delta V_1/\Delta V_2$
b. Q_1/Q_2
c. C_1/C_2

5.2 Le calcul de la capacité

On peut calculer la capacité d'un condensateur dans certains cas où le champ électrique est simple à calculer, grâce au théorème de Gauss et à la symétrie. Les étapes à suivre sont les suivantes :

- On suppose qu'une des armatures a une charge $+Q$ et l'autre, une charge $-Q$.
- On trace les lignes de champ électrique, et on calcule le champ entre les deux conducteurs.
- On calcule la différence de potentiel :

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \ . \tag{5.4}$$

  Il est important que la borne inférieure de l'intégrale corresponde à l'armature négative et que la borne supérieure de l'intégrale corresponde à l'armature positive pour que ΔV soit positif.
- La capacité du condensateur est $C = Q/\Delta V$.

Défi animé 5.1
Soit un condensateur chargé, non relié à une pile. Qu'arrive-t-il à la différence de potentiel entre les plaques du condensateur quand on change ses paramètres géométriques ?

On suppose d'abord que les deux armatures sont séparées par du vide pour calculer la capacité C_{vide}. On verra ensuite la modification à la capacité lorsqu'un diélectrique sépare les deux armatures, ce qui correspond aux condensateurs réels utilisés dans les circuits.

Le condensateur plan

Supposons deux grandes plaques parallèles, dont l'aire est A, séparées par une petite distance d. On place une charge $+Q$ sur l'armature supérieure et une charge $-Q$ sur l'armature inférieure. La figure 5.4 illustre le champ électrique, qui est uniforme entre les plaques, et un axe des y dont l'origine est placée vis-à-vis de l'armature négative. Nous avons calculé le champ de cette configuration au chapitre 3. Avec le choix de système de coordonnées, l'équation 3.13 donne, pour le champ électrique entre les plaques,

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\jmath} = -\frac{Q}{\epsilon_0 A}\vec{\jmath}\ . \tag{5.5}$$

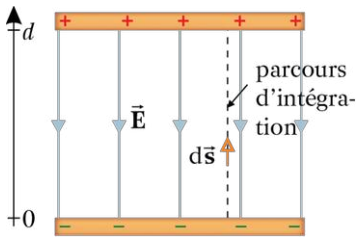


FIGURE 5.4
Le calcul de la capacité pour un condensateur plan

On choisit un parcours d'intégration vertical, qui va de l'armature négative à l'armature positive, comme le montre la figure 5.4, avec $d\vec{\mathbf{s}} = dy\,\vec{\jmath}$. La différence de potentiel est alors

$$\Delta V = -\int_{-}^{+} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{\epsilon_0 A}\vec{\jmath}\right)\cdot\vec{\jmath}\,dy$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 A}\int_0^d dy = \frac{Q}{\epsilon_0 A}y\Big|_0^d$$

$$\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} = Ed\ . \tag{5.6}$$

La capacité d'un condensateur plan est donc

$$C_{\text{vide}} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/(\epsilon_0 A)}$$

$$C_{\text{vide}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}\ . \tag{5.7}$$

Capacité d'un condensateur plan

La capacité dépend bien des propriétés géométriques (l'aire et la distance entre les armatures) et non de la charge ou de la différence de potentiel appliquée. On voit aussi que la capacité du condensateur augmente si on utilise des armatures ayant une plus grande aire ou des armatures plus rapprochées. De plus, l'équation 5.7 montre qu'on peut exprimer la constante électrique en F/m :

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \text{F/m}\ .$$

Un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est composé d'un cylindre conducteur, de rayon a et de longueur L, entouré d'un cylindre creux conducteur, de rayon b et de longueur L. Les deux cylindres partagent le même axe. Cette configuration est aussi appelée un *câble coaxial*.

On place une charge $+Q$ sur le cylindre creux extérieur et une charge $-Q$ sur le cylindre intérieur. Les charges se répartissent de façon uniforme sur les surfaces des conducteurs. Selon le chapitre 3, le champ doit être radial (du cylindre positif vers le cylindre négatif, donc selon l'orientation $-\vec{\mathbf{u}}_r$), et son module ne peut dépendre que de la distance r par rapport à l'axe des cylindres. La figure 5.5 (*voir la page suivante*) illustre la surface de Gauss utilisée : un cylindre de rayon r (avec $a < r < b$) et de longueur ℓ.

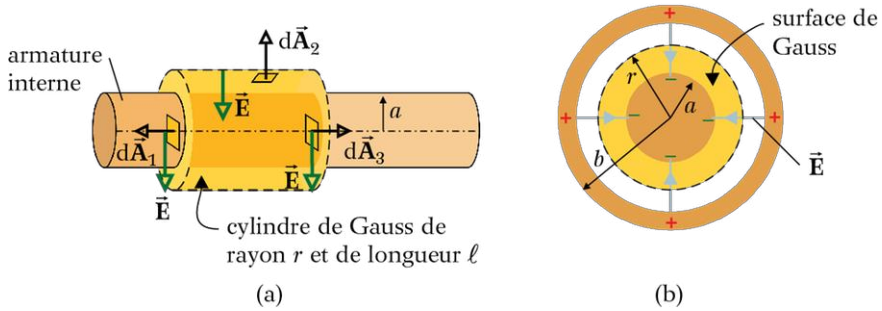


FIGURE 5.5
(a) L'armature interne et la surface de Gauss (l'armature externe n'est pas illustrée). (b) Une coupe transversale du condensateur et de la surface de Gauss.

On calcule le module du champ à l'aide du théorème de Gauss. Le flux à travers les deux bouts de la surface de Gauss est nul, car $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}$ sont perpendiculaires (*voir la figure 5.5a*). Il ne reste que le flux à travers le côté du cylindre :

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2 = \int E\, dA_2 \cos(180°) = -E \int dA_2 = -E 2\pi r\ell \,.$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \lambda\ell$, où $\lambda = -Q/L$ est la charge linéique du cylindre intérieur. On obtient alors le module du champ électrique à l'aide du théorème de Gauss :

$$-E 2\pi r\ell = \frac{-Q\ell}{\epsilon_0 L} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \,.$$

Le champ électrique est orienté vers le cylindre intérieur, ce qui donne le champ suivant :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\vec{\mathbf{u}}_r \,. \tag{5.8}$$

La prochaine étape consiste à calculer la différence de potentiel entre les deux cylindres :

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,.$$

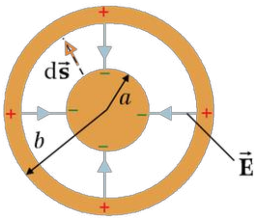


FIGURE 5.6
Le parcours d'intégration pour calculer ΔV

Le parcours d'intégration le plus simple est un parcours radial, comme il est illustré à la figure 5.6 : $d\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{u}}_r\, dr$. On obtient alors

$$\Delta V = -\int_a^b \left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\vec{\mathbf{u}}_r\right) \cdot \vec{\mathbf{u}}_r\, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} \,.$$

L'intégrale se calcule facilement à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E :

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}(\ln r)\Big|_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{5.9}$$

où on a utilisé l'identité $\ln b - \ln a = \ln(b/a)$.

Il ne reste qu'à calculer le rapport entre la charge Q et la différence de potentiel ΔV pour obtenir la capacité du condensateur cylindrique :

$$C_{\text{vide}} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \,. \tag{5.10}$$

De nouveau, la capacité dépend uniquement des propriétés géométriques (la longueur et le rayon des armatures).

Le condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est composé d'une sphère creuse conductrice de rayon b et d'une sphère conductrice de rayon a au centre de la sphère creuse. On calcule la capacité de la même façon que dans le cas du condensateur cylindrique, à l'aide du théorème de Gauss et en calculant la différence de potentiel entre les deux sphères. On trouve que la capacité est donnée par l'expression :

$$C_{\text{vide}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} . \tag{5.11}$$

L'ajout d'un diélectrique

Habituellement, on fabrique les condensateurs avec un diélectrique entre les armatures. Le champ électrique produit par les charges sur les armatures polarise le diélectrique. Comme nous avons vu à la section 3.6, les atomes du diélectrique deviennent des dipôles électriques qui s'alignent sur le champ électrique produit par les charges sur les armatures.

Prenons un condensateur plan sans diélectrique (l'isolant entre les armatures est le vide) qui est déjà chargé, avec une charge $+Q$ sur une armature et une charge $-Q$ sur l'autre armature (*voir la figure 5.7a*). Ces charges produisent un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}}$. On insère un diélectrique qui remplit l'espace entre les armatures. Les dipôles du diélectrique produisent un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_{\text{diél}}$, opposé à $\vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}}$ (*voir la figure 5.7b*). Selon l'équation 3.14 de la page 108, le champ résultant est proportionnel au champ créé par les charges sur les armatures :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{diél}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}}}{\kappa} , \tag{5.12}$$

où κ est la constante diélectrique du matériau servant de diélectrique. Cette constante est une caractéristique du diélectrique. La valeur de κ pour quelques diélectriques est donnée au tableau 5.1 (*voir la page suivante*) et à l'annexe C.

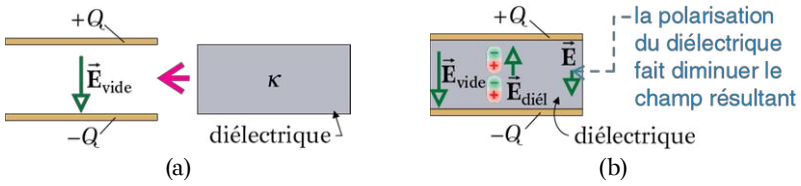


FIGURE 5.7

(a) Un condensateur avec du vide est chargé ; le champ est $\vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}}$. (b) Le diélectrique est polarisé, ce qui produit un champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{diél}}$. Le champ résultant $\vec{\mathbf{E}}$ est plus faible que $\vec{\mathbf{E}}_{\text{vide}}$.

Donc, l'ajout d'un diélectrique diminue le champ résultant entre les armatures. Par conséquent, la différence de potentiel diminue de la même façon :

$$\Delta V = \frac{\Delta V_{\text{vide}}}{\kappa} . \tag{5.13}$$

TABLEAU 5.1

Les valeurs approximatives de la constante diélectrique κ et de la rigidité diélectrique E_{max} à 20 °C

Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)	Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)
Air	1,000 59	3	Plexiglas	3,4	
Eau	80,4		Polyéthylène	2,25	
Germanium	16		Polystyrène	2,6	24
Glycérine	42,5		Porcelaine	6 à 8	
Méthanol	33,6		PVC	3,4	40
Mica	3 à 6	150	Teflon	2,1	60
Papier	3	16	Verre	4 à 7	10 à 14

La charge sur les armatures n'a pas changé en insérant le diélectrique. La capacité du condensateur est donc

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V_{\text{vide}}/\kappa} = \kappa C_{\text{vide}} .$$

L'ajout du diélectrique fait augmenter la capacité du condensateur, car $\kappa > 1$ pour un diélectrique (autre que le vide).

Le champ et la différence de potentiel diminuent lorsque le condensateur n'est pas relié à une pile lors de l'ajout du diélectrique. Dans le cas où le condensateur est relié à une pile, celle-ci effectue un travail lors de l'ajout du diélectrique pour déplacer des charges supplémentaires, jusqu'à ce que la différence de potentiel entre les bornes du condensateur soit $\Delta V = \Delta V_{\text{pile}} = \Delta V_{\text{vide}}$. Dans ce cas, on trouve que la nouvelle charge sur l'armature positive est

$$Q' = \kappa Q . \tag{5.14}$$

La capacité du condensateur avec le diélectrique est alors

$$C = \frac{Q'}{\Delta V_{\text{vide}}} = \kappa \frac{Q}{V_{\text{vide}}} = \kappa C_{\text{vide}} .$$

La capacité augmente par le même facteur κ. Donc, quelle que soit la façon dont le diélectrique est inséré, la capacité est

Capacité avec un diélectrique

$$C = \kappa C_{\text{vide}} . \tag{5.15}$$

L'ajout d'un diélectrique a un deuxième effet. Le diélectrique est un isolant tant que le module du champ électrique n'atteint pas une certaine valeur. Si le champ électrique dans le diélectrique est trop intense, le champ ionise les atomes du diélectrique, ce qui produit un claquage (un arc électrique) dans le diélectrique. On appelle *rigidité diélectrique* le module du champ électrique maximal que peut supporter un diélectrique sans claquage. Le tableau 5.1 donne aussi quelques valeurs de rigidité diélectrique. Selon la forme et les dimensions du condensateur, ainsi que la rigidité diélectrique, le condensateur peut être soumis à une différence de potentiel maximale, que le fabricant indique sur le boîtier du condensateur.

EXEMPLE 5.1 La capacité d'un condensateur

Un condensateur plan a des armatures carrées de 6,00 cm de côté, séparées d'une distance de 8,00 µm. Les armatures sont séparées par du teflon.

a. Quelle est la capacité du condensateur ?
b. Quelle est la différence de potentiel maximale qu'on peut appliquer aux bornes de ce condensateur ?
c. Quelle est la charge du condensateur si on applique une différence de potentiel de 120 V à ses bornes ?

SOLUTION

Nous utilisons le tableau 5.1 pour connaître les données sur le teflon. L'aire des armatures est

$$A = (0{,}060\,0\ \text{m})^2 = 0{,}003\,60\ \text{m}^2\ .$$

Connues	Inconnues
$d = 8{,}00 \times 10^{-6}\ \text{m}$	C
$A = 0{,}003\,60\ \text{m}^2$	ΔV_{max}
$\kappa = 2{,}1$	Q à $\Delta V = 120\ \text{V}$
$E_{\text{max}} = 60 \times 10^6\ \text{V/m}$	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est composée des équations 5.15 et 5.7 (pour la capacité d'un condensateur plan) :

$$C = \kappa C_{\text{vide}} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons, en insérant les valeurs,

$$C = \frac{2{,}1 \times 8{,}854 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 0{,}003\,60\ \text{m}^2}{8{,}00 \times 10^{-6}\ \text{m}}$$
$$= 8{,}37 \times 10^{-9}\ \text{F} = 8{,}4\ \text{nF}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

La différence de potentiel maximale est liée à la rigidité diélectrique (le module du champ maximal). Dans un condensateur plan, le champ électrique est uniforme. Nous obtenons alors la relation suivante :

$$\Delta V = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -E \int_-^+ ds\, \cos(180°) = Ed\ . \qquad \text{(ii)}$$

Le signe négatif est annulé par le produit scalaire entre $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$, car $\vec{\mathbf{E}}$ est orienté de l'armature positive à l'armature négative, alors que l'élément de longueur est orienté dans l'autre sens.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation (ii), qui permet d'écrire

$$\Delta V_{\text{max}} = E_{\text{max}} d\ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\Delta V_{\text{max}} = 60 \times 10^6\ \text{V/m} \times 8{,}00 \times 10^{-6}\ \text{m} = 480\ \text{V}\ .$$
(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 5.3 :

$$Q = C\ \Delta V\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$Q = 8{,}37 \times 10^{-9}\ \text{F} \times 120\ \text{V} = 1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{C}$$
$$= 1{,}0\ \mu\text{C}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur a du sens. Toutes les réponses sont des valeurs positives, comme il se doit.

5.3 L'énergie emmagasinée dans un condensateur

Une utilité importante des condensateurs est de pouvoir emmagasiner de l'énergie. Lorsqu'on branche un condensateur à une pile, celle-ci effectue un travail pour déplacer des charges d'une armature à l'autre. Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique. Un condensateur chargé pourra

convertir l'énergie potentielle en effectuant un travail sur un dispositif branché au condensateur.

Défi animé 5.2
Comment l'énergie emmagasinée dans un condensateur varie-t-elle lorsqu'on y insère un diélectrique ?

On veut calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur ayant une capacité C et qui porte une charge Q. Pour ce faire, on branche le condensateur, initialement sans charge, à une pile. Au début, le condensateur n'a pas d'énergie ($U_i = 0$), car il n'y a pas de charge sur ses armatures. La pile effectue un travail en transférant des électrons, d'une armature à l'autre. Supposons qu'à un temps intermédiaire, la charge du condensateur est q et il y a une différence de potentiel $\Delta V = q/C$ entre ses armatures. La pile transfère ensuite une charge supplémentaire infinitésimale dq entre les deux armatures. Cela modifie l'énergie potentielle du condensateur. Selon l'équation 4.9 de la page 125, la variation d'énergie potentielle dU se calcule à partir de la charge déplacée et de la différence de potentiel :

$$dU = dq\,\Delta V = \frac{q}{C}\,dq\ .$$

On obtient l'énergie potentielle du condensateur chargé complètement en sommant tous les dU (donc en intégrant), lorsque la charge sur le condensateur varie de $q = 0$ à $q = Q$:

$$U_C = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq$$
$$= \frac{1}{C}\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C}\ .$$

Il est possible d'exprimer l'énergie du condensateur en fonction de la différence de potentiel ΔV_C en utilisant la définition de la capacité $C = Q/(\Delta V_C)$ aux bornes du condensateur lorsque celui-ci est complètement chargé. On obtient les équations équivalentes suivantes :

Énergie d'un condensateur

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C\,(\Delta V_C)^2 = \frac{1}{2}Q\,\Delta V_C\ . \qquad (5.16)$$

Remarquez que pour un condensateur ayant une capacité C, l'énergie dépend du carré de la différence de potentiel à ses bornes.

EXEMPLE 5.2 Un défibrillateur cardiaque

Un *défibrillateur cardiaque* est un appareil qui applique un choc électrique au cœur d'un patient qui bat de façon irrégulière. Un appareil possède un condensateur de 75 µF qui est chargé lentement, jusqu'à une différence de potentiel de 5,0 kV.

a. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur chargé ?
b. Si le quart de cette énergie est transférée au patient en 2,0 ms, quelle est la puissance moyenne de l'impulsion électrique ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$C = 75\times10^{-6}$ F	U_C
$\Delta V_C = 5000$ V	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 5.16 :

$$U_C = \frac{1}{2}C\,(\Delta V_C)^2\ . \qquad (i)$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$U_C = \frac{1}{2}(75\times10^{-6}\text{ C})(5000\text{ V})^2 = 937{,}5\text{ J}$$
$$= 0{,}94\text{ kJ}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\Delta E = 0{,}25U_C$	P_{moy}
$\Delta t = 2{,}0\times10^{-3}\text{ s}$	

Identifier la clé
La **clé** est la définition de la puissance moyenne, qui est le rapport de l'énergie transformée et de l'intervalle de temps nécessaire (*voir l'équation 8.13 du tome 1*) :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème
La puissance moyenne est

$$P_{\text{moy}} = \frac{0{,}25\times937{,}5\text{ J}}{2{,}0\times10^{-3}\text{ s}} = 117\text{ kW} = 1{,}2\times10^{5}\text{ W}\,.$$
(réponse)

Valider la réponse
La puissance nécessaire dépasse largement la puissance que peut donner une pile. Le condensateur se charge lentement, mais il peut se décharger très rapidement, ce qui donne une très grande puissance.

La densité d'énergie électrique

Un condensateur chargé possède une certaine quantité d'énergie ΔU_C qui peut être utilisée pour faire fonctionner un appareil. On peut se demander où se trouve exactement cette énergie. Pour comprendre ce phénomène, prenons un condensateur plan composé d'armatures conductrices séparées par du vide. Selon l'équation 5.6, la différence de potentiel est $\Delta V_C = Ed$. De plus, selon l'équation 5.7, la capacité du condensateur plan est $C = \epsilon_0 A/d$. L'insertion de ces deux équations dans l'équation 5.16 permet d'exprimer l'énergie du condensateur en fonction du module du champ électrique :

$$U_C = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{\epsilon_0}{2}E^2\,(Ad)\,. \qquad (5.17)$$

Or, le facteur Ad représente le volume entre les deux armatures, c'est-à-dire le volume où il y a un champ électrique (en supposant que le condensateur est idéal, avec le champ confiné dans cette région). Donc, **l'énergie électrique est emmagasinée dans le champ électrique.** On définit la *densité d'énergie électrique* u_E comme l'énergie du champ électrique par unité de volume :

$$u_E \equiv \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{volume}} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2\,. \qquad (5.18)$$

Densité d'énergie électrique

La densité d'énergie se mesure en J/m^3 et elle dépend du carré du module du champ électrique.

On a obtenu la densité électrique pour un cas particulier, mais l'équation 5.18 peut être démontrée de façon générale. Donc, à un endroit où il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, il y a une certaine densité d'énergie u_E qui peut être utilisée pour accélérer des particules. Ceci montre bien que le champ électrique est réel et non un artifice de calcul. Nous reparlerons de la densité d'énergie électrique dans le tome 3, lorsque nous étudierons l'énergie transportée par la lumière. Nous verrons alors que la lumière est un phénomène électromagnétique et que l'énergie lumineuse est, en fait, l'énergie transportée par un champ électrique et un champ magnétique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.2

On branche un condensateur plan à une pile dont la f.é.m. est $\mathcal{E}$. Les armatures sont séparées par du vide. Indiquez si l'énergie emmagasinée dans le condensateur augmente, diminue ou reste la même lorsque :

a. la distance entre les armatures augmente ;

b. on insère un diélectrique dont la constante diélectrique est $\kappa = 2$.

Si on débranche la pile, indiquez si l'énergie emmagasinée dans le condensateur augmente, diminue ou reste la même lorsque :

c. la distance entre les armatures augmente ;

d. on insère un diélectrique dont la constante diélectrique est $\kappa = 2$.

5.4 L'association de condensateurs

Les circuits électriques peuvent comprendre plusieurs condensateurs. Pour connaître la charge, la différence de potentiel ou l'énergie emmagasinée par un condensateur particulier, il faut simplifier le circuit. Dans cette section, nous présentons une méthode qui permet de remplacer un circuit ou une partie d'un circuit par un circuit équivalent, plus simple à analyser. Pour simplifier les schémas, des symboles standards sont utilisés pour les différents éléments de circuit. Les condensateurs sont représentés par le symbole ⊣⊢ montrant deux plaques parallèles branchées à des fils. Le tableau 5.2 indique les symboles utilisés dans ce chapitre.

TABLEAU 5.2 **Les symboles utilisés dans les circuits**

Élément	Symbole
Pile	$\mathcal{E}$
Condensateur	C
Fil	
Interrupteur	ouvert / fermé

Les condensateurs en parallèle

Deux condensateurs sont branchés en parallèle lorsqu'ils sont branchés de façon équivalente à la figure 5.8. Les armatures supérieures sont reliées par un fil conducteur. De même, les deux armatures inférieures sont reliées ensemble. Les deux armatures supérieures sont au même potentiel, car elles forment un même conducteur. De même, les armatures inférieures sont au même potentiel, car elles sont reliées par un fil conducteur. Ceci implique que la différence de potentiel entre les bornes des deux condensateurs est identique :

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_C \qquad \text{(en parallèle)} . \tag{5.19}$$

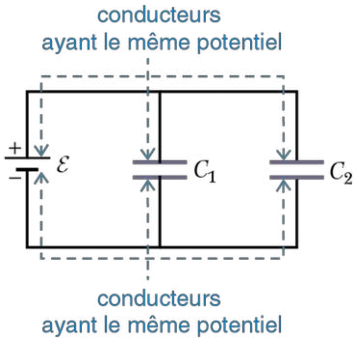


FIGURE 5.8
Deux condensateurs branchés en parallèle

La pile effectue un travail pour charger les condensateurs. À l'équilibre, la différence de potentiel des condensateurs est égale à celle de la pile ($\Delta V_C = \Delta V_{\text{pile}} = \mathcal{E}$). Le condensateur C_1 a alors une charge $Q_1 = C_1\,\Delta V_C$ sur son armature positive, et le condensateur C_2 a une charge $Q_2 = C_2\,\Delta V_C$ sur son armature positive. La pile a donc déplacé une charge $Q = Q_1 + Q_2$ des armatures négatives vers les armatures positives. Les condensateurs en parallèle peuvent être remplacés par un seul condensateur équivalent $C_{\text{éq}}$, comme le montre la figure 5.9. Ce condensateur a la même charge totale $Q = Q_1 + Q_2$ pour la même différence de potentiel ΔV_C. On trouve la capacité équivalente :

$$C_{\text{éq}} = \frac{Q}{\Delta V_C} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V_C} = \frac{Q_1}{\Delta V_C} + \frac{Q_2}{\Delta V_C} = C_1 + C_2 .$$

Si on a plusieurs condensateurs en parallèle, on peut les remplacer par un condensateur équivalent dont la capacité est

Capacité équivalente

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(en parallèle)} . \tag{5.20}$$

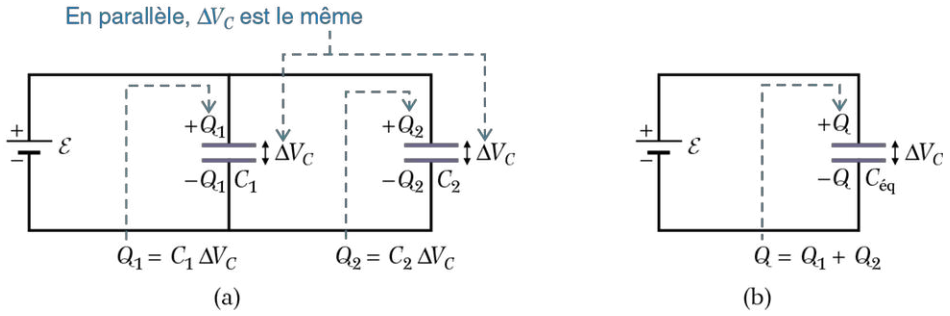


FIGURE 5.9
(a) Deux condensateurs sont branchés en parallèle. (b) Le circuit avec un condensateur équivalent.

La capacité d'un groupe de condensateurs en parallèle est plus grande que chacune des capacités individuelles.

En résumé, pour un groupement de condensateurs en parallèle :

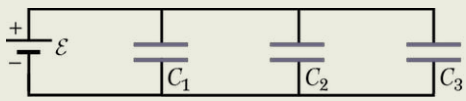
- Chaque condensateur a la même différence de potentiel ΔV_C à ses bornes.
- La charge sur chaque condensateur est $Q_i = C_i \Delta V_C$. Le condensateur qui a la plus grande capacité porte la plus grande charge.
- L'ensemble peut être remplacé par un condensateur équivalent $C_{éq} = C_1 + C_2 + \cdots$, avec le même ΔV_C et $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.3

Trois condensateurs $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 2$ nF et $C_3 = 3$ nF sont branchés comme le montre la figure ci-dessous. Classez les condensateurs selon un ordre croissant :

a. de la différence de potentiel ;

b. de la charge portée.



Les condensateurs en série

Les condensateurs sont branchés en série lorsqu'ils sont l'un à la suite de l'autre, comme le montre la figure 5.10. L'armature inférieure de C_1 est reliée à l'armature supérieure de C_2 par un fil conducteur. Cette partie n'est pas reliée à la pile, ce qui implique que la pile ne peut pas ajouter des charges sur ces armatures. Si, initialement, les condensateurs ne sont pas chargés, alors la charge nette de cette région doit demeurer nulle.

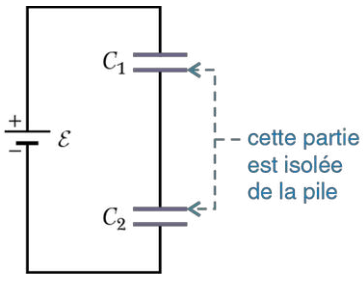


FIGURE 5.10
Deux condensateurs branchés en série

La pile effectue un travail pour déplacer des charges entre l'armature inférieure de C_2 et l'armature supérieure de C_1. Donc, l'armature supérieure de C_1 acquiert une charge $+Q$ et l'armature inférieure de C_2, une charge $-Q$. Par induction électrique, la charge $+Q$ va attirer une charge $-Q$ sur l'armature inférieure de C_1, laissant

une charge $+Q$ sur l'armature supérieure de C_2. Comme le montre la figure 5.11a, **la charge est la même sur chaque condensateur branché en série**:

$$Q = Q_1 = Q_2 \qquad \text{(en série)} . \tag{5.21}$$

Défi animé 5.3
Comment l'ajout de condensateurs modifie-t-il la charge équivalente d'un système alimenté par la même pile ?

La différence de potentiel aux bornes de C_1 est $\Delta V_1 = Q/C_1$, et la différence de potentiel aux bornes de C_2 est $\Delta V_2 = Q/C_2$. La différence de potentiel nette entre l'armature supérieure de C_1 et l'armature inférieure de C_2 correspond à la différence de potentiel aux bornes de la pile, soit $\Delta V_{\text{pile}} = \Delta V_C = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

De nouveau, on peut remplacer les deux condensateurs par un seul condensateur équivalent, qui aura la même charge Q et une différence de potentiel $\Delta V_C = \Delta V_1 + \Delta V_2$ à ses bornes (*voir la figure 5.11*). Étant donné que $\Delta V/Q = 1/C_{\text{éq}}$, on obtient

$$\frac{\Delta V_C}{Q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{\Delta V_1}{Q} + \frac{\Delta V_2}{Q}$$
$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} .$$

Lorsque plusieurs condensateurs sont branchés en série, la capacité équivalente est obtenue en calculant l'inverse de l'addition des inverses des capacités:

Capacité équivalente

$$C_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \right)^{-1} \qquad \text{(en série)} . \tag{5.22}$$

Ceci implique que la capacité équivalente d'un groupe de condensateurs en série est plus faible que chacune des capacités individuelles des condensateurs.

En résumé, pour un groupement de condensateurs en série:

- Chaque condensateur a la même charge Q.
- La différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur est $\Delta V_i = Q/C_i$. Le condensateur qui a la plus grande capacité a la plus petite différence de potentiel.
- L'ensemble peut être remplacé par un condensateur équivalent,

$$C_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \right)^{-1} ,$$

avec la même charge Q et une différence de potentiel $\Delta V_C = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots$

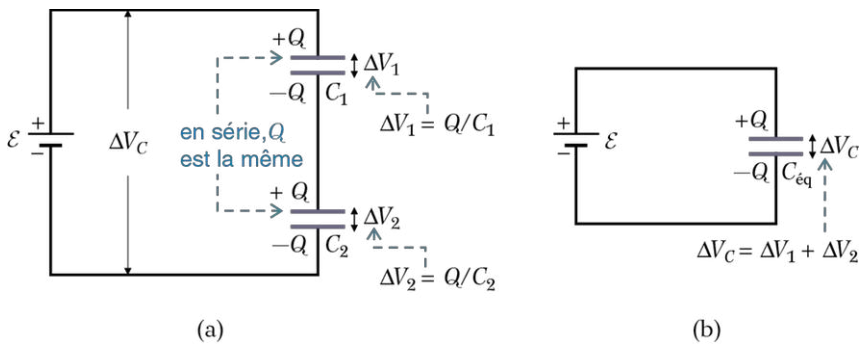


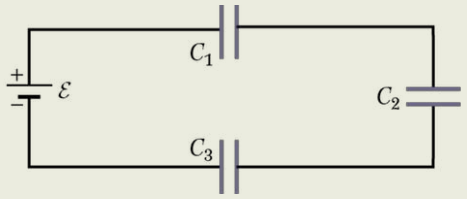
FIGURE 5.11
(a) Deux condensateurs sont branchés en série. (b) Le circuit avec le condensateur équivalent.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.4

Trois condensateurs $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 2$ nF et $C_3 = 3$ nF sont branchés comme le montre la figure ci-dessous. Classez les condensateurs selon un ordre croissant :

a. de la différence de potentiel ;

b. de la charge portée.



L'analyse de circuit de condensateurs

Pour calculer la charge ou la différence de potentiel d'un condensateur dans un circuit, on réduit graduellement le circuit à l'aide de la méthode de la capacité équivalente. La technique suivante peut être utilisée.

TECHNIQUE 5.1 Les circuits de condensateurs

1. **Identifier** une partie du circuit comme un ensemble de condensateurs en parallèle ou en série (l'un à la suite de l'autre). Calculez la capacité équivalente de l'ensemble :

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots \qquad \text{(en parallèle)}$$

$$C_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \right)^{-1} . \qquad \text{(en série)}$$

2. **Redessiner le circuit** avec le condensateur équivalent à cette partie de circuit.

3. **Refaire les étapes précédentes** jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul condensateur équivalent branché à la source de f.é.m. La charge qui circule dans la source de f.é.m. est

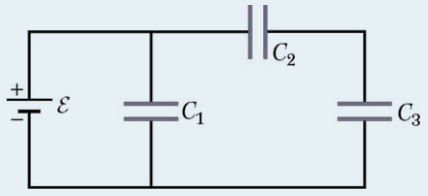
$$Q = C_{\text{éq}}\, \mathcal{E} .$$

4. **Retourner en arrière** pour remplacer les condensateurs équivalents par les condensateurs initiaux.

- Pour des condensateurs en parallèle, ils ont le même ΔV et $Q_i = C_i\, \Delta V$.
- Pour des condensateurs en série, ils ont le même Q et $\Delta V_i = Q/C_i$.

EXEMPLE 5.3 Un circuit de condensateurs

Trois condensateurs ($C_1 = 4{,}0$ nF, $C_2 = 3{,}0$ nF et $C_3 = 6{,}0$ nF) sont branchés dans un circuit à une batterie ($\mathcal{E} = 12$ V), comme le montre la figure ci-contre.



a. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le circuit ?

b. Quelle est la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$C_1 = 4{,}0$ nF	$C_2 = 3{,}0$ nF	U
$C_3 = 6{,}0$ nF	$\mathcal{E} = 12$ V	Q_i ΔV_i

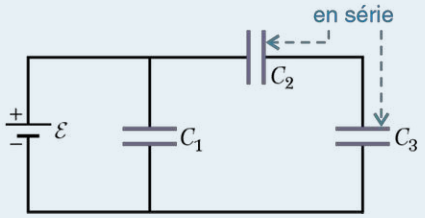
Pour calculer l'énergie emmagasinée dans tout le circuit, nous devons calculer l'énergie dans le condensateur équivalent du circuit.

Identifier la clé

La **clé** consiste à réduire le circuit à l'aide de la capacité équivalente. Ensuite, l'énergie dans un condensateur est donnée par l'équation 5.16 :

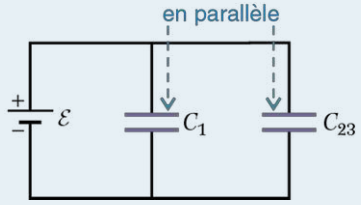
$$U_C = \frac{1}{2} C_{\text{éq}} (\Delta V_C)^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème



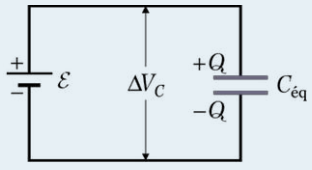
La capacité équivalente C_{23} est

$$C_{23} = \left(\frac{1}{3{,}0 \text{ nF}} + \frac{1}{6{,}0 \text{ nF}} \right)^{-1} = 2{,}0 \text{ nF} \ .$$



La capacité équivalente du circuit est

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_{23} = 4{,}0 \text{ nF} + 2{,}0 \text{ nF} = 6{,}0 \text{ nF} \ . \qquad \text{(ii)}$$



$C_{\text{éq}}$ est le condensateur équivalent pour le circuit entier. Sa différence de potentiel est égale à celle de la batterie,

$$\Delta V_C = \mathcal{E} = 12 \text{ V} \ ,$$

et sa charge est

$$Q = C_{\text{éq}} \, \Delta V_C = 6{,}0 \text{ nF} \times 12 \text{ V} = 72 \text{ nC} \ .$$

Selon l'équation (i), l'énergie emmagasinée dans le circuit complet est

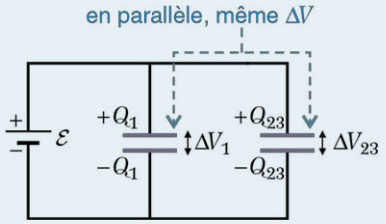
$$U_C = \frac{1}{2} (6{,}0 \times 10^{-9} \text{ F})(12 \text{ V})^2 = 4{,}3 \times 10^{-7} \text{ J}$$
$$= 0{,}43 \text{ µJ} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

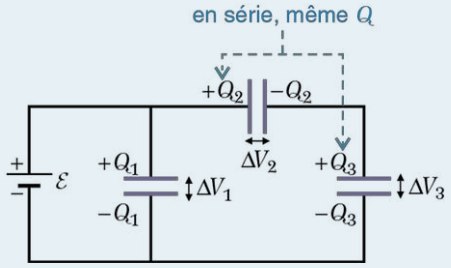
Identifier la clé

Nous devons reconstruire le circuit original.

Résoudre le problème



$$\Delta V_C = \Delta V_1 = \Delta V_{23} = 12 \text{ V}$$
$$Q_1 = C_1 \, \Delta V_1 = 4{,}0 \text{ nF} \times 12 \text{ V} = 48 \text{ nC}$$
$$Q_{23} = C_{23} \, \Delta V_{23} = 2{,}0 \text{ nF} \times 12 \text{ V} = 24 \text{ nC}$$



$$Q_{23} = Q_2 = Q_3 = 24 \text{ nC}$$
$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{24 \text{ nC}}{3{,}0 \text{ nF}} = 8{,}0 \text{ V}$$
$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{24 \text{ nC}}{6{,}0 \text{ nF}} = 4{,}0 \text{ V}$$

En résumé, la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur sont

$$Q_1 = 48 \text{ nC} \qquad \Delta V_1 = 12 \text{ V} \qquad \text{(réponse)}$$
$$Q_2 = 24 \text{ nC} \qquad \Delta V_2 = 8{,}0 \text{ V} \qquad \text{(réponse)}$$
$$Q_3 = 24 \text{ nC} \qquad \Delta V_3 = 4{,}0 \text{ V} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les condensateurs C_2 et C_3 sont en série ; nous devons avoir $\Delta V_2 + \Delta V_3 = \Delta V_{23} = 12$ V. C'est bien ce que nous obtenons. De plus, C_1 et C_{23} sont en parallèle ; nous devons avoir $Q_1 + Q_{23} = Q = 72$ nC ; c'est aussi ce qui est obtenu. Remarquez qu'en **a.**, nous avons exprimé la capacité en F pour obtenir U en joules alors qu'en **b.**, nous avons gardé la charge en nC et la capacité en nF pour les calculs.

Les condensateurs déjà chargés

Prenons deux condensateurs, ayant des capacités respectives C_1 et C_2, préalablement chargés à l'aide de piles. Le premier condensateur a une différence de potentiel ΔV_{1i} et une charge Q_{1i} (l'armature positive a une charge $+Q_{1i}$ et l'armature négative, une charge $-Q_{1i}$). De même, le second condensateur a une différence de potentiel initiale ΔV_{2i} et une charge Q_{2i}. On les branche comme le montre la figure 5.12a, en incluant un interrupteur ouvert. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, les charges se redistribuent jusqu'à ce que l'équilibre électrostatique soit atteint. Les armatures reliées par un fil conducteur se comportent comme un seul conducteur. Il est possible d'utiliser la méthode expliquée à la section 4.8 de la page 144. À l'équilibre, la différence de potentiel doit être la même pour les deux condensateurs :

$$\Delta V_{1f} = \Delta V_{2f}\,. \tag{5.23}$$

De plus, la charge est conservée : les charges se déplacent d'une armature d'un condensateur vers une armature de l'autre condensateur. À la figure 5.12b, les armatures positives ont été reliées ensemble, et les armatures négatives ont aussi été reliées ensemble. Le principe de conservation de la charge implique :

$$Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} \qquad \text{(armatures de même polarité)} \tag{5.24}$$

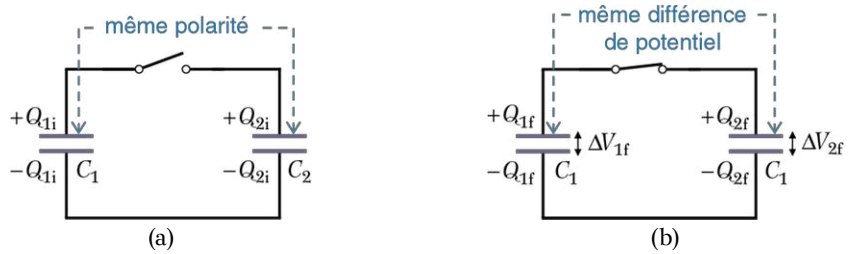


FIGURE 5.12

(a) Les condensateurs ont été chargés préalablement. (b) À l'équilibre, la différence de potentiel est la même.

À la figure 5.13a à la page suivante, les condensateurs sont branchés pour que les armatures de polarités opposées soient reliées ensemble. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, les charges se déplacent, et une partie de la charge positive est neutralisée par la charge négative. À la figure 5.13a (*voir la page suivante*), la charge initiale du condensateur C_1 est plus grande que la charge initiale du condensateur C_2. Ceci a pour conséquence qu'à l'équilibre, les armatures supérieures sont positives et les armatures inférieures sont négatives, comme le montre la figure 5.13b (*voir la page suivante*). Le principe de conservation de la charge implique alors :

$$Q_{1i} - Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} \qquad \text{(pour } Q_{1i} > Q_{2i}\text{)} \tag{5.25}$$

Dans le cas où $Q_{2i} > Q_{1i}$, ce sont les armatures inférieures qui seraient positives et les armatures supérieures qui seraient négatives.

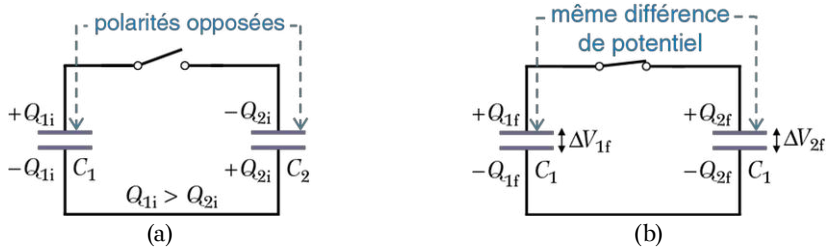


FIGURE 5.13
(a) Les condensateurs ont été chargés préalablement, avec $Q_{1i} > Q_{2i}$. (b) À l'équilibre, la différence de potentiel est la même.

EXEMPLE 5.4 Le branchement de deux condensateurs

Un condensateur $C_1 = 4{,}00$ nF est initialement chargé à l'aide d'une batterie de 6,00 V.
Un deuxième condensateur $C_2 = 3{,}00$ nF est chargé à l'aide d'une batterie de 9,00 V.
On relie les armatures de polarités opposées.

a. Calculez la charge sur l'armature positive de chaque condensateur.

b. Calculez la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$C_1 = 4{,}00$ nF	$\Delta V_{1i} = 6{,}00$ V	Q_{1f}	Q_{2f}
$C_2 = 3{,}00$ nF	$\Delta V_{2i} = 9{,}00$ V	ΔV_{1f}	ΔV_{2f}

Nous devons d'abord calculer la charge initiale sur chaque condensateur :

$$Q_{1i} = C_1\,\Delta V_{1i} = 4{,}00\text{ nF} \times 6{,}00\text{ V} = 24{,}0\text{ nC}$$
$$Q_{2i} = C_2\,\Delta V_{2i} = 3{,}00\text{ nF} \times 9{,}00\text{ V} = 27{,}0\text{ nC}\,.$$

Illustrer la situation

Nous présentons, à la figure 5.14, la situation initiale et la situation finale. Comme $Q_{2i} > Q_{1i}$, les armatures du haut seront négatives à l'équilibre.

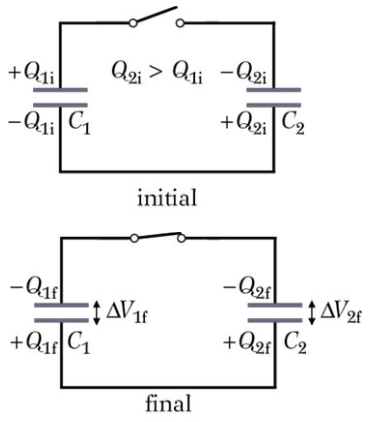


FIGURE 5.14
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.4

Identifier la clé

La première **clé** est l'équation 5.23, qui indique que la différence de potentiel des deux condensateurs est la même à l'équilibre :

$$\Delta V_{1f} = \Delta V_{2f} \Rightarrow \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_{2f}}{C_2}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est le principe de conservation de la charge pour les armatures reliées ensemble. Comme $Q_{2i} > Q_{1i}$, ce sont les armatures du bas qui seront positives à l'équilibre. Pour ces armatures dans la figure 5.14, nous obtenons

$$Q_{2i} - Q_{1i} = Q_{2f} + Q_{1f}\,. \qquad \text{(ii)}$$

SOLUTION a.

Résoudre le problème

Les équations (i) et (ii) forment un système d'équations à deux inconnues. En remplaçant les valeurs connues (exprimées en nF et en nC), nous avons

$$\frac{Q_{1f}}{4{,}00} = \frac{Q_{2f}}{3{,}00} \Rightarrow 3{,}00Q_{1f} = 4{,}00Q_{2f} \qquad \text{(iii)}$$

$$27{,}0 - 24{,}0 = Q_{2f} + Q_{1f} \Rightarrow Q_{2f} = 3{,}00 - Q_{1f}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Nous insérons le résultat de l'équation (iv) dans l'équation (iii) :

$$3{,}00Q_{1f} = 4{,}00\ (3{,}00 - Q_{1f})$$
$$\Rightarrow Q_{1f} = \frac{12{,}0}{7{,}00} = 1{,}71\text{ nC}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Nous insérons ensuite ce résultat dans l'équation (iv) pour obtenir Q_{2f}:

$$Q_{2f} = 3{,}00 - \frac{12{,}0}{7{,}00} = \frac{9{,}00}{7{,}00} = 1{,}29 \text{ nC} .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Résoudre le problème

Nous obtenons simplement la différence de potentiel de chaque condensateur à partir de la charge:

$$\Delta V_{1f} = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{1{,}71 \text{ nC}}{4{,}00 \text{ nF}} = 0{,}429 \text{ V}$$

(réponse)

$$\Delta V_{2f} = \frac{Q_{2f}}{C_2} = \frac{1{,}29 \text{ nC}}{3{,}00 \text{ nF}} = 0{,}429 \text{ V} .$$

(réponse)

Valider la réponse

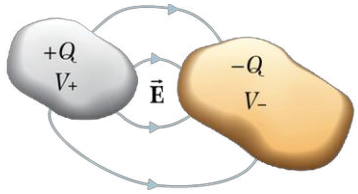
Les charges finales sont plus faibles que les charges initiales, car nous avons branché les armatures de polarités opposées. Ainsi, une partie de la charge a été neutralisée. Les différences de potentiel sur chaque condensateur sont égales à l'équilibre, comme il se doit.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le condensateur, un dispositif utilisé dans les circuits électriques pour emmagasiner des charges et de l'énergie.

LES DÉFINITIONS

Un **condensateur** est composé de deux conducteurs (les armatures), portant des charges $+Q$ et $-Q$ respectivement, séparés par un diélectrique (un isolant). La différence de potentiel entre les armatures est $\Delta V_C = V_+ - V_-$.



La **capacité**, mesurée en farads (F), est une propriété du condensateur :

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V_C} .$$

LES LOIS ET LES PRINCIPES

L'**énergie électrique** est emmagasinée dans le champ électrique. La densité d'énergie est

$$u_E = \frac{\text{énergie}}{\text{volume}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 .$$

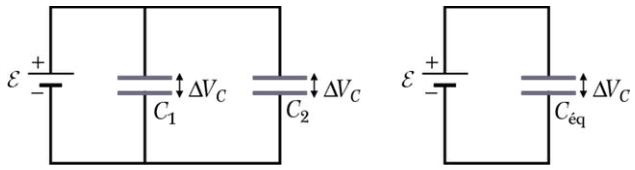
Dans un condensateur chargé, l'**énergie potentielle électrique** est

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V_C)^2 = \frac{1}{2} Q \, \Delta V_C .$$

LES RÉSULTATS

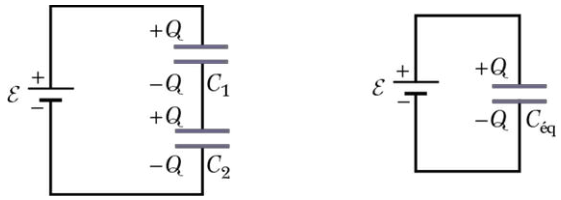
- Les **condensateurs en parallèle** :

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots$$
$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = V_C .$$



- Les **condensateurs en série** :

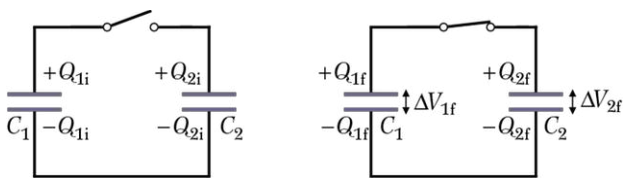
$$C_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \right)^{-1}$$
$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q .$$



- Les **condensateurs déjà chargés** :

$$\Delta V_{1f} = \Delta V_{2f} ,$$

la charge du système est conservée.



- Un **condensateur plan** est composé d'armatures planes, d'aire A et séparées d'une distance d.

$$C_{\text{vide}} = \frac{\epsilon_0 A}{d} .$$

- Un **condensateur cylindrique** est composé d'un cylindre, de longueur L et de rayon a, entouré d'un cylindre de longueur L de rayon b.

$$C_{\text{vide}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln (b/a)} .$$

- Un **condensateur sphérique** est composé d'une sphère de rayon a à l'intérieur d'une sphère de rayon b.

$$C_{\text{vide}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} .$$

- L'**ajout d'un diélectrique** fait augmenter la capacité :

$$C = \kappa C_{\text{vide}} ,$$

où κ est la constante diélectrique.

Si le condensateur n'est pas relié à une pile lorsqu'on insère le diélectrique, la charge ne change pas, mais

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{vide}} + \vec{E}_{\text{diél}} = \frac{\vec{E}_{\text{vide}}}{\kappa}$$
$$\Delta V = \frac{\Delta V_{\text{vide}}}{\kappa} .$$

Si le condensateur est relié à une pile lorsqu'on insère le diélectrique, la charge sur chaque armature change :

$$Q' = \kappa Q .$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 5.1 La capacité d'un condensateur

Q1 Les armatures d'un condensateur sont reliées à une pile.

a. Que devient la charge sur les armatures si on débranche la pile ?

b. Que devient la charge si on relie les deux armatures avec un fil conducteur ?

Q2 Qu'arrive-t-il à la capacité d'un condensateur lorsqu'on double :

a. la charge sur le condensateur ;

b. le champ électrique entre les plaques ;

c. la différence de potentiel aux bornes du condensateur ?

E3 Un condensateur de 8,20 µF est branché à une pile de 9,00 V. Quelle est la charge sur l'armature positive du condensateur à l'équilibre ?

P4 Une cellule biologique possède une membrane dont l'épaisseur est de 7,5 nm. La membrane est soumise de façon constante à une différence de potentiel de –90,0 mV (il y a un excédent de charges négatives à l'intérieur de la cellule). La capacité de la membrane est de 6,0 nF. À la suite d'une perturbation, la différence de potentiel passe de –90,0 mV à 40,0 mV en 1,0 ms.

a. Quelle est la charge nette initiale à l'intérieur de la cellule ?

b. Quelle est la charge nette finale à l'intérieur de la cellule ?

c. Calculez le taux de variation moyen de la charge $i = (\Delta Q)/(\Delta t)$ traversant la membrane. (Nous verrons au chapitre 6 que cette quantité représente le courant électrique.)

Section 5.2 Le calcul de la capacité

Q5 Un condensateur plan est constitué d'armatures séparées de vide. Qu'arrive-t-il à la capacité du condensateur lorsqu'on :

a. divise par 2 la distance entre les armatures ;

b. divise par 2 l'aire de ses armatures ;

c. insère entre ses armatures un diélectrique dont la constante diélectrique est de 2,5 ?

Q6 La figure 5.15 montre la charge en fonction de la différence de potentiel pour des condensateurs plans. Le tableau suivant donne les caractéristiques de quatre condensateurs. Associez les courbes du graphique aux condensateurs énumérés dans le tableau.

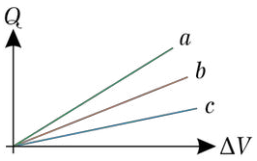


FIGURE 5.15 • Question 6

Condensateur	Aire	Distance	κ
C_1	A	d	1
C_2	$2A$	d	1
C_3	A	$2d$	1
C_4	$2A$	$2d$	2

E7 Un condensateur plan a une charge de 0,96 µC, et il est composé de deux armatures parallèles dont l'aire est de 112 cm^2 chacune. L'espace entre les armatures est rempli par un diélectrique. Le module du champ électrique résultant entre les armatures est de $1{,}3 \times 10^6$ V/m.

a. Quelle est la constante diélectrique de ce matériau ?

b. Selon le tableau 5.1, quel est le matériau utilisé comme diélectrique dans ce condensateur ?

E8 Un condensateur plan est constitué de deux armatures circulaires de 15,0 cm de rayon et séparées d'une distance de 5,0 mm. L'espace entre les armatures est rempli d'air. Quelle est la charge sur l'armature positive si on applique une différence de potentiel de 120,0 V ?

E9 Un condensateur cylindrique possède un rayon externe de 15,0 mm, un rayon interne de 6,00 mm et une longueur de 45,0 cm. Les deux armatures sont séparées par du polystyrène. Quelle est la capacité du condensateur ?

P10 Un condensateur sphérique est composé d'une sphère creuse conductrice de rayon b et d'une sphère conductrice de rayon a au centre de la sphère creuse. Un diélectrique de constante κ remplit l'espace entre les deux conducteurs. Démontrez que la capacité de ce condensateur est donnée par l'expression :

$$C = 4\pi\epsilon_0\kappa\frac{ab}{b-a}.$$

Section 5.3 L'énergie emmagasinée dans un condensateur

Q11 Un condensateur C_1 a une capacité trois fois plus petite qu'un condensateur C_2. Le condensateur C_1 a trois fois plus d'énergie que le condensateur C_2.

a. Quel est le rapport Q_1/Q_2 ?

b. Quel est le rapport $(\Delta V_1)/(\Delta V_2)$?

Q12 Classez par ordre croissant d'énergie électrique les situations suivantes :

(i) un condensateur de 2 µF branché à une pile de 2 V ;

(ii) un condensateur de 2 µF possédant une charge de 2 µC ;

(iii) un condensateur branché à une pile de 2 V et possédant une charge de 2 µC.

E13 Un condensateur plan comporte deux armatures parallèles dont l'aire est de 53,0 cm^2 chacune, séparées de 4,00 mm. Il y a une différence de potentiel de 720 V entre ses armatures. Déterminez :

a. la capacité du condensateur ;

b. la charge du condensateur ;

c. l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

E14 Un condensateur plan a des armatures dont l'aire est de 26 cm^2 et qui sont séparées d'une distance de 3,0 mm. Le condensateur est branché à une pile de 9,0 V. Quelle est la densité d'énergie électrique présente entre ses armatures ?

P15 Lorsqu'on branche un condensateur plan à une source de f.é.m. de 34,0 V, une densité d'énergie électrique de $2{,}55 \times 10^{-3}$ J/m^3 apparaît entre ses armatures. L'aire de chaque armature est de 16,0 cm^2. Quelle est la capacité du condensateur ?

P16 Un condensateur plan est conçu pour être soumis à une différence de potentiel maximale de 400 V et emmagasiner une énergie électrique maximale de 80,0 mJ. Il utilise un diélectrique dont la rigidité diélectrique est de 150×10^6 V/m, et la constante diélectrique est de 4,70. Déterminez :

a. la capacité du condensateur ;

b. la distance entre les armatures ;

c. l'aire d'une armature ;

d. la charge du condensateur si l'énergie emmagasinée est de 50,0 mJ.

P17 Un condensateur de 65 µF est chargé en le branchant à une source de f.é.m. de 120 V. Il est ensuite débranché de la source et branché à un moteur d'une voiture miniature de 250 g. Le rendement du moteur est de 35 %, c'est-à-dire que 35 % de l'énergie électrique est transformée en énergie cinétique.

a. Quelle est l'énergie cinétique de la voiture lorsque le condensateur est complètement déchargé ?

b. Quel est le module de la vitesse finale de la voiture ?

P18 Un appareil photo utilise une pile de 3,00 V pour charger un condensateur. Ce dernier est ensuite branché à un flash pour produire de la lumière. Le condensateur se décharge en 18,0 µs avec une puissance moyenne de 12,5 W.

a. Quelle est la charge sur le condensateur lorsque celui-ci est complètement chargé ?

b. Quelle est la capacité du condensateur ?

c. Quel est le taux de variation moyen de la charge $i = |(\Delta Q)/(\Delta t)|$? (Nous verrons au chapitre 6 que ce taux de variation représente le courant électrique.)

P19 Un condensateur plan est composé d'armatures, dont l'aire est de 0,500 m^2 chacune, séparées d'une distance de 95,0 µm ; l'espace est rempli d'air. On charge le condensateur en le branchant à une source de f.é.m. de 200 V. Une fois chargé, on le débranche de la source de f.é.m., sans décharger le condensateur. Calculez le travail pour séparer les armatures jusqu'à une distance de 300 µm.

P20 Un condensateur plan est composé d'armatures, dont l'aire est de 0,250 m^2, séparées d'un diélectrique ayant une épaisseur de 600 µm et dont la constante diélectrique est de 6,00. On charge le condensateur en le branchant à une source de f.é.m. de 120 V, puis on débranche la source de f.é.m. Quel est le travail nécessaire pour enlever le diélectrique ?

Section 5.4 L'association de condensateurs

Q21 Trois condensateurs ont des capacités C, $2C$ et $C/2$ respectivement. On les branche de trois façons différentes, comme il est indiqué à la figure 5.16. Classez les situations par ordre croissant de $C_{éq}$.

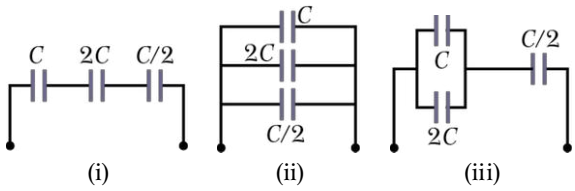


FIGURE 5.16 • Question 21

E22 On branche en parallèle un condensateur $C_1 = 6{,}00$ µF et un condensateur $C_2 = 4{,}00$ µF. On applique une différence de potentiel de 200 V à cette association. Déterminez :

a. la capacité équivalente ;

b. la charge de chaque condensateur ;

c. la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

E23 On branche en série un condensateur $C_1 = 6{,}00$ µF et un condensateur $C_2 = 4{,}00$ µF. On applique une différence de potentiel de 200 V à cette association. Déterminez :

a. la capacité équivalente ;

b. la charge de chaque condensateur ;

c. la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

E24 Déterminez la capacité équivalente de l'association des condensateurs de la figure 5.17 si $C_1 = 12{,}0\ \mu F$, $C_2 = 15{,}0\ \mu F$ et $C_3 = 23{,}0\ \mu F$.

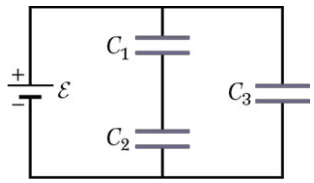


FIGURE 5.17 • Exercice 24

E25 Combien de condensateurs de 2,0 µF doit-on brancher en parallèle pour accumuler une charge de 450 µC, si la différence de potentiel aux bornes des condensateurs est de 37,5 V ?

E26 La capacité équivalente du circuit de la figure 5.18 est $C_{éq} = 12{,}25\ \mu F$. Déterminez la capacité du condensateur C_1.

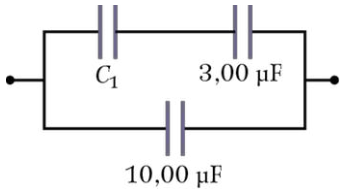


FIGURE 5.18 • Exercice 26

E27 On place deux condensateurs en parallèle, $C_1 = 3{,}0\ \mu F$ et $C_2 = 5{,}0\ \mu F$. On les branche à une source de f.é.m. de 180 V. Calculez l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit.

E28 On place deux condensateurs en série, $C_1 = 3{,}0\ \mu F$ et $C_2 = 5{,}0\ \mu F$. On les branche à une source de f.é.m. de 180 V. Calculez l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit.

E29 La figure 5.19 montre deux condensateurs en série ayant une aire A. La partie centrale est mobile. Montrez que la capacité équivalente est indépendante de la position centrale et qu'elle est donnée par l'expression :

$$C_{éq} = \frac{\epsilon_0 A}{b - a}.$$

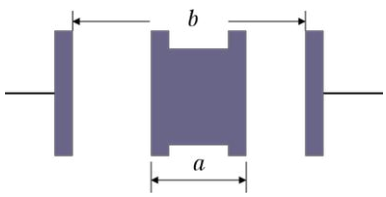


FIGURE 5.19 • Exercice 29

P30 Soit le circuit illustré à la figure 5.20, avec $C_1 = 3{,}00\ \mu F$, $C_2 = 5{,}00\ \mu F$ et $C_3 = 6{,}00\ \mu F$, branché à une pile $\mathcal{E} = 10{,}0$ V. Déterminez :

a. la capacité équivalente du circuit ;

b. la charge sur chaque condensateur ;

c. la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur ;

d. l'énergie emmagasinée dans chaque condensateur.

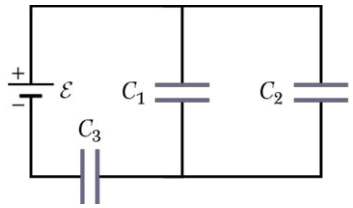


FIGURE 5.20 • Problème 30

P31 Pour le circuit de la figure 5.21, les capacités des condensateurs sont $C_1 = 12{,}0\ \mu F$, $C_2 = 6{,}00\ \mu F$ et $C_3 = 8{,}00\ \mu F$. Les condensateurs sont branchés à une source de f.é.m. $\mathcal{E} = 120$ V.

a. Quelle est la capacité équivalente du circuit ?

b. Quelle est l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit complet ?

c. Calculez la charge de chaque condensateur.

d. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur ?

e. Calculez l'énergie emmagasinée sur chaque condensateur.

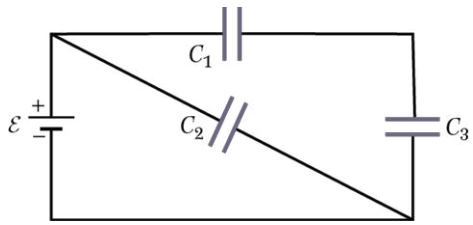


FIGURE 5.21 • Problème 31

P32 Dans le circuit de la figure 5.22, les condensateurs ont les capacités suivantes : $C_1 = 3{,}00\ \mu F$, $C_2 = 5{,}00\ \mu F$, $C_3 = 4{,}00\ \mu F$, $C_4 = 2{,}00\ \mu F$ et $C_5 = 3{,}00\ \mu F$.

a. Quelle est la capacité équivalente entre les points a et b ?

b. Si la charge sur C_2 est de 120 µC, quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur C_5 ?

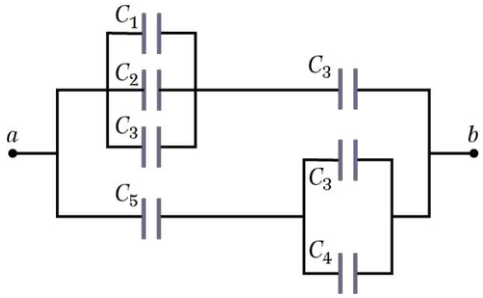


FIGURE 5.22 • Problème 32

P33 Dans le circuit de la figure 5.23, la pile a une f.é.m. de 9,00 V et les condensateurs sont $C_1 = 2{,}00\ \mu F$, $C_2 = 4{,}00\ \mu F$, $C_3 = 3{,}00\ \mu F$ et $C_4 = 5{,}00\ \mu F$. Le circuit possède aussi un interrupteur qui peut être ouvert ou fermé. Déterminez la charge sur chaque condensateur :

a. lorsque l'interrupteur est ouvert ;

b. lorsque l'interrupteur est fermé.

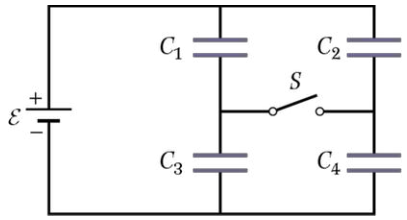


FIGURE 5.23 • Problème 33

P34 Deux condensateurs $C_1 = 5{,}0\ \mu F$ et $C_2 = 8{,}0\ \mu F$ sont branchés en série avec une pile de 12,0 V.

a. Trouvez la charge sur chaque condensateur et la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

b. On débranche la pile et on relie les armatures de même polarité ensemble. Trouvez la nouvelle charge sur chaque condensateur ainsi que la nouvelle différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

P35 Deux condensateurs $C_1 = 1{,}50\ \mu F$ et $C_2 = 5{,}60\ \mu F$ sont tous les deux chargés avec une pile de 60,0 V. Une fois chargés, on branche les deux condensateurs de sorte que leurs armatures de polarités opposées soient reliées.

a. Déterminez la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur à l'équilibre.

b. Déterminez la charge sur chaque condensateur à l'équilibre.

P36 Les armatures d'un condensateur ont une aire A et sont séparées d'une distance d. On place entre les armatures deux diélectriques différents, de deux façons distinctes, comme le montre la figure 5.24.

a. Quelle est la capacité équivalente dans la situation illustrée à la figure 5.24a ?

b. Quelle est la capacité équivalente dans la situation illustrée à la figure 5.24b ?

(Indice : Le condensateur peut être considéré comme une association de condensateurs.)

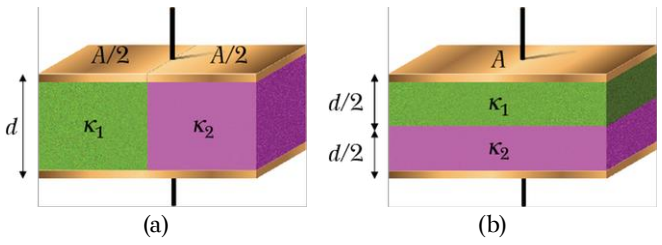


FIGURE 5.24 • Problème 36

P37 Un condensateur plan a des armatures de 25 m^2 d'aire chacune qui sont séparées d'une distance de 10,0 mm. On place entre les armatures une feuille de mica, dont la constante diélectrique est de 4,0 et qui a une épaisseur de 3,0 mm.

a. Calculez la capacité du condensateur si le mica se trouve au milieu du condensateur.

b. Calculez la capacité du condensateur si le mica se trouve collé sur une des armatures du condensateur.

P38 Quelle est la capacité du condensateur de la figure 5.25, qui a des armatures d'aire A qui sont séparées d'une distance d, avec trois diélectriques entre les armatures, sachant que les diélectriques 2 et 3 ont chacun une épaisseur de $d/2$?

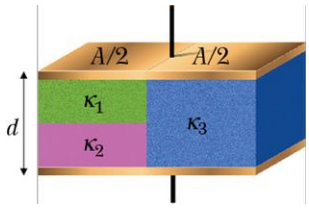


FIGURE 5.25 • Problème 38

P39 Un condensateur variable, utilisé dans les syntoniseurs analogiques de radios ou de télévisions, est illustré à la figure 5.26. Il est composé d'un groupe d'armatures fixes ayant la forme de demi-cercles, et d'un groupe d'armatures pouvant tourner, ayant la même forme et la même aire. Les armatures fixes sont reliées ensemble par une tige métallique. De même, les armatures mobiles sont reliées par une autre tige métallique, de sorte que la polarité des armatures alterne d'une armature à l'autre. Le nombre d'armatures est N, chacune a une aire A et est séparée de l'armature de polarité opposée par une distance d ; l'espace entre les deux est rempli d'air.

a. Quelle est la capacité du condensateur lorsque les armatures mobiles sont tournées d'un angle θ (mesuré en degrés) par rapport aux armatures fixes ?

b. Quelle est la capacité maximale du condensateur ?

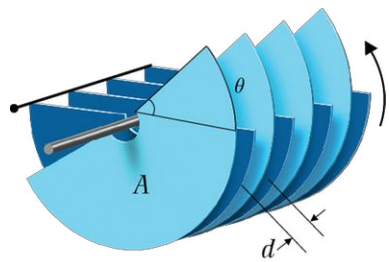


FIGURE 5.26 • Problème 39

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

5.1	**a.** $\Delta V_1/\Delta V_2 = 2$	Une fois que le condensateur est chargé, la différence de potentiel d'un condensateur est égale à celle de la pile.
	b. $Q_1/Q_2 = 2$	La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel.
	c. $C_1/C_2 = 1$	La capacité ne dépend ni de la charge ni de la différence de potentiel, mais des propriétés géométriques. Comme les condensateurs sont identiques, ils ont la même capacité.
5.2	**a.** U diminue.	La différence de potentiel du condensateur, $\Delta V_C = \mathcal{E}$, ne change pas à cause de la pile. L'énergie est $U = C\,(\Delta V_C)^2/2$, où $C = \epsilon_0 A/d$ pour un condensateur plan. Si d augmente, la capacité diminue et U diminue aussi.
	b. U augmente.	Avec l'ajout du diélectrique, la capacité augmente, donc U augmente aussi.
	c. U augmente.	Le condensateur n'est pas branché, alors la charge Q ne change pas. L'énergie est $U = Q^2/(2C)$. Si d augmente, C diminue, ce qui fait augmenter U.
	d. U diminue.	L'ajout du diélectrique fait augmenter C, donc U diminue, car $U = Q^2/(2C)$, et Q ne change pas.
5.3	**a.** $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3$	Pour des condensateurs branchés en parallèle, la différence de potentiel est la même.
	b. $Q_1 < Q_2 < Q_3$	La charge est $Q = C\,\Delta V$. Le condensateur qui a le moins de charge est celui qui a la plus petite capacité, car ΔV est la même pour des condensateurs branchés en parallèle.
5.4	**a.** $\Delta V_3 < \Delta V_2 < \Delta V_1$	Pour des condensateurs branchés en série, le condensateur qui a la plus petite différence de potentiel est celui avec la plus grande capacité, car $\Delta V = Q/C$, et la charge est la même pour tous les condensateurs en série.
	b. $Q_1 = Q_2 = Q_3$	Pour des condensateurs branchés en série, la charge est la même.

Chapitre 06

Le courant électrique

Buts du chapitre

Ce chapitre porte sur le mouvement des charges à l'intérieur des conducteurs, c'est-à-dire le courant électrique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de définir le courant électrique ;
- de développer un modèle microscopique du courant électrique ;
- de calculer la résistance d'un dispositif ;
- de calculer la puissance électrique d'un dispositif.

Préalables

Ce chapitre porte sur l'utilisation du concept d'énergie électrique et les propriétés des conducteurs. Revoyez :

- les propriétés des conducteurs, étudiées aux sections 1.3 et 3.5 ;
- les sources de potentiel électrique, décrites à la section 4.9 ;
- l'énergie potentielle électrique, présentée à la section 4.1 ;
- les condensateurs, étudiés à la section 5.1.

Un courant électrique circule dans un filament de tungstène, ce qui produit de la lumière.

La vie moderne est basée sur l'utilisation de l'énergie électrique pour faire fonctionner un grand nombre d'appareils. Les appareils de chauffage, les appareils ménagers et les appareils électroniques fonctionnent grâce au mouvement de charges électriques, qu'on appelle *courant électrique*.

Le mouvement de charges électriques est aussi très important pour les scientifiques. En biologie, le système nerveux d'un organisme correspond à des circuits électriques dans lesquels circulent des charges. Les ingénieurs électriciens conçoivent et installent un grand nombre de systèmes électriques, qui vont des réseaux de distribution électrique jusqu'aux systèmes de stockage de l'information. De même, les astronomes étudient le mouvement de charges qui viennent du Soleil et qui peuvent endommager les satellites et même les installations électriques à la surface de la Terre.

Dans les premiers chapitres de ce tome, nous avons étudié l'électrostatique, c'est-à-dire les charges électriques immobiles. Nous commençons maintenant l'étude des charges en mouvement. Par exemple, lorsqu'on branche une ampoule à une pile au moyen de fils conducteurs, le courant circule dans les fils et l'ampoule éclaire, comme le montre la photo au début du chapitre. Nous avons appris dans les chapitres précédents que les charges subissent une force électrique lorsqu'elles sont dans un champ électrique. Nous allons donc étudier de quelle façon un champ est produit dans un conducteur pour faire déplacer les charges.

Au niveau macroscopique, on obtient un courant dans un circuit lorsqu'on utilise une source de f.é.m., comme une pile, pour produire une différence de potentiel. Les matériaux et les différents dispositifs réagissent différemment lorsqu'une différence de potentiel est appliquée. Pour certains dispositifs, le courant est important ; pour d'autres, le courant est faible. Nous allons définir le concept de *résistance* pour caractériser ces dispositifs.

Lorsqu'on branche un appareil à une source de f.é.m., ce dernier transforme l'énergie électrique en une autre forme. Nous verrons comment calculer la puissance associée à une transformation d'énergie en fonction de la différence de potentiel appliquée et du courant qui circule dans l'appareil.

6.1 Le courant électrique

Pour étudier le courant électrique, on commence avec un condensateur chargé, comme le montre la figure 6.1a. On peut vérifier que des charges sont présentes sur chaque armature en approchant des isolants chargés comme dans les expériences de la section 1.1. Si on relie les deux armatures à l'aide d'un fil conducteur, le condensateur se décharge rapidement. Les charges se déplacent d'une armature à l'autre : un *courant électrique* est produit.

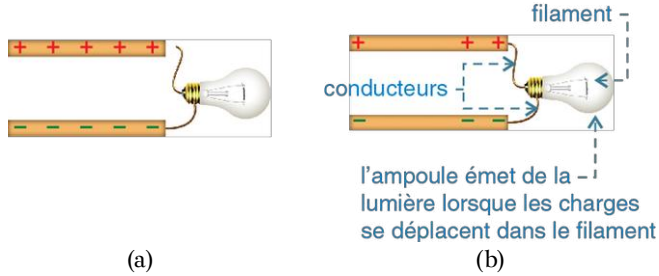


FIGURE 6.1
(a) Un condensateur chargé. (b) Lorsqu'on relie les armatures, un courant est produit.

Comment fait-on pour savoir qu'il y a eu un courant électrique dans le conducteur ? Plusieurs signes permettent de répondre à cette question : le fil conducteur peut devenir chaud, ce qui indique qu'une partie de l'énergie électrique s'est transformée en énergie thermique. Si on branche une ampoule, qui comprend un mince filament de tungstène (un conducteur), comme le montre la figure 6.1b, celle-ci émet de la lumière. En effet, lorsque le courant circule dans le filament, le tungstène devient suffisamment chaud pour émettre de la lumière visible. Une partie de l'énergie électrique s'est transformée en énergie lumineuse. Il existe aussi des appareils, appelés *ampèremètres* et symbolisés dans les circuits par —(A)—, qui permettent de mesurer le courant électrique.

Les porteurs de charge

Le condensateur de la figure 6.1 se décharge parce que les charges négatives sont attirées par les charges positives, et les deux types de charges se neutralisent lorsqu'elles se rencontrent. Au chapitre 1, on a indiqué que ce sont les électrons qui se déplacent dans les conducteurs et que les ions positifs sont fermement liés. Donc, si on relie les deux armatures du condensateur à l'aide d'un conducteur, des électrons se déplacent. Ce mouvement d'électrons représente le courant électrique.

Dans certaines situations, un courant électrique peut être le résultat d'un mouvement de charges positives et de charges négatives. C'est le cas par exemple dans une solution aqueuse, où les ions positifs et les ions négatifs sont libres de se déplacer. On appelle *porteurs de charge* les particules qui sont responsables de la conduction. Dans les conducteurs, les porteurs de charge sont des électrons. Dans le cas de la solution aqueuse, les porteurs de charge sont les ions positifs et les ions négatifs.

Le courant i (aussi appelé l'*intensité du courant*) représente la charge nette qui traverse une surface par unité de temps :

$$i \equiv \left| \frac{Q_{\text{net}}}{\Delta t} \right| . \tag{6.1}$$

Dans le système international, le courant se mesure en ampères (A), en l'honneur du physicien français André-Marie Ampère (1775-1836). Cette unité est l'une des unités de base du SI. Nous verrons la définition précise de cette unité au chapitre 9. Selon l'équation 6.1, le coulomb est relié à l'ampère :

$$1\ \text{A} = 1\ \text{C/s} \Rightarrow 1\ \text{C} = 1\ \text{A} \cdot \text{s} . \tag{6.2}$$

Étant donné qu'un coulomb représente une charge importante, un courant d'un ampère représente un courant assez important. Dans les circuits, on utilise couramment le milliampère ($1\ \text{mA} = 1 \times 10^{-3}\ \text{A}$) et le microampère ($1\ \mu\text{A} = 1 \times 10^{-6}\ \text{A}$).

On donne aussi un sens au courant, selon le sens du mouvement des porteurs de charge.

Sens du courant

Le sens du courant électrique correspond au sens du déplacement des porteurs de charge positive ou au sens opposé du mouvement des porteurs de charge négative. On indique le sens du courant par une flèche.

Dans la figure 6.2 (*voir la page suivante*), si on suppose que les charges sont des protons ou des électrons, il y a trois charges positives qui se déplacent vers la droite ($Q_+ = +3e$) et une charge négative qui se déplace vers la gauche ($Q_- = -e$). La charge nette qui traverse la surface est $Q_{\text{net}} = 3e - (-e) = 4e$, et le courant est vers la droite.

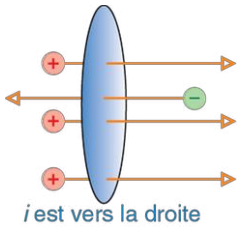


FIGURE 6.2
Le déplacement des charges correspond à un courant à travers la surface.

L'équation 6.1 montre qu'un courant est le résultat d'un déplacement d'une charge nette. Lorsque de l'eau circule dans un tuyau, un grand nombre de protons et d'électrons se déplacent. Le courant électrique est quand même nul, car il y a autant de protons que d'électrons. De même, dans un conducteur isolé, les électrons de conduction se déplacent à grande vitesse dans tous les sens à cause de l'agitation thermique. Il y a autant d'électrons qui se déplacent vers la gauche que d'électrons qui se déplacent vers la droite. Le courant est nul.

Lorsque le courant varie dans le temps, on doit prendre la limite $\Delta t \to 0$ dans l'équation 6.1 pour trouver la valeur instantanée du courant. On obtient la définition générale du courant électrique à l'aide de la dérivée :

Courant électrique

$$i \equiv \left| \frac{dq}{dt} \right| . \tag{6.3}$$

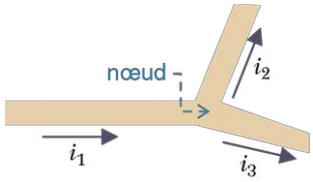


FIGURE 6.3
Le courant électrique est conservé à un nœud.

Il est tentant d'écrire le courant comme un vecteur, car il est caractérisé par une valeur positive et une orientation. Cependant, le courant n'obéit pas à l'algèbre vectorielle, comme le montre la figure 6.3. Dans cette figure, un conducteur se divise en deux conducteurs. Le point de jonction est appelé un *nœud*. Les charges provenant du conducteur de gauche et qui arrivent au nœud peuvent continuer soit dans le conducteur du haut, soit dans le conducteur du bas (elles ne peuvent pas s'accumuler au nœud). Puisque le courant électrique correspond au nombre de charges qui passent vis-à-vis d'un point, le courant doit être conservé parce que la charge est conservée :

$$i_1 = i_2 + i_3 . \tag{6.4}$$

L'addition des courants est une simple somme algébrique. L'addition de vecteurs donnerait un résultat différent. L'équation 6.4 est un exemple de la *loi des nœuds* :

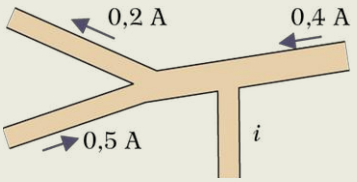
Loi des nœuds

La somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui quittent ce nœud.

Cette loi sera très utile au chapitre 7 dans l'analyse de circuits complexes.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.1

La figure suivante présente les courants dans des conducteurs. Indiquez la valeur et le sens du courant i dans le conducteur vertical.



La vitesse de dérive

Les électrons de conduction se comportent comme les atomes d'un gaz. Ils se déplacent de façon désordonnée, à une très grande vitesse. Le mouvement résultant est nul, car autant d'électrons se déplacent vers la gauche que d'électrons vers la droite. Lorsqu'un courant circule dans un conducteur, il y a un

mouvement ordonné des électrons, qui se déplacent tous à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_d$, la vitesse de dérive, en plus du mouvement désordonné.

La figure 6.4 montre une section d'un fil conducteur dont l'aire transversale est A. Dans la figure, on a illustré uniquement la vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$. Ce mouvement engendre un courant en sens opposé à la vitesse de dérive, car les électrons ont une charge négative. Durant un temps Δt, les électrons se déplacent d'une distance $\ell = v_d \Delta t$. Pour obtenir la charge qui traverse une section transversale du fil, on doit compter le nombre d'électrons dans un volume $V = A\ell$. Si n représente le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, alors il y a $n(A\ell)$ électrons dans la longueur ℓ. En multipliant par la charge de chaque électron ($q = -e$), on obtient la charge négative qui traverse une section du fil en un temps Δt :

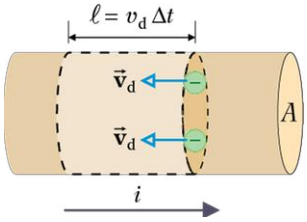


FIGURE 6.4
Dans un conducteur, des électrons se déplacent d'une distance ℓ durant un intervalle de temps Δt. Le courant est opposé à $\vec{\mathbf{v}}_d$.

$$Q_- = -e(nA\ell) = -enAv_d \Delta t \ .$$

Le courant est donc

$$i = \left| \frac{Q_{net}}{\Delta t} \right| = nev_d A \ , \tag{6.5}$$

et le sens du courant est opposé au sens de la vitesse $\vec{\mathbf{v}}_d$.

Le nombre d'électrons de conduction par unité de volume (n) est aussi appelé la *densité de porteurs de charge*. La valeur de n est une propriété du conducteur. Nous verrons au chapitre 9 la façon de mesurer ce paramètre. Pour l'instant, on peut poser l'hypothèse que les conducteurs ont un électron de conduction par atome. La densité de porteurs de charge est alors égale au nombre d'atomes par unité de volume, qui peut être calculé à partir de la masse volumique et de la masse molaire du matériau (*voir l'annexe F pour obtenir les valeurs*). En effet,

$$\frac{\text{nombre d'atomes}}{\text{volume}} = \frac{\text{nombre d'atomes}}{\text{mole}} \times \frac{\text{nombre de moles}}{\text{masse}} \times \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$$

$$n = \frac{N_A \rho_m}{M} \ , \tag{6.6}$$

où $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ est le nombre d'Avogadro, ρ_m est la masse volumique du conducteur et M, sa masse molaire.

Dans l'équation 6.5, A est une propriété du fil, n est une propriété du matériau et e, une propriété des porteurs de charge. Pour un fil donné, seul le module de la vitesse de dérive peut être modifié pour changer le courant dans le fil. Nous verrons dans la prochaine section que la vitesse de dérive dépend directement du champ électrique présent dans le conducteur.

On définit la *densité de courant* J comme le courant par unité d'aire :

$$J \equiv \frac{i}{A} \ . \tag{6.7}$$

Module de la densité de courant

Dans le SI, la densité de courant se mesure en A/m^2.

Selon l'équation 6.5, la densité de courant dans un fil est

$$J = nev_d \ . \tag{6.8}$$

L'équation 6.8 montre que la densité de courant est une fonction des propriétés du conducteur (par la densité de porteurs de charge) et de la vitesse de dérive. De plus, la densité de courant est une fonction locale qui peut être définie pour chaque point du conducteur. Il est alors possible de définir le vecteur densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$, qui est proportionnel à la vitesse de dérive. De façon générale, pour des porteurs de charge dont la charge est q, la densité de courant est

$$\vec{\mathbf{J}} = nq\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} \,. \tag{6.9}$$

Pour les conducteurs, la charge des porteurs de charge (les électrons) est $q = -e$, et la densité de courant est opposée à la vitesse de dérive.

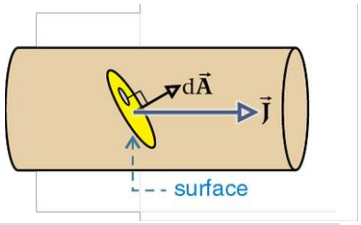


FIGURE 6.5
Le calcul du courant qui traverse une surface

L'équation 6.7 est valable pour une densité de courant uniforme et une surface perpendiculaire à la vitesse des porteurs de charge. Dans certaines situations, les porteurs de charge ne sont pas distribués uniformément dans le conducteur. Ceci produit une densité de courant non uniforme, qui varie en fonction de la position dans le conducteur. Pour calculer le courant qui traverse une surface quelconque (pas nécessairement perpendiculaire au déplacement des porteurs de charge), on doit diviser la surface en éléments de surface $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$, perpendiculaires à la surface (*voir la figure 6.5*). Le courant correspond alors au flux de la densité de courant à travers la surface :

$$i = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \,. \tag{6.10}$$

Si la surface est perpendiculaire à la densité de courant (donc $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ est parallèle à $\vec{\mathbf{J}}$) et que celle-ci est uniforme, l'équation 6.10 implique que

$$i = \int_{\text{surface}} J \, \mathrm{d}A \cos(0°) = J \int_{\text{surface}} \mathrm{d}A = J\,A \,,$$

ce qui est équivalent à l'équation 6.7.

EXEMPLE 6.1 La vitesse de dérive dans le cuivre

Un fil de cuivre a un diamètre de 2,59 mm. Il est parcouru par un courant de 500 mA. Quel est le module de la vitesse de dérive des électrons à l'intérieur du fil de cuivre ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La masse volumique et la masse molaire du cuivre sont présentées à l'annexe F. Un fil est un cylindre ; l'aire transversale est $A = \pi R^2 = \pi d^2/4$, où d est le diamètre du fil. Nous exprimons toutes les données dans le SI.

Connues	Inconnue
$\rho_{\mathrm{m}} = 8{,}920 \times 10^3 \ \mathrm{kg/m^3}$	v_{d}
$d = 2{,}59 \times 10^{-3} \ \mathrm{m}$	
$M = 63{,}546 \times 10^{-3} \ \mathrm{kg/mol}$	
$i = 0{,}500 \ \mathrm{A}$	

Identifier la clé

La clé est l'équation 6.5 :

$$i = nev_{\mathrm{d}}A \Rightarrow v_{\mathrm{d}} = \frac{i}{neA} = \frac{4i}{\pi ned^2} \,, \tag{i}$$

où n est la densité de porteurs de charge, donnée par l'équation 6.6 :

$$n = \frac{N_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{m}}}{M} \,. \tag{ii}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord n à l'aide de l'équation (ii) :

$$n = \frac{6{,}022 \times 10^{23} \ \mathrm{mol^{-1}} \times 8{,}920 \times 10^3 \ \mathrm{kg/m^3}}{63{,}546 \times 10^{-3} \ \mathrm{kg/mol}}$$
$$= 8{,}453 \times 10^{28} \ \mathrm{m^{-3}} \,. \tag{iii}$$

Nous remplaçons ensuite ce résultat dans l'équation (i) :

$$v_d = \frac{4 \times 0{,}500}{\pi\,(8{,}453 \times 10^{28})(1{,}602 \times 10^{-19})(0{,}002\,59)^2}$$
$$= 7{,}01 \times 10^{-6}\ \text{m/s} = 7{,}01\ \mu\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
La réponse semble être très faible, mais elle représente bien la réalité. La vitesse de dérive des électrons dans un conducteur est très, très faible.

EXEMPLE 6.2 Un courant non uniformément distribué

Un fil de 8,25 mm de diamètre est parcouru par un courant. La densité de courant est parallèle au fil, et elle est proportionnelle à la distance par rapport au centre du fil : $J = 240\ \text{A/m}^3\ r$. Calculez le courant qui traverse ce fil.

SOLUTION

Illustrer la situation
La figure 6.6 montre le fil et l'élément de surface selon une vue de côté et selon une vue de face. Comme la densité de courant dépend de la distance r par rapport au centre du fil, l'élément $d\vec{\mathbf{A}}$ choisi est un petit anneau qui a un rayon r et une épaisseur dr.

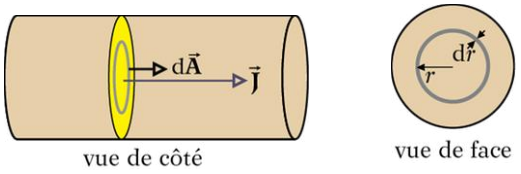


FIGURE 6.6
Le schéma de la situation pour l'exemple 6.2

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$J = 240\ \text{A/m}^3\ r$	i
$d = 8{,}25\ \text{mm}$	

L'aire de l'anneau est $dA = 2\pi r\ dr$, car cela correspond à un cercle ayant une petite épaisseur dr. L'élément $d\vec{\mathbf{A}}$ est parallèle à la densité de courant.

Identifier la clé
La **clé** est l'équation 6.10 :

$$i = \int_{\text{fil}} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_0^{d/2} J\,(2\pi r)\,dr\,\cos(0°)\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème
Nous remplaçons J dans l'équation (i) et nous calculons l'intégrale :

$$i = 240 \times 2\pi \int_0^{d/2} r^2\,dr = 480\ \text{A/m}^3 \pi \frac{r^3}{3}\Big|_{0\ \text{m}}^{4{,}125 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 480\ \text{A/m}^3\ \pi\ \frac{(4{,}125 \times 10^{-3}\ \text{m})^3}{3} = 3{,}53 \times 10^{-5}\ \text{A}$$
$$i = 35{,}3\ \mu\text{A}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
Nous obtenons les bonnes unités.

6.2 Le champ électrique et la conduction

Le courant électrique dans les conducteurs est le résultat du mouvement cohérent des électrons. Durant leur déplacement, les électrons entrent en collision avec les atomes. Pour continuer de se déplacer, ils doivent subir une force, exercée par un champ électrique. Un champ électrique est nécessaire pour qu'un courant circule dans un conducteur.

Revenons à la situation décrite à la section 6.1, où les armatures d'un condensateur chargé sont reliées par des conducteurs. La figure 6.7 (*voir la page suivante*) montre le circuit avant que les branchements soient terminés. Les charges se distribuent à la surface de chacun des conducteurs de telle sorte que le champ résultant est nul à l'intérieur. La distribution de charges à la surface de chacun des fils est uniforme, à l'exception des extrémités.

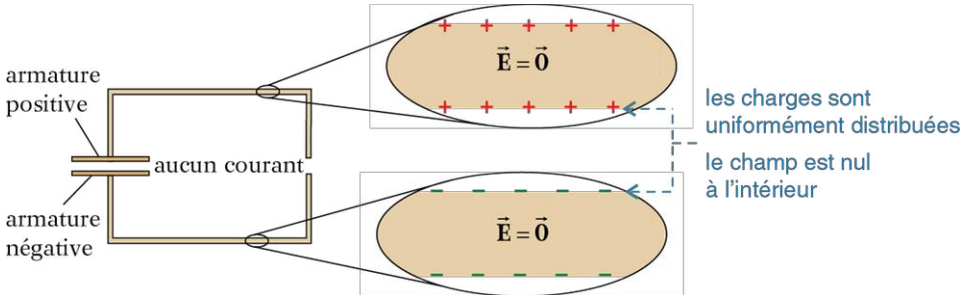


FIGURE 6.7
Les conducteurs ne sont pas reliés. Dans chaque conducteur, la charge est uniformément distribuée et le champ électrique est nul. Il n'y a pas de courant.

Lorsqu'on relie les deux conducteurs, les électrons près de l'extrémité de du conducteur sont libres de neutraliser les ions positifs près de l'extrémité de l'autre conducteur. Après un intervalle de temps très court, les électrons du conducteur se sont déplacés très légèrement, de telle sorte que la charge n'est plus uniformément distribuée, comme le montre la figure 6.8. Il y a beaucoup de charges positives près de l'armature positive du condensateur, la charge diminue graduellement jusqu'à zéro près du centre et est de plus en plus négative en allant vers l'armature négative. La distribution de charges non uniforme à la surface des conducteurs produit un **champ électrique de module uniforme** et parallèle au conducteur à l'intérieur de celui-ci. C'est ce champ qui exerce une force sur les électrons de conduction et engendre le courant électrique à l'intérieur du conducteur.

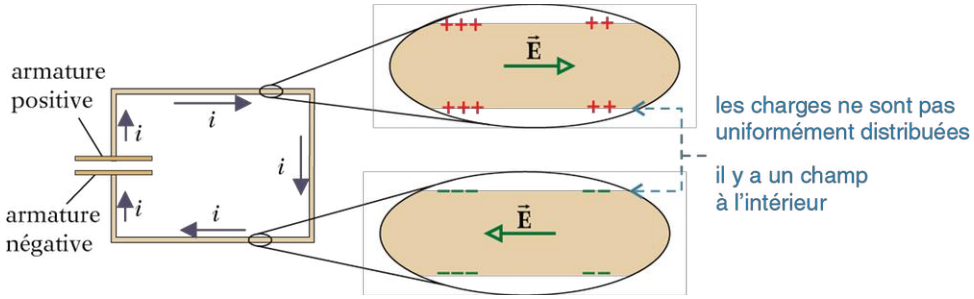


FIGURE 6.8
En reliant les conducteurs, la charge n'est plus uniformément distribuée, et il y a un champ électrique dans les conducteurs, qui engendre un courant entre l'armature positive et l'armature négative.

Le champ électrique apparaît très rapidement à l'intérieur du conducteur et se propage à la vitesse de la lumière. Les électrons de conduction se mettent en mouvement simultanément (on néglige ici le temps pour que le champ électrique se propage). Ce phénomène se produit dans tout le circuit en même temps, de telle sorte qu'à un instant donné, le courant i **est le même partout dans le circuit.** Si ce n'était pas le cas, il y aurait une accumulation d'électrons à un point particulier, ce qui changerait le champ électrique de telle sorte que l'accumulation de charges disparaîtrait. Cela signifie aussi que le module du champ est uniforme à un instant donné dans le conducteur.

Un modèle simple de la conduction

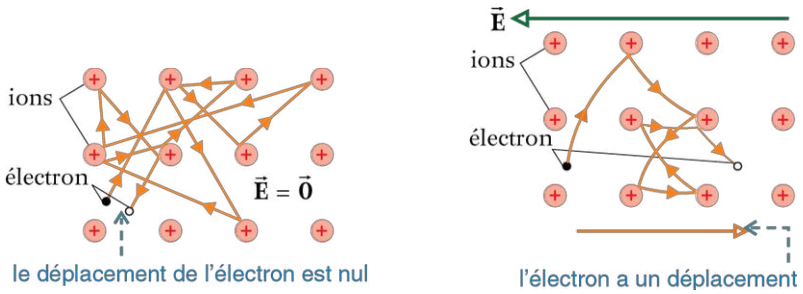
Le mouvement des électrons de conduction est causé par le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du conducteur. Le module du champ est uniforme dans tout le

conducteur, et il exerce une force $\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}}$ sur tous les électrons de conduction. Le résultat est un mouvement des électrons à une vitesse constante $\vec{\mathbf{v}}_d$ et un courant électrique i partout dans le conducteur. On peut obtenir une relation entre le champ appliqué et le courant dans un conducteur, en utilisant un modèle microscopique simple du mouvement des électrons. On suppose que les électrons de conduction se déplacent dans le conducteur et qu'ils entrent en collision avec les ions positifs du conducteur.

En l'absence de champ électrique, un électron de conduction se déplace à une très grande vitesse $\vec{\mathbf{v}}_{th}$ de l'ordre de 10^5 m/s, à cause de l'agitation thermique (l'indice th veut dire «thermique»). L'électron subit un très grand nombre de collisions chaque seconde. Après chacune d'elles, la vitesse de l'électron est orientée de façon aléatoire. On peut dire qu'à chaque collision, l'électron «oublie» sa vitesse avant la collision. Entre deux collisions, l'électron se déplace en ligne droite. Après un certain nombre de collisions, le déplacement de l'électron est nul, comme le montre la figure 6.9a. Si on calcule la vitesse moyenne de tous les électrons, on obtient un résultat nul. Il y a autant d'électrons qui se déplacent vers la gauche que vers la droite, et le courant électrique est nul.

À la figure 6.9b, un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ est orienté vers la gauche. Entre deux collisions, un électron subit une accélération vers la droite, selon la deuxième loi de Newton :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m} = \frac{-e\vec{\mathbf{E}}}{m}. \tag{6.11}$$



(a) (b)

FIGURE 6.9
Dans un conducteur, l'électron subit un grand nombre de collisions.

La trajectoire de l'électron entre deux collisions n'est plus une ligne droite mais une parabole. La vitesse après un temps t est

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{th} + \vec{\mathbf{a}}t = \vec{\mathbf{v}}_{th} - \frac{e\vec{\mathbf{E}}t}{m}, \tag{6.12}$$

où $\vec{\mathbf{v}}_{th}$ est la vitesse aléatoire due à l'agitation thermique.

On peut calculer la vitesse moyenne des électrons après un grand nombre de collisions en calculant la moyenne de l'équation 6.12 pour tous les électrons. La moyenne de $\vec{\mathbf{v}}_{th}$ est nulle, comme c'est le cas lorsque le champ électrique est nul. Le deuxième terme est commun à tous les électrons. En effet, tous les électrons acquièrent une vitesse dans le sens opposé du champ électrique. Soit τ le temps

moyen entre deux collisions. Alors, la vitesse moyenne des électrons, qu'on appelle la *vitesse de dérive*, est

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} = -\frac{e\tau}{m}\vec{\mathbf{E}}\,. \tag{6.13}$$

Le signe négatif indique que la vitesse de dérive est opposée au champ, car l'électron est une particule de charge négative.

Dans l'exemple 6.1, nous avons obtenu une vitesse de dérive des électrons ayant un module de l'ordre de 10^{-6} m/s, ce qui est beaucoup plus faible que le module de la vitesse thermique (de l'ordre de 10^{5} m/s). Le module de la vitesse d'un électron entre deux collisions est donc à peu près le même avec ou sans champ électrique. Le temps moyen τ entre deux collisions n'est pas modifié lorsqu'il y a un champ électrique. Ceci implique que le temps moyen entre deux collisions ne dépend pas du champ électrique. L'équation 6.13 implique alors que la vitesse de dérive est proportionnelle au champ électrique, car les facteurs e, τ et m ne changent pas lorsque le champ électrique change.

On peut maintenant exprimer la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ en fonction du champ électrique. Selon l'équation 6.9, $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} = -\vec{\mathbf{J}}/(ne)$, et l'équation 6.13 peut s'écrire

$$-\frac{\vec{\mathbf{J}}}{ne} = -\frac{e\tau}{m}\vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{J}} = \left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)\vec{\mathbf{E}}\,, \tag{6.14}$$

où n est la densité de porteurs de charge, e est la charge élémentaire et m, la masse de l'électron. Selon le modèle simple de la conduction, la densité de courant est proportionnelle au champ électrique présent dans le conducteur.

À chaque collision, l'électron donne une partie de son énergie cinétique aux ions positifs, de façon désordonnée. L'énergie électrique emmagasinée dans le champ électrique se transforme en énergie thermique. Un conducteur parcouru par un courant électrique devient chaud.

La conductivité et la résistivité

Dans le cas de conducteurs, l'expression entre parenthèses de l'équation 6.14 est une propriété du conducteur ; la densité de courant (et donc le courant) est proportionnelle au champ électrique : si le champ électrique double, la densité de courant double. La constante de proportionnalité est appelée la *conductivité* σ du matériau. Selon le modèle simple de la conduction,

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}\,. \tag{6.15}$$

De façon générale, on définit la conductivité d'un matériau (qu'il soit conducteur ou non) comme le rapport entre le module de la densité de courant et le module du champ électrique :

$$\sigma \equiv \frac{J}{E}\,. \tag{6.16}$$

Pour un champ électrique fixe, on obtient une plus grande densité de courant (et donc un courant plus intense) si la densité de porteurs de charge est grande et si le temps entre deux collisions est long. Dans le cas de bons conducteurs,

la conductivité est grande alors que dans le cas de mauvais conducteurs, la conductivité est plus faible. Pour un isolant comme le verre, la densité de porteurs de charge est très, très faible (il y a très peu d'électrons de conduction), ce qui implique une conductivité très faible.

De façon usuelle, on utilise plutôt la résistivité ρ du matériau, définie comme l'inverse de la conductivité :

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} . \tag{6.17}$$

Selon le modèle de la conduction, la résistivité est

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} . \tag{6.18}$$

Dans ce cas, les meilleurs conducteurs ont une résistivité faible. Dans le SI, la résistivité se mesure en $\text{V} \cdot \text{m/A} = \Omega \cdot \text{m}$, où l'unité $\Omega = \text{V/A}$ est appelée ohm et sera définie à la section 6.4. Le tableau 6.1 donne les valeurs pour quelques métaux. Ce tableau est aussi présenté à l'annexe C.

Le résultat du modèle simple de la conduction est que la densité de courant est directement proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{\mathbf{J}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}} . \tag{6.19}$$

Loi d'Ohm (version microscopique)

La dernière équation est la version microscopique de la loi d'Ohm (nous verrons bientôt la forme plus courante de la loi d'Ohm). Cette relation linéaire est valable dans le cas de conducteurs dans lesquels le champ électrique n'est pas trop intense.

MISE EN GARDE

Les symboles pour exprimer la résistivité et la conductivité sont les mêmes que pour la charge volumique et la charge surfacique, utilisées en électrostatique. Vous devez bien faire la différence entre ces quantités, selon le contexte.

TABLEAU 6.1

La résistivité (ρ) et le coefficient thermique de résistivité (α) de quelques métaux à 20 °C. L'unité $\Omega \cdot \text{m}$ est équivalente à $\text{V} \cdot \text{m/A}$.

Matériau	ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	α (K^{-1})
Aluminium	$2{,}65 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Argent	$1{,}59 \times 10^{-8}$	$3{,}8 \times 10^{-3}$
Cuivre	$1{,}68 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Fer	$8{,}57 \times 10^{-8}$	$5{,}0 \times 10^{-3}$
Laiton	$6{,}08 \times 10^{-8}$	$2{,}0 \times 10^{-3}$
Nichrome	$1{,}08 \times 10^{-6}$	4×10^{-4}
Nickel	$6{,}93 \times 10^{-8}$	$5{,}9 \times 10^{-3}$
Or	$2{,}21 \times 10^{-8}$	$3{,}4 \times 10^{-3}$
Platine	$1{,}05 \times 10^{-7}$	$3{,}92 \times 10^{-3}$
Plomb	$1{,}92 \times 10^{-7}$	$4{,}3 \times 10^{-3}$
Tungstène	$5{,}28 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$

EXEMPLE 6.3 Le champ dans un fil d'aluminium

Un courant de 2,0 A circule dans un fil d'aluminium dont le diamètre est de 1,7 mm.

a. Quel est le module du champ électrique dans le fil ?

b. Quel est le temps moyen entre deux collisions pour un électron ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Nous avons besoin des données du tableau 6.1 ainsi que de valeurs présentées dans l'annexe F.

Connues	Inconnues
$R = \frac{1,7 \text{ mm}}{2} = 0,85 \text{ mm}$	E
$i = 2,0 \text{ A}$	τ
$\rho = 2,65 \times 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{m/A}$	
$\rho_m = 2\,700 \text{ kg/m}^3$	
$M = 26,982 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$	
$m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	
$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	
$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la loi d'Ohm (l'équation 6.19) qui relie le champ électrique et la densité de courant :

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}}{\rho} .$$

Nous cherchons seulement le module du champ. Alors,

$$E = \rho J = \rho \frac{i}{A} = \frac{\rho i}{\pi R^2} , \qquad \text{(i)}$$

avec l'équation 6.7 reliant le courant et la densité de courant.

Résoudre le problème

En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$E = \frac{2,65 \times 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{m/A} \times 2,0 \text{ A}}{\pi (0,85 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$
$$= 0,023\,6 \text{ V/m} = 24 \text{ mV/m} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 6.18 :

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2\rho} , \qquad \text{(ii)}$$

où n est la densité de porteurs de charge, donnée par l'équation 6.6, si nous supposons que l'aluminium a un électron de conduction par atome :

$$n = \frac{\rho_m N_A}{M} . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

La densité de porteurs de charge est

$$n = \frac{2700 \text{ kg/m}^3 \times 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{26,982 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}$$
$$= 6,026 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} . \qquad \text{(iv)}$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (iii) :

$$\tau = \frac{9,109 \times 10^{-31}}{6,026 \times 10^{28} (1,602 \times 10^{-19})^2 \, 2,65 \times 10^{-8}}$$
$$\tau = 2,22 \times 10^{-14} \text{ s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module du champ électrique obtenu est très faible. Il est équivalent au champ électrique à une distance de 0,25 mm d'un électron, ce qui indique qu'un très petit champ est suffisant pour générer un courant important. Le temps entre deux collisions est très faible, ce qui est le résultat attendu.

6.3 La résistivité et la température

Les conducteurs

La résistivité des conducteurs dépend de la température, car si cette dernière augmente, les électrons ont une vitesse thermique plus grande. Ainsi, le temps moyen entre deux collisions diminue, ce qui fait augmenter la résistivité, selon

l'équation 6.18 du modèle simple de la conduction. Le modèle est trop rudimentaire pour donner précisément la relation entre la température et la résistivité. Pour obtenir cette relation, le modèle doit tenir compte de la nature ondulatoire des électrons selon la mécanique quantique; nous reparlerons de la mécanique quantique dans le tome 3.

Il est possible de mesurer la variation de la résistivité des métaux lorsque la température change. Pour un grand éventail de températures éloignées du zéro absolu, la résistivité augmente approximativement de façon linéaire lorsque la température augmente, comme le montre la figure 6.10. Si on connaît la résistivité ρ_0 à une température T_0, alors la résistivité ρ à une température T est

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]. \tag{6.20}$$

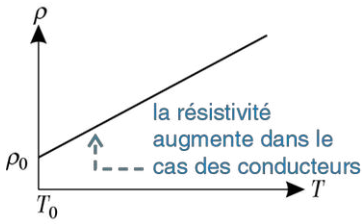


FIGURE 6.10
La résistivité d'un conducteur en fonction de la température

Le facteur α est le *coefficient thermique de la résistivité*. C'est une propriété du matériau, comme la résistivité. Dans le SI, α se mesure en K^{-1}, c'est-à-dire l'inverse de l'unité de température. Le tableau 6.1 de la page 199 donne les valeurs approximatives du coefficient thermique de résistivité pour quelques métaux. Ce tableau est aussi présenté à l'annexe C.

REMARQUE

Dans l'équation 6.20, on a besoin d'une variation de température $\Delta T = T - T_0$. Dans le SI, un écart de 1 K correspond à un écart de 1 °C. On peut donc utiliser directement des températures exprimées en degrés Celsius plutôt qu'en kelvins.

Les semi-conducteurs

Au chapitre 1, nous avons séparé les matériaux en deux classes : les isolants et les conducteurs. Dans les conducteurs, certains électrons sont faiblement liés. Avec une petite quantité d'énergie, ils quittent leurs atomes et deviennent des électrons de conduction. La charge peut se déplacer facilement, c'est-à-dire que ces matériaux ont une résistivité très faible. Un petit champ électrique produit facilement un courant électrique, car les conducteurs possèdent un grand nombre d'électrons de conduction libres de se déplacer à l'intérieur du conducteur.

Dans le cas des isolants, les électrons sont tous liés fortement aux atomes. L'énergie nécessaire pour qu'un électron quitte son atome est très élevée. Il est possible d'appliquer le modèle de la conduction aux isolants. La résistivité est donnée par l'équation 6.18 :

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}.$$

Dans le cas des isolants, la densité de porteurs de charge n est très faible, ce qui produit une très grande résistivité, au-dessus de 10^{10} V · m/A. La conduction est négligeable, même avec un champ électrique relativement intense.

Certains matériaux, comme le silicium et le germanium, ont une résistivité intermédiaire entre les isolants et les conducteurs. Ce sont des *semi-conducteurs*. Dans le cas de ces matériaux, les électrons de valence ont besoin d'une quantité d'énergie relativement faible pour quitter leurs atomes. À très faible température, les électrons sont liés, et un semi-conducteur se comporte comme un isolant. Lorsque la température augmente, l'énergie thermique devient suffisante pour que certains électrons de valence deviennent des électrons de conduction. Un

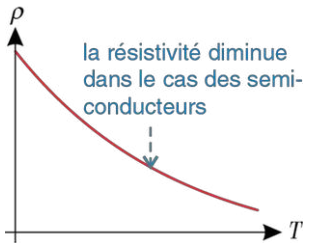


FIGURE 6.11
La résistivité d'un semi-conducteur en fonction de la température

certain nombre d'électrons sont disponibles pour la conduction. Si on applique le modèle de la conduction aux semi-conducteurs, on s'aperçoit que la densité de porteurs de charge augmente avec la température, ce qui fait diminuer la résistivité. La figure 6.11 illustre le graphique de la résistivité en fonction de la température. Ce comportement est très différent de celui des conducteurs; dans ce cas, la résistivité augmente avec la température à cause de la diminution du temps moyen τ entre deux collisions.

Les semi-conducteurs sont très importants dans le domaine de l'électronique et de l'informatique. Ceci vient du fait qu'il est possible de contrôler les propriétés des semi-conducteurs en ajoutant de très faibles quantités d'impuretés. C'est ce qu'on appelle le *dopage*. Ces impuretés modifient la densité de porteurs de charge et donc la résistivité.

La supraconductivité

La résistivité d'un métal augmente lorsqu'on augmente la température. À l'inverse, la résistivité diminue lorsqu'on refroidit un conducteur. Si on refroidit ce dernier à des températures qui s'approchent du zéro absolu (T = 0 K = –273,15 °C), que va-t-il arriver à la résistivité? Selon le modèle de la conduction, il y a deux possibilités contraires: en diminuant la température, cela augmente le temps moyen entre deux collisions et la résistivité devrait diminuer graduellement jusqu'à zéro. Par contre, en diminuant la température, l'énergie thermique ne sera plus suffisante pour que les électrons de valence quittent leur atome; la densité de porteurs de charge devrait diminuer, ce qui produirait une résistivité de plus en plus grande.

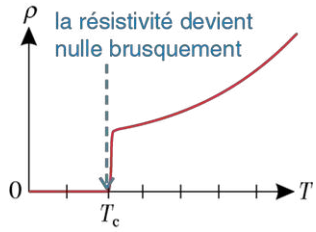


FIGURE 6.12
Un matériau devient supraconducteur lorsque sa résistivité tombe à zéro.

C'est en 1911 que le physicien néerlandais Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) et son équipe ont développé les techniques nécessaires pour produire de l'hélium liquide et refroidir les métaux à de très faibles températures. Ils ont observé que la résistivité du mercure tombe à zéro brusquement lorsque la température est plus faible qu'une *température critique* de 4,2 K, comme le montre la figure 6.12. Le mercure est alors *supraconducteur*. Un courant électrique peut circuler de façon continue dans un supraconducteur en l'absence de champ électrique, car il n'y a pas de perte d'énergie par collision. Un champ électrique est uniquement essentiel pour amorcer le mouvement des électrons de conduction.

Depuis 1911, on a découvert plusieurs matériaux supraconducteurs: des métaux mais aussi des composés. Il faut toujours une très faible température, près de 0 K, pour que ces matériaux deviennent supraconducteurs. De plus, ce ne sont pas tous les matériaux qui deviennent supraconducteurs. La résistivité d'un supraconducteur en fonction de la température est présentée dans le graphique de la figure 6.12, mais avec une température critique différente de celle du mercure. En 1986, des chercheurs ont mis au point des céramiques à base d'oxyde de cuivre qui deviennent supraconductrices à une température critique autour de 90 K. Cette température est très basse, mais on peut l'atteindre en refroidissant la substance avec de l'azote liquide, qui est beaucoup moins cher à produire que l'hélium liquide. Nous reparlerons des supraconducteurs et des aimants au chapitre 9.

Le modèle de la conduction n'est pas du tout valide à basse température. Pour comprendre le comportement des supraconducteurs, il faut prendre en compte le comportement ondulatoire des électrons. Dans le cas des métaux comme le

mercure près du zéro absolu, il est possible d'expliquer le comportement supraconducteur en supposant que les électrons se déplacent en paires, ce qui élimine complètement les collisions. Pour les supraconducteurs à haute température, les physiciens théoriciens sont toujours à la recherche d'une théorie qui explique correctement ce comportement.

Il est encore très onéreux d'utiliser les supraconducteurs, car il faut les garder à une très basse température. Ces derniers servent à produire les aimants les plus puissants du monde. On verra au chapitre 8 qu'un champ magnétique est créé par un courant. Comme la résistivité d'un supraconducteur est nulle, il est possible d'obtenir un courant d'une importance considérable dans des fils supraconducteurs, ce qui engendre un très grand champ magnétique. Des aimants supraconducteurs ont permis de développer les appareils d'imagerie médicale basée sur la résonance magnétique. Les aimants supraconducteurs sont aussi essentiels dans le plus grand accélérateur de particules au monde, le *Grand collisionneur de hadrons* (le LHC) au laboratoire de l'Organisation européenne pour la recherche nucléaire (CERN) en Suisse, pour guider les particules chargées le long d'un anneau de 27 km de circonférence. La figure 6.13 montre un câble supraconducteur utilisé au CERN.

FIGURE 6.13
À l'occasion de l'exposition Microcosme du CERN, on a comparé le diamètre d'un câble traditionnel à celui d'un câble supraconducteur pouvant transporter un courant de 12 500 A.

6.4 Le courant dans les fils conducteurs

Nous avons choisi l'exemple d'un condensateur comme source d'énergie électrique lorsque nous avons étudié la conduction dans les sections 6.1 et 6.2, car il permet de comprendre facilement le mouvement des électrons dans tout le circuit. Cependant, le courant dans un circuit comportant un condensateur diminue rapidement, car il n'y a qu'une certaine quantité de charges sur chaque armature. Le condensateur possède une certaine énergie électrique qui est transformée rapidement. La plupart des circuits utilisent plutôt une pile ou une autre source de f.é.m. pour fournir de l'énergie électrique et produire un courant continu, c'est-à-dire constant. Nous allons maintenant étudier la conduction lorsqu'une pile est branchée à un conducteur.

À la section 4.9, nous avons vu que dans une pile, un travail est fait sur des ions, ce qui transforme de l'énergie chimique en énergie électrique. La f.é.m. ($\mathcal{E}$) représente le travail par unité de charge déplacée dans la pile. Il y a alors des charges positives accumulées sur la borne positive et des charges négatives sur la borne négative de la pile. La différence de potentiel entre les deux bornes est $\Delta V_{\text{pile}} = \mathcal{E}$ dans le cas d'une pile idéale.

Si on relie les bornes par un conducteur, la différence de potentiel provoque un déplacement des charges à la surface du conducteur, équivalent à ce qui se passe à la figure 6.8 de la page 196 ; un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est produit à l'intérieur du conducteur, comme le montre la figure 6.14. À son tour, le champ engendre un courant électrique. On peut donc dire que c'est la pile qui est la cause du courant dans le conducteur.

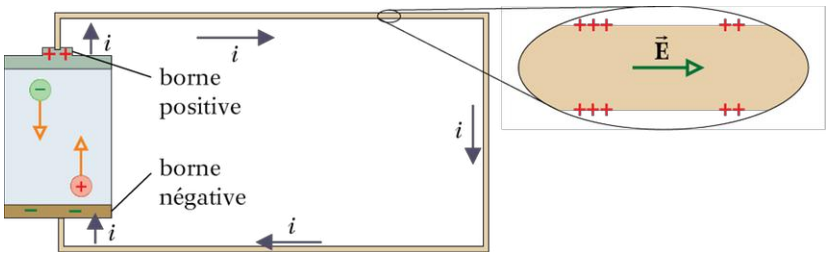


FIGURE 6.14
Un conducteur est branché aux bornes d'une pile. Ceci produit un champ électrique dans le conducteur ; un courant circule alors dans le circuit.

Le courant dans le conducteur dépend du champ électrique qui, lui, est causé par la différence de potentiel que fournit la pile. Plus la différence de potentiel est grande, plus le champ électrique devrait être important, ce qui devrait déplacer les électrons à une plus grande vitesse de dérive et donc produire un plus grand courant. Pour obtenir la relation entre la différence de potentiel et le courant, étudions le mouvement des électrons dans une section d'un conducteur du circuit, ayant une longueur ℓ et une aire transversale A. La figure 6.15 montre le champ dans le fil et des surfaces équipotentielles, perpendiculaires au champ. Comme on l'a vu à la section 4.3, le champ électrique est orienté vers le potentiel plus faible. Calculons donc la diminution de potentiel pour une longueur ℓ du conducteur :

$$V_b - V_a = \Delta V = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \, .$$

On choisit un élément $d\vec{\mathbf{s}}$ parallèle au fil, dont le sens est celui du vecteur allant du point a vers le point b (*voir la figure 6.15*). De cette façon, $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E \, ds \cos(180°) = -E \, ds$. De plus, le champ à l'intérieur du conducteur est uniforme, étant donné que le courant doit être le même partout dans le conducteur. On obtient alors

$$\Delta V = -\int_a^b (-E) \, ds = E \int_a^b ds = E\ell \, . \qquad (6.21)$$

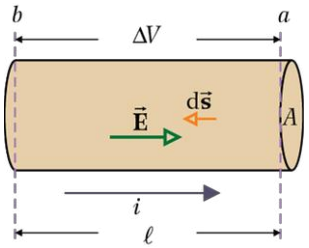


FIGURE 6.15
Le calcul de la différence de potentiel dans un fil parcouru par un courant

La différence de potentiel doit être positive. En effet, le champ $\vec{\mathbf{E}}$ est orienté du point *b* (potentiel élevé) vers le point *a* (potentiel faible).

On a vu à l'équation 6.19 que la densité de courant est proportionnelle au champ électrique ($\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{E}}/\rho$). Le module de la densité de courant dans le conducteur est proportionnel à la différence de potentiel :

$$\left|\vec{\mathbf{J}}\right| = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho \ell} \Delta V \ ,$$

où ρ est la résistivité du matériau. Pour obtenir le courant dans le fil, on utilise la définition de la densité de courant donnée par l'équation 6.7 :

$$J = \frac{i}{A} \Rightarrow i = JA$$

$$i = \left(\frac{A}{\rho \ell}\right) \Delta V \ . \tag{6.22}$$

Selon l'équation 6.22, le courant dans le fil dépend de la différence de potentiel aux extrémités du fil et des propriétés du fil : sa longueur, l'aire de sa section et la résistivité du matériau. Le courant est plus faible dans le cas d'un long fil ou d'un fil dont l'aire de la section est faible ou si le fil est composé d'un matériau qui est un moins bon conducteur. L'inverse de la partie entre parenthèses de l'équation 6.22 est appelé la *résistance du fil* :

$$R_{\text{fil}} = \frac{\rho \ell}{A} \ . \tag{6.23}$$

L'équation 6.22 s'écrit alors

$$i_{\text{fil}} = \frac{\Delta V}{R_{\text{fil}}} \ . \tag{6.24}$$

Le courant dans le fil est plus faible si la résistance du fil est élevée.

Dans le SI, la résistance se mesure en ohms (Ω), en l'honneur du physicien allemand Georg Simon Ohm (1789-1854) qui a étudié la relation entre le courant et la différence de potentiel dans les conducteurs (*voir la figure 6.16*). Selon l'équation 6.24, on obtient

$$1\ \Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 1\ \text{V/A} \ . \tag{6.25}$$

Ainsi, dans le SI, la résistivité se mesure en $\Omega \cdot \text{m}$.

MISE EN GARDE

Vous devez bien faire la différence entre la résistance et la résistivité. La résistivité est une propriété du matériau qui compose le fil. La résistance est une propriété d'un objet ayant des dimensions précises et qui est composé d'un matériau particulier.

FIGURE 6.16
Georg Simon Ohm (1789-1854), physicien allemand

EXEMPLE 6.4 La résistance dans un serpentin

On forme un serpentin en enroulant un fil de nichrome (un alliage de nickel et de chrome) autour d'un cylindre de carton ayant un rayon de 5,0 cm. Le fil a un diamètre de 1,0 mm, et le serpentin comporte 25,0 spires. On branche le serpentin à une pile de 1,5 V.

a. Quel est le module du champ électrique dans le fil ?
b. Quelle est la résistance du fil ?
c. Quel est le courant dans le fil ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 6.17 illustre une partie du serpentin, c'est-à-dire le fil enroulé sur le cylindre.

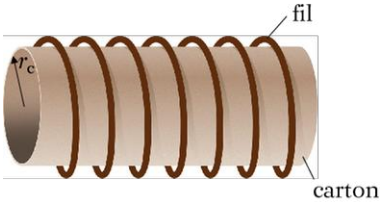


FIGURE 6.17
Le fil est enroulé autour d'un cylindre de rayon r_c. Chaque spire a une longueur de $2\pi r_c$.

Décortiquer le problème

La résistivité du nichrome est donnée dans le tableau 6.1 de la page 199.

Connues	Inconnues
$\rho = 1{,}08 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$	E
$N = 25{,}0$	R_{fil}
$d_{\text{fil}} = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}$	i
$\Delta V = 1{,}50\ \text{V}$	
$r_c = 0{,}050\ \text{m}$	

La longueur du fil de nichrome est

$$\ell = N(2\pi r_c) = 25{,}0\ (2\pi \times 0{,}050\ \text{m}) = 7{,}854\ \text{m}\ .$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 6.21 :

$$\Delta V = E\ell \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{\ell}\ .$$

Résoudre le problème

En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$E = \frac{1{,}5\ \text{V}}{7{,}854\ \text{m}} = 0{,}19\ \text{V/m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Pour calculer la résistance du fil, la **clé** est l'équation 6.23 :

$$R_{\text{fil}} = \frac{\rho\ell}{A}\ ,$$

où $A = \pi r_{\text{fil}}^2 = \pi d_{\text{fil}}^2/4$ est l'**aire de la section du fil** (et non le rayon du cylindre de carton).

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$R_{\text{fil}} = \frac{4\rho\ell}{\pi d_{\text{fil}}^2} = \frac{4\ (1{,}08 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m})\ 7{,}854\ \text{m}}{\pi\ (0{,}001\,0\ \text{m})^2}$$
$$= 10{,}8\ \Omega = 11\ \Omega\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 6.24, reliant la différence de potentiel et le courant :

$$i_{\text{fil}} = \frac{\Delta V}{R_{\text{fil}}}\ .$$

Résoudre le problème

Nous obtenons donc

$$i = \frac{1{,}5\ \text{V}}{10{,}8\ \Omega} = 0{,}14\ \text{A}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

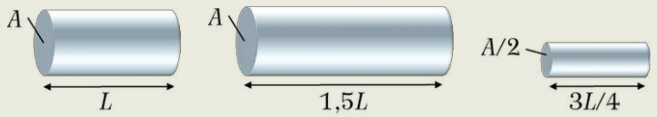
Nous répondons bien aux questions. L'ordre de grandeur des résultats semble correct. Remarquez que le module du champ est beaucoup plus faible que les valeurs obtenues dans les chapitres précédents.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.2

La figure suivante montre trois fils d'aluminium, de longueur et d'aire différentes. Les trois fils sont soumis à la même différence de potentiel. Classez les fils par ordre croissant selon :

a. le module du champ électrique à l'intérieur des fils ;

b. la résistance des fils.



(i) (ii) (iii)

6.5 La résistance et la loi d'Ohm

Dans la section précédente, on a étudié la conduction dans les fils lorsque ces derniers sont branchés à une pile (ou à une autre source de f.é.m.). On peut donc énoncer ce qui suit.

- La pile déplace des charges en transformant de l'énergie chimique en énergie électrique, ce qui engendre une différence de potentiel.
- Ce déplacement de charge produit un champ électrique de module constant dans le conducteur. Le champ est orienté vers le potentiel ayant des valeurs plus faibles.
- Un courant est généré dans tout le circuit. Des électrons se déplacent dans le sens opposé au champ électrique.
- Le courant est partout le même dans le circuit.

On peut donc dire que la f.é.m. de la pile est la cause du courant électrique dans le fil.

Supposons maintenant qu'un appareil (une ampoule, un moteur ou un lecteur mp3, par exemple) est branché à une source de f.é.m. en utilisant des fils conducteurs, comme le montre la figure 6.18. On obtient un circuit électrique. La f.é.m. de la source produit une différence de potentiel $\Delta V_{\text{source}} = \mathcal{E}$ à ses bornes. Ceci produit un champ électrique dans le circuit, y compris à l'intérieur de l'appareil, et un courant électrique i circule dans le circuit. Le courant est le même partout dans le circuit, car les électrons ne peuvent s'accumuler à un endroit particulier du circuit. La différence de potentiel aux bornes de l'appareil est ΔV. On définit la *résistance* de l'appareil par

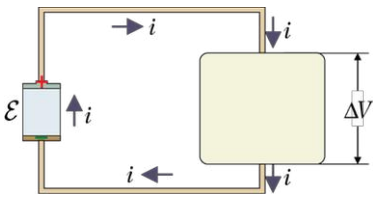


FIGURE 6.18
Un appareil a une différence de potentiel ΔV à ses bornes et il est parcouru par un courant i.

$$R \equiv \frac{\Delta V}{i}. \qquad (6.26)$$ Résistance

La résistance n'est pas nécessairement constante. Elle peut dépendre de la différence de potentiel aux bornes de l'appareil.

On peut inverser la dernière équation pour obtenir le courant dans l'appareil en fonction de la résistance et de la différence de potentiel à ses bornes :

$$i \equiv \frac{\Delta V}{R} . \tag{6.27}$$

REMARQUE

L'équation 6.26 est souvent écrite $\Delta V = Ri$ (ou même $V = Ri$) et appelée la loi d'Ohm. La version correcte de la loi d'Ohm sera présentée un peu plus loin. L'équation 6.26 n'est qu'une autre façon d'écrire la définition de la résistance. On l'indique avec le courant du côté gauche de l'équation pour montrer que le courant est le résultat, alors que la différence de potentiel en est la cause.

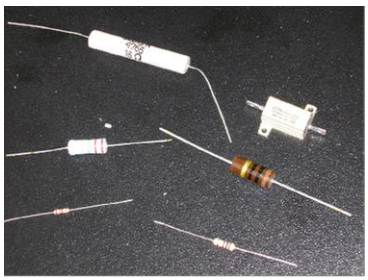


FIGURE 6.19
Quelques résistances

Les fils conducteurs ont une très faible résistance, qui est souvent négligeable par rapport aux autres éléments d'un circuit. Pour contrôler le courant dans un circuit et éviter qu'il soit trop intense, on ajoute des composants électroniques qui ont une résistance fixe. Ces composants sont appelés des *résistances*. La figure 6.19 en montre quelques exemples. On les fabrique en utilisant une substance qui conduit peu, comme le carbone, ou bien à partir d'un conducteur ayant une très faible section transversale, relié à deux fils conducteurs. Il est possible de se procurer des résistances entre quelques ohms et des millions d'ohms. Dans les circuits, on utilise le symbole pour représenter les résistances.

REMARQUE

Certains auteurs utilisent le terme anglais *resistor* ou le calque *résisteur* pour éviter de mélanger les composants électroniques et le concept de résistance définie par l'équation 6.26. Nous ne procédons pas de cette façon, car le contexte permet facilement de distinguer les deux termes. De plus, c'est le terme résistance qui est utilisé pour indiquer les composants à l'extérieur des écoles.

Les matériaux ohmiques et les matériaux non ohmiques

Si on fait varier la différence de potentiel aux bornes d'une résistance, le courant varie de façon linéaire, comme l'illustre la figure 6.20. Le rapport $\Delta V/i$, c'est-à-dire la résistance, est constant. Lorsqu'un dispositif électronique a une résistance fixe, on dit qu'il est *ohmique*, qu'il est assujetti à la loi d'Ohm. En effet, selon la loi d'Ohm :

Loi d'Ohm

Dans un dispositif ohmique, le courant est directement proportionnel à la différence de potentiel.

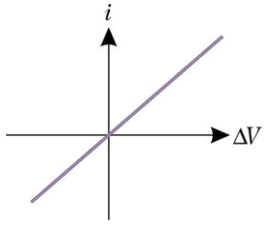


FIGURE 6.20
Le graphique du courant en fonction de la différence de potentiel dans le cas d'un matériau ohmique

Cette loi a été découverte par le physicien allemand Georg Simon Ohm (1789-1854). Ce n'est pas une loi générale mais une règle particulière. La loi s'applique bien dans le cas de conducteurs dont la température reste constante. Si la température du conducteur change, la résistance change aussi. C'est ce qui se produit dans le cas du filament d'une ampoule. En effet, si on augmente la différence de potentiel, un plus grand nombre de collisions se produisent entre les électrons et les atomes du conducteur, ce qui fait augmenter la température. La résistivité du matériau augmente (selon l'équation 6.20). De plus, la longueur et l'aire de la section peuvent aussi varier à cause de la dilatation

thermique du matériau. La figure 6.21a présente le graphique du courant en fonction de la différence de potentiel dans le cas d'une ampoule. Ce n'est pas une droite, ce qui montre que la résistance de l'ampoule n'est pas une constante. L'ampoule n'est pas assujettie à la loi d'Ohm.

Pour les *dispositifs non ohmiques*, la résistance change en fonction de la différence de potentiel appliquée. C'est le cas de l'ampoule et des semi-conducteurs. C'est aussi le cas pour les diodes, des composants fabriqués à partir de semi-conducteurs. La figure 6.21b présente le graphique du courant en fonction de la différence de potentiel pour une diode. Comme le montre le graphique, la diode laisse passer le courant à partir d'une certaine différence de potentiel dans un sens et le bloque dans l'autre sens.

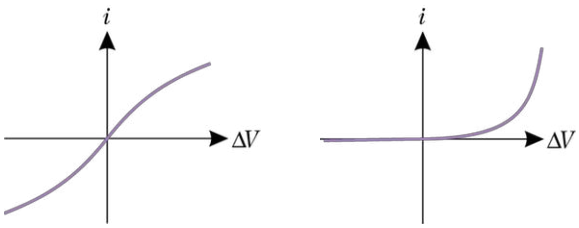


FIGURE 6.21

Le graphique du courant en fonction de la différence de potentiel pour deux objets non ohmiques : (a) une ampoule, dont la résistance augmente avec la température ; (b) une diode, dont la résistance tend vers zéro pour une différence de potentiel positive et vers l'infini pour une différence de potentiel négative.

EXEMPLE 6.5 La mesure de la température

Une résistance de platine branchée à une pile de 3,00 V est utilisée pour mesurer la température. À 20,0 °C, on mesure un courant de 28,0 mA. Lorsqu'on place la résistance à l'intérieur d'un four, le courant mesuré est de 12,0 mA. On suppose que la dilatation thermique est négligeable.

a. Quelle est la résistance à 20,0 °C ?

b. Quelle est la température du four ?

SOLUTION

Nous avons besoin du coefficient thermique de résistivité du platine, indiqué dans le tableau 6.1 de la page 199.

Connues		Inconnues
$\Delta V = 3{,}00$ V	$T_0 = 20{,}0$ °C	R_0
$i_0 = 28{,}0$ mA	$i = 12{,}0$ mA	T
$\alpha = 3{,}92 \times 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$		

REMARQUE

Comme nous calculons des différences de température, α peut s'exprimer de façon équivalente en (°C)$^{-1}$ ou en K^{-1}.

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la définition de la résistance, obtenue à l'aide de l'équation 6.26 :

$$R_0 = \frac{\Delta V}{i_0}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$R_0 = \frac{3{,}00 \text{ V}}{0{,}0280 \text{ A}} = 107{,}1\ \Omega = 107\ \Omega\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier les clés

La première **clé** est de nouveau la définition de la résistance lorsque la résistance de platine est placée dans le four :

$$R = \frac{\Delta V}{i} . \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième **clé** est que le changement de température fait changer la résistivité du platine, selon l'équation 6.20 :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right] . \qquad \text{(iii)}$$

De plus, la résistance dépend de la résistivité, selon l'équation 6.23 :

$$R = \frac{\rho \ell}{A} . \qquad \text{(iv)}$$

Étant donné que la dilatation thermique est négligeable, la longueur et l'aire de la section de la résistance ne changent pas. La résistance change alors selon la même équation que la résistivité :

$$R = R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right] . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la résistance du platine dans le four en remplaçant les valeurs dans l'équation (ii) :

$$R = \frac{3{,}00 \text{ V}}{0{,}0120 \text{ A}} = 250 \ \Omega .$$

Ensuite, nous isolons la température dans l'équation (v) :

$$T = \frac{R/R_0 - 1}{\alpha} + T_0$$
$$= \frac{(250 \ \Omega / 107{,}1 \ \Omega) - 1}{3{,}92 \times 10^{-3} \ (^\circ\text{C})^{-1}} + 20{,}0 \ ^\circ\text{C}$$
$$T = 360 \ ^\circ\text{C} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Il est possible d'obtenir cette température dans un four.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.3

Le tableau suivant donne les valeurs du courant pour deux dispositifs soumis à des différences de potentiel données.

a. Quel dispositif est ohmique ?

b. Quel dispositif a la plus grande résistance pour une différence de potentiel de 3,00 V ?

ΔV (V)	i_1 (A)	i_2 (A)
0,00	0,00	0,00
1,50	0,25	0,50
3,00	0,50	0,75

6.6 La puissance dans les circuits électriques

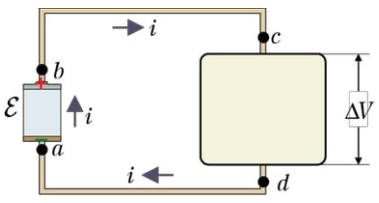


FIGURE 6.22
Une pile branchée à un moteur

La figure 6.22 illustre un appareil électrique, tel un petit moteur, branché à une pile idéale. La f.é.m. de la pile est $\mathcal{E}$, et un courant continu i circule dans le circuit. On veut étudier les transformations d'énergie dans le circuit. Pour ce faire, on analyse une charge dq qui se déplace dans le circuit.

Lorsque la charge dq se déplace du point a au point b, la pile effectue un travail $\mathrm{d}W = \mathrm{d}q \ \Delta V_{\text{pile}} = \mathrm{d}q \ \mathcal{E}$. La pile transforme de l'énergie chimique en énergie

potentielle électrique $dU = dq\,\mathcal{E}$. L'énergie potentielle du circuit augmente. Le taux de transfert d'énergie correspond à la quantité d'énergie transformée par unité de temps. C'est ce qu'on appelle la *puissance instantanée* (ou simplement la *puissance*) :

$$P_{\mathcal{E}} = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}\mathcal{E} .$$

Or, dq/dt représente le courant dans le circuit. Donc, la puissance fournie par une source de f.é.m. idéale est

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}i . \tag{6.28}$$

Puissance d'une f.é.m.

La pile produit un champ électrique dans les fils conducteurs. Lorsque la charge dq se déplace du point b au point c, il y a des collisions avec les atomes du conducteur. Une partie de l'énergie électrique se transforme en énergie thermique. Cette énergie représente l'énergie cinétique microscopique désordonnée des atomes et se manifeste par une augmentation de la température du conducteur. Lorsque la résistance des fils est faible, cette transformation de l'énergie électrique en énergie thermique est faible.

Lorsque la charge dq se déplace entre les points c et d, le potentiel diminue de $\Delta V_{app} = \Delta V$. Cette fois-ci, l'énergie potentielle du système diminue. L'appareil transforme l'énergie potentielle électrique en une autre forme. Lorsque l'appareil est un moteur, celui-ci effectue un travail sur un objet extérieur au circuit. L'énergie électrique du système est transférée à un objet extérieur. La diminution d'énergie potentielle du système est

$$dU = \Delta V\, dq .$$

La puissance de l'appareil représente le taux de travail effectué :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}\Delta V .$$

La puissance de l'appareil est donc

$$P = \Delta V\, i . \tag{6.29}$$

Puissance électrique

Lorsque la charge dq se déplace de d à a dans le fil conducteur, elle subit de nouveau des collisions. Pour des fils idéaux, la résistance des fils est négligeable et l'énergie transformée en énergie thermique l'est aussi.

Après un circuit complet, la charge revient au point a. Comme la force électrique est une force conservative, l'énergie potentielle du système revient à sa valeur initiale. Ceci implique que l'augmentation du potentiel dans la pile $\Delta V_{pile} = \mathcal{E}$ doit être suivie par des diminutions équivalentes du potentiel à l'intérieur des fils et du moteur. Le graphique de la figure 6.23 donne la variation du potentiel dans le circuit, dans le cas de fils réels et dans le cas de fils idéaux, ayant une résistance qui tend vers zéro. Dans cette situation, on a $\Delta V = \mathcal{E}$, et l'énergie chimique transformée en énergie électrique dans la pile est complètement transférée dans le moteur.

Supposons maintenant qu'on remplace le moteur par une résistance R, comme dans le circuit de la figure 6.24. Cette fois-ci, l'énergie potentielle électrique se

Défi animé 6.1
Comment la puissance dissipée par une résistance branchée à une pile varie-t-elle si on change soit sa valeur, soit la valeur de la différence de potentiel de la pile ?

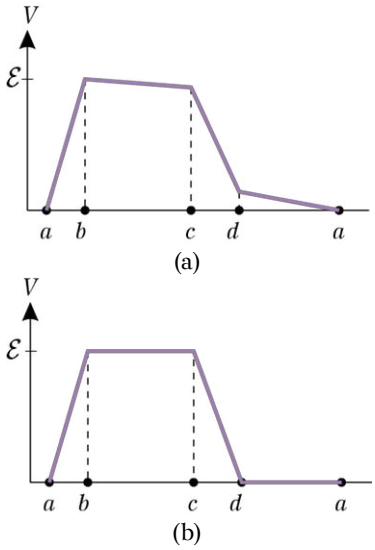


FIGURE 6.23
(a) La variation du potentiel dans le circuit de la figure 6.22 : (a) pour des fils réels ; (b) pour des fils idéaux ayant une résistance nulle.

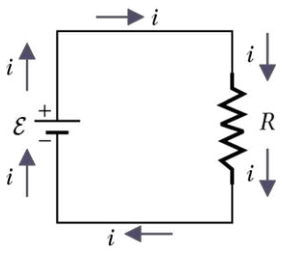


FIGURE 6.24
Le schéma d'un circuit avec une pile branchée à une résistance

transforme complètement en énergie thermique dans la résistance. C'est l'*effet Joule*, un phénomène étudié par le physicien anglais John-Prescott Joule (1818-1889). Étant donné que $i = \Delta V/R$, on peut exprimer la puissance dans la résistance ainsi :

Puissance dans une résistance

$$P = \Delta V\, i = \frac{(\Delta V)^2}{R} = Ri^2 . \qquad (6.30)$$

On dit parfois que l'énergie électrique est *dissipée* en énergie thermique dans la résistance. Ceci ne veut pas dire que l'énergie est perdue, mais plutôt que l'énergie électrique (ordonnée) est transformée en énergie thermique (désordonnée). L'énergie thermique est une forme d'énergie plus difficile à utiliser pour effectuer un travail. Elle est quand même utile pour certains aspects, entre autres en hiver lorsqu'il fait –20 °C à l'extérieur.

EXEMPLE 6.6 On chauffe en hiver

Un radiateur électrique est branché à une source de f.é.m. de 240 V par des fils conducteurs idéaux. Quelle est la résistance du radiateur si celui-ci transforme 2000 W d'énergie électrique en énergie thermique ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La différence de potentiel aux bornes du radiateur est égale à la $\mathcal{E}$, car les fils sont idéaux.

Connues	Inconnue
$\mathcal{E} = \Delta V = 240$ V	R
$P = 2000$ W	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 6.30 :

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{(\Delta V)^2}{P} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$R = \frac{(240\ \text{V})^2}{2000\ \text{W}} = 28{,}8\ \Omega . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La résistance doit être assez petite, de telle sorte que le courant dans le circuit soit important. Nous avons supposé que les fils étaient idéaux. En pratique, les fils ont une certaine résistance. Celle-ci doit être plus petite que la résistance du radiateur. C'est pour cette raison que les fils utilisés pour relier les radiateurs à une source de f.é.m. ont un gros diamètre.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.4

On applique une différence de potentiel ΔV à une résistance R, ce qui fait circuler un courant i dans celle-ci. Classez les situations suivantes par ordre croissant de la puissance dans la résistance.

(i) On double la différence de potentiel sans que la résistance change.

(ii) On double la résistance sans changer la différence de potentiel.

(iii) On diminue la résistance de moitié, et on divise de moitié la différence de potentiel.

(iv) On change la résistance afin que le courant double pour une même différence de potentiel.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le courant électrique dans les conducteurs.

LES DÉFINITIONS

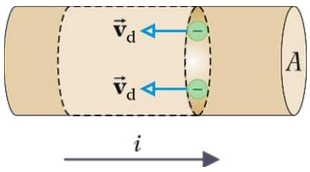
- Le **courant électrique** représente la charge nette qui traverse une surface par unité de temps :

$$i \equiv \left| \frac{dq}{dt} \right| .$$

Le **sens du courant** correspond au sens du déplacement des charges positives ou au sens opposé du mouvement des charges négatives.

- La **densité de courant** $\vec{\mathbf{J}}$ est un vecteur orienté selon la vitesse de dérive des charges :

$$\vec{\mathbf{J}} = nq\vec{\mathbf{v}}_d \text{ et } i = \int \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} .$$

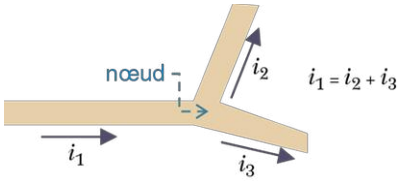


- La **résistance** d'un dispositif représente le rapport entre la différence de potentiel à ses bornes et le courant :

$$R \equiv \frac{\Delta V}{i} .$$

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Selon la **loi des nœuds**, la somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui quittent le nœud.



- Le courant est généré par un **champ électrique** de module uniforme dans le conducteur :

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} ,$$

où ρ est la résistivité et σ, la conductivité du matériau.

LES RÉSULTATS

- Le **modèle simple de la conduction** permet de calculer la résistivité en fonction de la densité de porteurs de charge n et du temps moyen τ entre deux collisions :

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} .$$

- La **résistivité d'un conducteur** augmente lorsque la température augmente :

$$\rho = \rho_0\left[1 + \alpha\,(T - T_0)\right] .$$

- Pour un **semi-conducteur**, la résistivité diminue lorsque la température augmente, car la densité de porteurs de charge augmente alors.
- À très faible température, la résistivité tombe à zéro pour certains matériaux appelés les **supraconducteurs**.
- Pour un **dispositif ohmique**, la résistance est indépendante de la différence de potentiel aux bornes du dispositif.
- La **résistance d'un fil conducteur**, ayant une longueur ℓ et une aire de section A, est

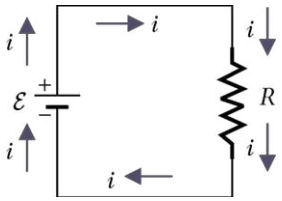
$$R = \frac{\rho\ell}{A} .$$

- L'énergie est fournie à un circuit par une source de f.é.m. à une puissance :

$$P_\mathcal{E} = \mathcal{E}i .$$

- Une résistance dissipe l'énergie électrique en énergie thermique à une puissance :

$$P = \Delta V\, i = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} .$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • E exercices simples • P problèmes • solution disponible

Section 6.1 Le courant électrique

Q1 La figure 6.25 montre quatre situations où des charges se déplacent de façon horizontale dans une région quelconque, avec le taux de transfert de charge correspondant. Classez les situations selon un ordre décroissant du courant dans chacune des régions.

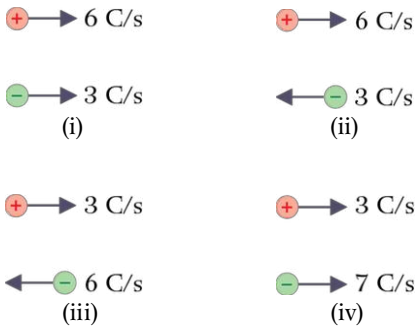


FIGURE 6.25 • Question 1

Q2 Le circuit de la figure 6.26 présente les courants circulant dans des conducteurs. Quel est le courant i et dans quel sens est-il ?

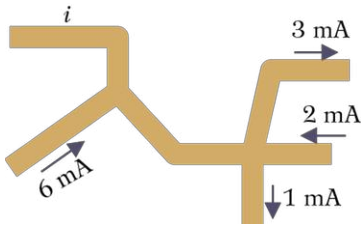


FIGURE 6.26 • Question 2

E3 Pendant 1,0 s dans une solution aqueuse, $4{,}5 \times 10^{16}$ ions positifs ayant une charge $+2e$ se déplacent vers la gauche et $7{,}9 \times 10^{16}$ ions négatifs, ayant une charge $-e$, se déplacent vers la droite. Quel est le courant et dans quel sens est-il ?

E4 Un courant de 2,5 A traverse une pile pendant un temps de 4,00 min. Combien d'électrons traversent une section de la pile pendant ce temps ?

E5 La charge $q(t)$ traversant une surface varie en fonction du temps selon l'équation suivante :

$$q(t) = 6{,}0t^2 - 2{,}0t + 4{,}0\ ,$$

où t est mesuré en secondes et q, en millicoulombs. Quel est le courant traversant cette surface à $t = 3{,}0$ s ?

P6 Un courant de 1,50 A circule dans un fil d'aluminium ayant un diamètre de 5,19 mm. On suppose que chaque atome d'aluminium a un électron de conduction.

a. Quelle est la densité de porteurs de charge dans le fil d'aluminium ?

b. Quel est le module de la vitesse de dérive des électrons ?

c. Quel est le temps nécessaire pour qu'un électron parcoure une distance de 1,00 m ?

P7 Dans un fil de cuivre de 0,500 cm de diamètre, 270×10^{10} électrons traversent vers la droite une section transversale du fil toutes les millisecondes.

a. Quelle est la densité de courant qui traverse cette section ?

b. Quelle est la vitesse de dérive des électrons dans le fil de cuivre ?

P8 Le courant circulant dans un fil de cuivre varie en fonction du temps selon l'équation suivante :

$$i(t) = 4{,}00t - 6{,}00\ ,$$

où t est exprimé en secondes et i, en ampères. Quelle est la charge qui traverse une section du fil durant l'intervalle de temps compris entre $t = 2{,}00$ s et $t = 5{,}00$ s ?

P9 Un fil de forme circulaire a une densité de courant qui dépend de la distance r par rapport au centre du fil :

$$J = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

où R est le rayon du fil.

a. Calculez le courant qui circule dans le fil complet.

b. Calculez le courant qui circule entre $r = 0$ et $r = R/2$.

Section 6.2 Le champ électrique et la conduction

Q10 Un fil de cuivre a un diamètre d. Initialement, le champ électrique a un module E, et un courant i circule dans le fil. Déterminez ce qui arrive à la densité du courant dans les situations suivantes :

a. le module du champ électrique double ;

b. le courant double ;

c. on utilise un fil ayant un diamètre deux fois plus grand.

d. Le même champ électrique existe dans un fil d'aluminium ayant le même diamètre que le fil de cuivre. Dans quel fil la densité de courant est-elle la plus faible ?

E11 Un champ électrique de $5{,}73 \times 10^{-5}\vec{\imath}$ V/m est présent dans un fil de plomb de 1,00 mm de diamètre.

a. Quelle est la conductivité du matériau ?

b. Quel est le courant circulant dans le fil ?

E12 Un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = -2{,}47 \times 10^{-3}\ \text{V/m}\,\vec{\jmath}$ est présent dans un cylindre conducteur où la densité de porteurs de charge est de $6{,}61 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$.

a. Quelle est la vitesse de dérive des électrons du cylindre si le temps moyen entre deux collisions est de $2{,}00 \times 10^{-14}$ s ?

b. Quelle est la densité de courant dans ce cylindre ?

c. Quelle est la résistivité de ce cylindre ?

E13 Pour faire démarrer le moteur d'une automobile, un fil de cuivre de 7,00 mm de diamètre relie la batterie et le démarreur. Le courant au démarrage est de 140 A. Quel est le module du champ électrique dans le fil ?

P14 En l'absence de champ électrique, un électron libre dans un métal parcourt en moyenne une distance équivalant à 60 fois le rayon de l'atome d'hydrogène avant de frapper un autre électron. Le rayon de l'atome d'hydrogène est de 0,053 nm. À la température ambiante de 20,0 °C, la vitesse thermique de ces électrons est de 115 km/s. Si on ajoute un champ électrique, la vitesse de dérive a un module de 15,0 µm/s.

a. Quel est le temps moyen entre deux collisions ?

b. Quel est le module du champ électrique dans ce métal ?

c. Si on estime le nombre d'électrons de conduction de ce métal à $2{,}11 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, de quel matériau est fait ce métal ?

Section 6.3 La résistivité et la température

Q15 La figure 6.27 montre la résistivité en fonction de la température pour trois substances différentes. Quelle substance est un semi-conducteur ?

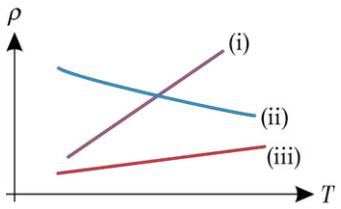


FIGURE 6.27 • Question 15

Q16 Un champ électrique constant est maintenu dans un semi-conducteur lorsque la température diminue. Comment varie la densité de courant dans le semi-conducteur ?

E17 À quelle température la résistivité du cuivre sera-t-elle égale à celle de l'aluminium lorsque ce dernier est à 20,0 °C ?

E18 Un fil de haute tension fait d'aluminium permet de fournir une densité de courant de $0{,}100\ \text{A/m}^2$ durant l'été, lorsque la température ambiante est de 20,0 °C. Si le même champ électrique est maintenu dans le fil lorsqu'il fait –30,0 °C en hiver, que devient le module de la densité de courant de ce fil ?

Section 6.4 Le courant dans les fils conducteurs

Q19 Classez par ordre croissant les résistances des trois fils suivants :

(i) un fil de cuivre de longueur ℓ et de section A ;

(ii) un fil de cuivre de longueur 2ℓ et de section $4A$;

(iii) un fil de laiton de longueur ℓ et de section A.

Q20 Le tableau suivant montre les données de trois fils composés du même conducteur dans lesquels circule un même courant. Classez les fils selon un ordre croissant :

a. de la résistance ;

b. de la différence de potentiel à leurs extrémités.

fil	diamètre	longueur
1	d	ℓ
2	$2d$	2ℓ
3	$\frac{d}{2}$	ℓ

Q21 On étire un fil cylindrique de telle sorte que sa longueur est doublée. Si le fil conserve sa forme cylindrique, par quel facteur change la résistance du fil ?

E22 On applique la même différence de potentiel à deux fils de même longueur : un fil de fer et un fil de nickel. Quel est le rapport des rayons des fils si le courant est le même dans les deux fils ?

E23 Une tige d'argent a une section carrée de 8,00 mm de côté. Quel est le diamètre d'un fil d'or cylindrique de même longueur si ce dernier a la même résistance que la tige d'argent ?

E24 Un rail de chemin de fer (en fer) a une aire transversale de $60{,}0\ \text{cm}^2$. Calculez la résistance du rail pour une longueur de 1,00 km.

E25 On fabrique un fil à partir de trois cylindres reliés bout à bout. Le premier matériau est du nickel de 10,0 cm de longueur, le deuxième est du platine de 5,00 cm de longueur et le troisième, du nickel de 8,00 cm de longueur. En supposant que la résistance totale est la somme des trois résistances, déterminez la résistance totale de ce fil si chacun de ces morceaux a un rayon de 5,00 mm.

P26 Un fil de 3,00 m de longueur a une résistance de 1,50 Ω. On l'étire jusqu'à une longueur de 10,0 m. Quelle est la nouvelle résistance du fil ?

P27 Un fil a une longueur de 10,0 m et un diamètre de 4,12 mm. Lorsqu'on applique une différence de potentiel de 0,100 V, un courant de 5,03 A y circule.

a. Quelle est la résistivité du matériau ?

b. Quel est le module de la densité de courant ?

c. Quel est le module du champ électrique à l'intérieur du fil ?

P28 Un long fil de nichrome, de 2,30 mm de diamètre, est enroulé pour former un serpentin ayant un rayon de 3,50 cm. Ce fil est utilisé dans un radiateur. Lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel de 240 V, le courant est de 8,57 A.

a. Quelle est la résistance du fil ?

b. Combien de spires contient le serpentin ?

P29 Un fil de platine est utilisé pour mesurer la température d'un four. Le fil a une longueur de 20,0 cm et un diamètre de 0,201 9 mm. La différence de potentiel à ses extrémités est gardée constante à 0,400 V. Lorsque la résistance est placée dans le four, on mesure un courant de 237 mA. Quelle est la température du four ?

P30 Un fil de cuivre de 1,00 m de longueur et ayant un diamètre de 0,455 mm est soumis à une différence de potentiel de 0,020 V. On place le fil dans de l'azote liquide, à une température de –196 °C. Négligez la dilatation thermique.

a. Quelle est la résistance du fil dans l'azote liquide ?

b. Quel est le courant dans le fil ?

c. Quel est le module de la vitesse de dérive des électrons de conduction ?

Section 6.5 La résistance et la loi d'Ohm

Q31 Quatre fils sont branchés indépendamment à une pile. Classez les situations selon un ordre croissant du courant qui circule dans les fils suivants :

(i) un fil de cuivre de longueur ℓ et de section A ;

(ii) un fil d'aluminium de longueur ℓ et de section A ;

(iii) un fil de cuivre de longueur 2ℓ et de section A ;

(iv) un fil d'aluminium de longueur ℓ et de section $2A$.

E32 Une source de f.é.m. de 12,0 V est branchée à un circuit dont la résistance est de 3,00 kΩ. Déterminez le courant qui circule dans ce circuit.

E33 Une ampoule est faite d'un filament de tungstène. Lorsqu'elle est branchée à une source de f.é.m. de 120 V, la température monte jusqu'à 2 100 °C, et un courant de 0,500 A circule à travers l'ampoule. Calculez la résistance de l'ampoule lorsque celle-ci est à une température de 20 °C.

P34 Pour un dispositif non ohmique, la différence de potentiel à ses bornes varie en fonction du courant selon l'équation suivante :

$$\Delta V = (50 \times 10^3 \text{ V/A}^2)\, i^2 \ .$$

Pour tester ce dispositif, on le branche dans un circuit comprenant une batterie de 12,0 V et une résistance de 500 Ω. La somme des différences de potentiel du dispositif non ohmique et de la résistance doit être égale à la f.é.m. de la pile.

a. Quel est le courant dans le circuit ?

b. Quelle est la résistance du dispositif non ohmique pour ce courant ?

Section 6.6 La puissance dans les circuits électriques

E35 Un radiateur de 1 250 W fonctionne lorsqu'une différence de potentiel de 115,0 V est appliquée.

a. Déterminez le courant qui circule dans le radiateur.

b. Quelle est la résistance du radiateur ?

E36 Un appareil est branché à une source de f.é.m. de 120 V. Il transforme de l'énergie électrique à un taux de 100 W. À quel taux transforme-t-il l'énergie électrique si la différence de potentiel est réduite à 60 V ? (On suppose ici que la variation de la résistance est négligeable.)

E37 Une bouilloire a une puissance de 1,50 kW lorsqu'elle est utilisée en Amérique du Nord, avec une différence de potentiel de 120 V. Quelle est la puissance de cette bouilloire si on l'utilise en Europe, où la différence de potentiel des prises de courant est de 220 V ? Négligez la variation de résistance avec la température.

E38 Un radiateur est branché à une source de f.é.m. de 240 V. Sa résistance, lorsqu'il est chaud, est de 24,0 Ω.

a. Quelle est la puissance du radiateur ?

b. Déterminez le courant qui circule dans le radiateur.

c. Si l'électricité coûte 0,080 0 $ par kilowattheure, quel est le coût d'utilisation du radiateur pendant 4,00 h ?

E39 Une pile de f.é.m. de 1,45 V est branchée à un circuit. Le courant est de 4,00 mA.

a. Quelle est la charge qui circule dans la pile chaque seconde ?

b. Quelle est la puissance fournie par la pile ?

c. Quelle est l'énergie potentielle électrique obtenue en 1,00 min ?

P40 Un élément chauffant en forme de serpentin est fabriqué en enroulant un fil de nichrome de 2,59 mm de diamètre sur un cylindre de 5,00 cm de rayon. Le fil est branché à une source de f.é.m. de 120 V. L'élément chauffant a alors une puissance de 800 W, et sa température est de 120 °C.

a. Quelle est la résistance du fil lorsque celui-ci est chaud ?

b. Quelle est la résistance du fil à 20,0 °C ?

c. Quel est le nombre de spires du serpentin ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

6.1	$i = 0{,}7$ A, vers le bas	Le courant est conservé à chaque nœud. Le courant de 0,5 A se divise au nœud de gauche en 0,2 A et en 0,3 A. Ensuite, pour le nœud de droite, il y a un courant de 0,3 A et un courant de 0,4 A qui arrivent. Donc, le courant qui sort du nœud est 0,3 A + 0,4 A = 0,7 A vers le bas.
6.2	**a.** (ii) < (i) < (iii)	Le module du champ dans un conducteur est $E = (\Delta V)/\ell$. Les fils sont soumis au même ΔV, donc le module du champ dépend de l'inverse de la longueur.
	b. (i) < (ii) = (iii)	La résistance dans un fil est $R = \rho\ell/A$. Les fils ont la même résistivité, car ils sont faits de la même substance.
6.3	**a.** Le dispositif 1	La résistance $R = \Delta V/i$ du dispositif 1 demeure constante, alors que la résistance du dispositif 2 change.
	b. Le dispositif 1	Pour une différence de potentiel de 3,00 V, le courant est plus faible dans le dispositif 1. Puisque $R = \Delta V/i$, un courant plus faible implique une résistance plus grande.
6.4	(ii) = (iii) < (iv) < (i)	La puissance est donnée par $P = (\Delta V)^2/R = (\Delta V)i$.

Chapitre 07

Les circuits à courant continu

Buts du chapitre

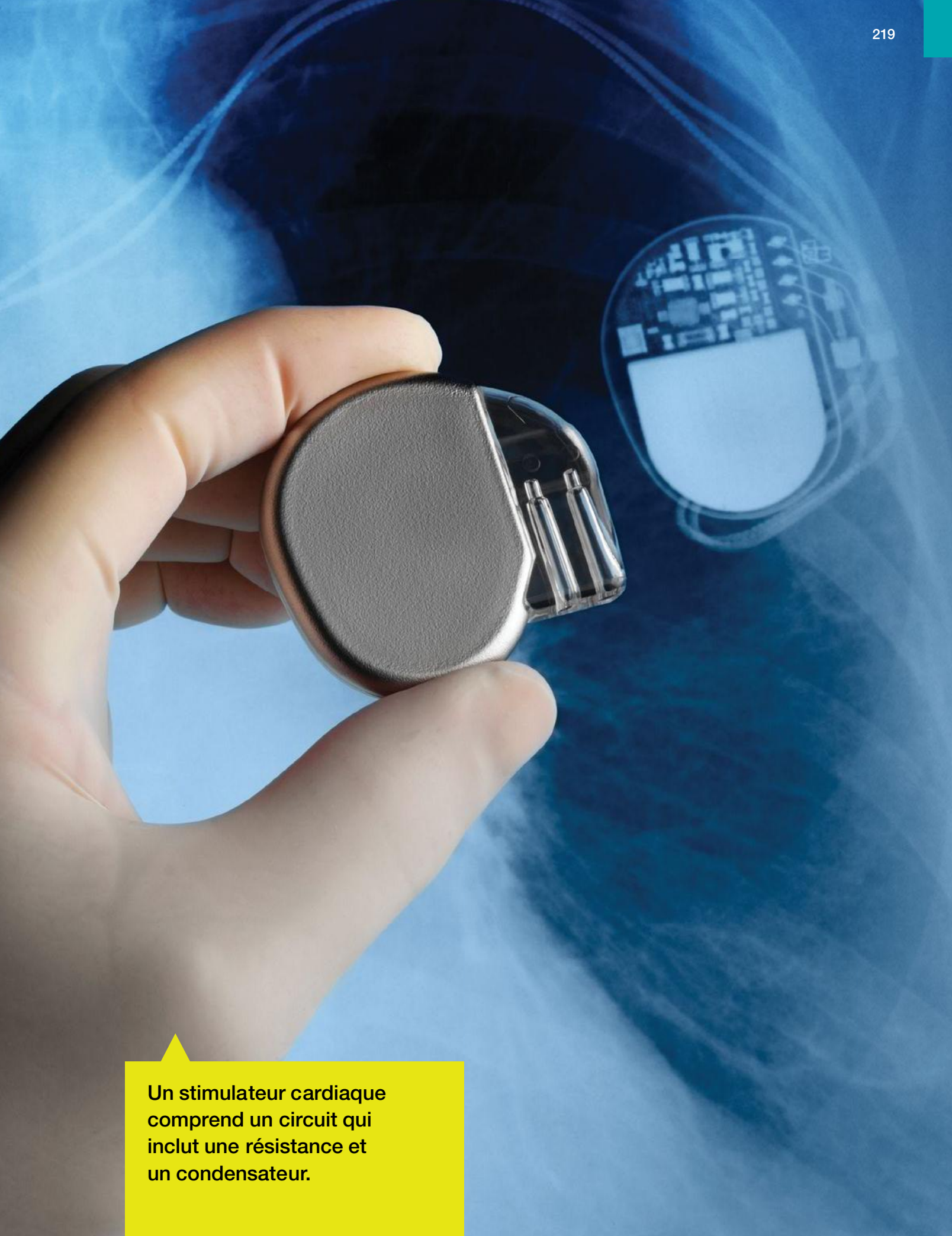
Ce chapitre expose une méthode générale pour l'analyse des circuits. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- d'utiliser les lois de Kirchhoff pour analyser les circuits ;
- d'examiner des circuits comportant plusieurs résistances et plusieurs sources de f.é.m. ;
- d'obtenir les caractéristiques d'une pile réelle ;
- d'étudier les circuits avec un condensateur en mode transitoire.

Préalables

Ce chapitre porte sur les circuits. Revoyez :

- le potentiel électrique et les sources de différence de potentiel, expliqués à la section 4.2 et à la section 4.9 ;
- le courant électrique, abordé dans les sections 6.1 et 6.4 ;
- la résistance et la capacité d'un condensateur, présentées respectivement à la section 6.5 et à la section 5.1 ;
- la puissance électrique, décrite à la section 6.6.



Un stimulateur cardiaque comprend un circuit qui inclut une résistance et un condensateur.

Au chapitre 6, nous avons étudié la conduction dans les conducteurs. Nous avons vu qu'en branchant une source de f.é.m. dans un circuit électrique, l'énergie électrique peut être transformée en une autre forme.

Les appareils électriques et électroniques qui nous entourent sont constitués de plusieurs sources de f.é.m., de résistances, de condensateurs et d'autres dispositifs électriques branchés dans des circuits. Ces circuits peuvent être simples ou complexes, mais les règles pour les analyser sont les mêmes.

Dans ce chapitre, nous allons apprendre les règles permettant d'analyser les circuits électriques, qu'on appelle les lois de Kirchhoff. À l'aide de ces règles, nous pourrons calculer le courant à un endroit quelconque et la différence de potentiel entre deux points quelconques. Nous allons étudier les circuits composés de sources de f.é.m. et de résistances, ainsi que les caractéristiques d'une pile réelle. Enfin, notre étude portera sur les circuits simples qui contiennent des condensateurs, comme le circuit du stimulateur cardiaque illustré en début de chapitre.

TABLEAU 7.1
Les symboles utilisés dans les circuits

Composants	Symbole
Pile	$-\vert\vert+\ \mathcal{E}$
Résistance	R
Condensateur	C
Fil	
Interrupteur	ouvert / fermé
Ampèremètre	A
Voltmètre	V

7.1 Les dispositifs électriques et les diagrammes

Un circuit électrique est composé de plusieurs éléments qu'on appelle des *dispositifs électriques*. Ce sont par exemple des sources de f.é.m. comme les piles, des résistances et des condensateurs. Ils sont reliés par des fils conducteurs. On utilise aussi des appareils de mesure, comme un ampèremètre pour mesurer le courant dans un conducteur ou un voltmètre pour mesurer la différence de potentiel entre deux points. Afin de représenter les circuits, on emploie des diagrammes et on remplace les dispositifs par des symboles. Un tableau des symboles a déjà été présenté à la section 5.4 ; ces derniers le sont de nouveau, avec quelques ajouts, dans le tableau 7.1 et à l'annexe C.

7.2 Les lois de Kirchhoff

La première règle pour l'analyse des circuits est une relation entre les courants dans un circuit. Nous avons vu à la section 6.1 que lorsqu'il y a un nœud, c'est-à-dire un point de jonction entre des conducteurs, le courant est conservé, puisque la charge électrique est conservée. On obtient donc :

La somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui quittent ce nœud.

De façon mathématique, la loi des nœuds peut s'écrire ainsi :

Loi des nœuds

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}} \ . \tag{7.1}$$

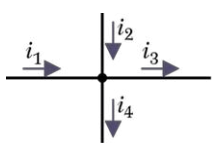


FIGURE 7.1
Un exemple de l'utilisation de la loi des nœuds

Par exemple, à la figure 7.1, un courant i_1 et un courant i_2 arrivent au nœud, alors qu'un courant i_3 et un courant i_4 le quittent. Pour ce nœud, selon la loi des nœuds, on a

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \ .$$

On appelle *branche* une portion de circuit située entre deux nœuds. Étant donné que la charge est conservée, le courant doit être le même partout dans une branche.

La deuxième loi fait intervenir les différences de potentiel dans le circuit. Nous avons vu à la section 4.1 que la force électrostatique est une force conservative. Ceci permet de présenter une fonction énergie potentielle électrique U pour un système. Lorsqu'une charge effectue un parcours fermé, l'énergie potentielle du système ne change pas. Dans un circuit, un parcours fermé est appelé une *maille*. Le potentiel électrique a été défini comme l'énergie potentielle par unité de charge. Si on prend une charge test q_0 qui se déplace le long d'une maille, on obtient

$$(\Delta U)_{\text{maille}} = q_0\,(\Delta V)_{\text{maille}} = 0\ .$$

Une maille peut contenir plusieurs dispositifs différents. Comme la charge test est quelconque, on obtient la *loi des mailles* :

La somme algébrique des différences de potentiel aux bornes des éléments formant une maille est nulle.

De façon mathématique, la loi des mailles s'écrit

$$(\Delta V)_{\text{maille}} = \sum \Delta V_i = 0\ , \tag{7.2}$$

Loi des mailles

où ΔV_i est la différence de potentiel aux bornes du dispositif i. Cette loi signifie que dans une maille, le potentiel augmente dans certains dispositifs ($\Delta V_i > 0$) et diminue dans d'autres ($\Delta V_i < 0$).

Prenons par exemple la maille illustrée à la figure 7.2, qui comprend quatre dispositifs quelconques. Pour faire l'analyse, on choisit un point de la maille comme point de départ et on choisit un sens (ici antihoraire). On calcule les différences de potentiel sur toute la maille, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. Dans cet exemple, la loi des mailles implique :

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 0\ .$$

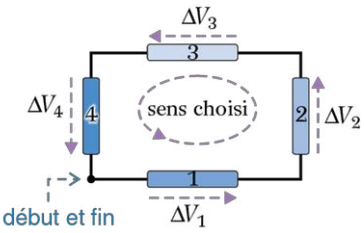


FIGURE 7.2
Un exemple de l'utilisation de la loi des mailles

La loi des nœuds et la loi des mailles sont des règles générales qui sont utilisées pour analyser des circuits. On les appelle les *lois de Kirchhoff*, car elles ont été formulées par le physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) (*voir la figure 7.3*), alors qu'il était encore étudiant. Ces deux lois seront les équations principales du présent chapitre.

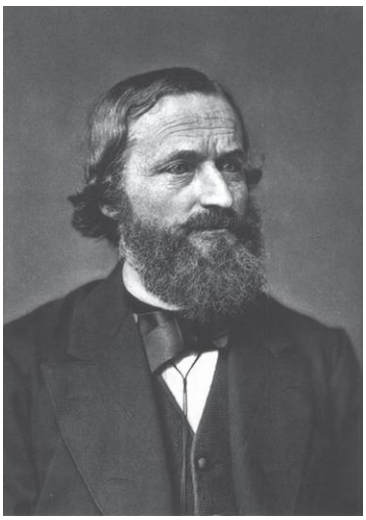
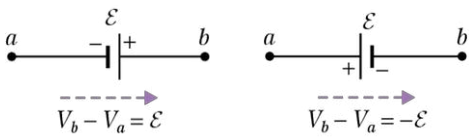


FIGURE 7.3
Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), physicien allemand

Le calcul des différences de potentiel

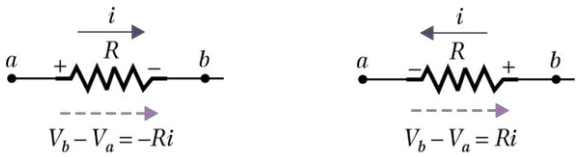
Pour bien utiliser la loi des mailles, il faut calculer la différence de potentiel aux bornes des différents dispositifs d'un circuit. Habituellement, la résistance dans les fils conducteurs est négligeable par rapport aux autres dispositifs d'un circuit. On peut alors négliger la différence de potentiel dans les fils.

- Pour une source de f.é.m., la différence de potentiel est $|\Delta V| = \mathcal{E}$. La différence de potentiel est positive si on va de la borne – à la borne +, et elle est négative si on va de la borne + à la borne –.

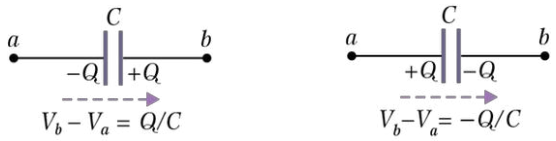


- Pour une résistance, la différence de potentiel est $|\Delta V| = Ri$. Le courant est orienté vers le point ayant un potentiel plus faible. Pour aider à déterminer le bon signe dans la différence de potentiel, on peut ajouter un + devant la

borne où le courant entre dans la résistance et un – vis-à-vis de la borne où le courant sort de la résistance. Le signe de la différence de potentiel est négatif si on va dans le sens du courant (du + au –), et il est positif si on va à l'opposé du courant (du – au +).



- Pour un condensateur, la différence de potentiel est $|\Delta V| = Q/C$, où Q est la charge du condensateur. Le signe de la différence de potentiel dépend du sens utilisé dans la maille : si on va de l'armature négative à l'armature positive, la différence de potentiel est positive, et elle est négative dans le cas contraire.



Dans les prochaines sections, nous étudierons le régime permanent des circuits, c'est-à-dire le courant et les différences de potentiel après un temps suffisamment long pour que le courant ne change pas dans le temps. Dans ce cas, une branche qui contient un condensateur a un courant nul, car celui-ci est chargé ; il se comporte comme un circuit ouvert. Nous allons étudier le régime transitoire dans les circuits ayant un condensateur à la section 7.7.

EXEMPLE 7.1 La différence de potentiel par trois chemins

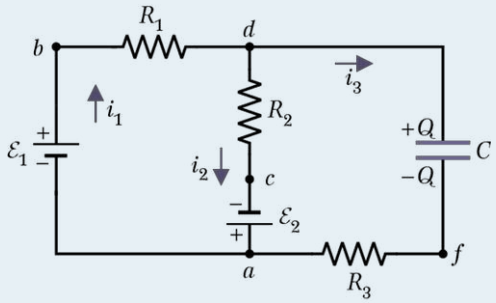
La figure suivante présente un circuit. À un certain instant, les courants dans les branches sont $i_1 = 3{,}31$ mA et $i_2 = 2{,}85$ mA. Le condensateur porte une charge $Q = 1{,}00$ µC.

a. Quel est le courant i_3 ?

b. Calculez la différence de potentiel $V_d - V_a$ pour un parcours qui passe par le point b.

c. Calculez la différence de potentiel $V_d - V_a$ pour un parcours qui passe par le point c.

d. Calculez la différence de potentiel $V_d - V_a$ pour un parcours qui passe par la point f.



$\mathcal{E}_1 = 3{,}00$ V $\quad \mathcal{E}_2 = 1{,}50$ V

$R_1 = 500\ \Omega \quad R_2 = 1{,}00$ kΩ

$R_3 = 750\ \Omega \quad C = 1{,}00$ µF

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$i_1 = 3{,}31$ mA $\quad i_2 = 2{,}85$ mA	i_3

Identifier la clé

La **clé** est la loi des nœuds.

Pour le nœud d,

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_3 = i_1 - i_2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$i_3 = 3{,}31\ \text{mA} - 2{,}85\ \text{mA} = 0{,}46\ \text{mA}\ .\ \text{(réponse)}$$

SOLUTION
Illustrer la situation
À la figure 7.4, nous redessinons le circuit en plaçant les courants à côté des résistances. Nous ajoutons un + à l'endroit où un courant entre dans la résistance et un – à l'endroit où un courant sort d'une résistance.

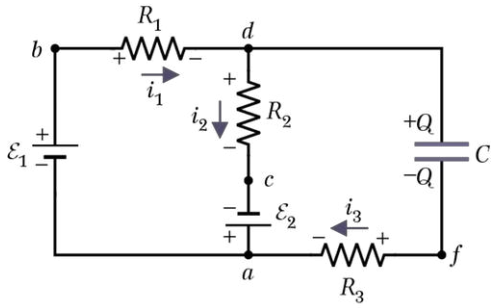


FIGURE 7.4
Le circuit pour l'exemple 7.1

Identifier la clé
Pour calculer la différence de potentiel entre deux points, la **clé** est de partir du point initial et de se rendre au point final en calculant la somme algébrique des différences de potentiel à travers les dispositifs traversés.

SOLUTION b.
Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$\mathcal{E}_1 = 3{,}00\ \text{V}$	$R_1 = 500\ \Omega$	$V_d - V_a$
$i_1 = 3{,}31\ \text{mA}$		

De a à d en passant par le point b signifie que le déplacement se fait dans la branche de gauche.

Identifier la clé
À partir du point a, nous traversons $\mathcal{E}_1$ de la borne – à la borne + ($\Delta V > 0$), puis la résistance R_1 dans le sens du courant (du + au –, donc $\Delta V < 0$) :

$$V_a + \mathcal{E}_1 - R_1 i_1 = V_d \Rightarrow V_d - V_a = \mathcal{E}_1 - R_1 i_1\ . \quad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$\begin{aligned} V_d - V_a &= 3{,}00\ \text{V} - 500\ \Omega \times 0{,}003\,31\ \text{A} \\ &= 1{,}35\ \text{V}\ . \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.
Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$\mathcal{E}_2 = 1{,}50\ \text{V}$	$R_2 = 1{,}00\ \text{k}\Omega$	$V_d - V_a$
$i_2 = 2{,}85\ \text{mA}$		

On se déplace dans la branche du centre.

Identifier la clé
Cette fois-ci, nous traversons $\mathcal{E}_2$ de la borne + à la borne – ($\Delta V < 0$). De même, nous traversons la résistance dans le sens opposé au courant (du – au +, donc $\Delta V > 0$). La **clé** est alors

$$V_a - \mathcal{E}_2 + R_2 i_2 = V_d \Rightarrow V_d - V_a = -\mathcal{E}_2 + R_2 i_2\ . \quad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$\begin{aligned} V_d - V_a &= -1{,}50\ \text{V} + 1000\ \Omega \times 0{,}002\,85\ \text{A} \\ &= 1{,}35\ \text{V}\ . \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION d.
Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$C = 1{,}00\ \mu\text{F}$	$Q = 1{,}00\ \mu\text{C}$	$V_d - V_a$
$i_3 = 0{,}46\ \text{mA}$	$R_3 = 750\ \Omega$	

On se déplace dans la branche de droite.

Identifier la clé
Nous traversons la résistance dans le sens opposé au courant (du – au +, donc $\Delta V > 0$). Nous traversons ensuite le condensateur de l'armature négative vers l'armature positive ($\Delta V > 0$). La **clé** est alors

$$V_a + R_3 i_3 + \frac{Q}{C} = V_d \Rightarrow V_d - V_a = R_3 i_3 + \frac{Q}{C}\ . \quad \text{(iv)}$$

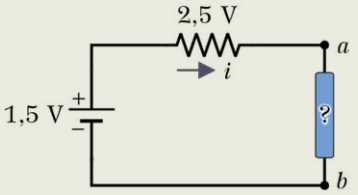
Résoudre le problème
Nous obtenons

$$\begin{aligned} V_d - V_a &= 750\ \Omega \times 0{,}000\,46\ \text{A} + \frac{1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{F}} \\ &= 1{,}35\ \text{V}\ . \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
Pour les trois parcours, nous obtenons la même différence de potentiel entre les points a et d, comme il se doit.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.1

Dans le circuit suivant, un dispositif inconnu est branché à une pile de 1,5 V et à une résistance. La différence de potentiel aux bornes de la résistance est de 2,5 V. Quelle est la différence de potentiel $V_b - V_a$?



7.3 Les piles réelles

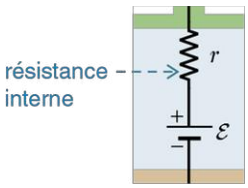


FIGURE 7.5
Une pile réelle peut être analysée comme une pile idéale avec une résistance interne.

À la section 4.9, nous avons vu qu'une pile est une source de f.é.m. qui produit une différence de potentiel à ses bornes. Dans le cas d'une pile idéale, la différence de potentiel ne dépend pas du courant qui la traverse, et elle est égale à la f.é.m. ($\Delta V_{\text{pile}} = \mathcal{E}$). Dans le cas d'une pile réelle, le courant affecte la différence de potentiel aux bornes de la pile : en circuit ouvert, $\Delta V_{\text{pile}} = \mathcal{E}$, alors que lorsqu'un courant circule dans la pile, la différence de potentiel est différente de la f.é.m. Ainsi, la pile possède une *résistance interne*. On modélise une pile réelle comme une pile idéale accompagnée d'une résistance interne r, comme le montre la figure 7.5.

Pour obtenir l'effet de la résistance interne sur la différence de potentiel aux bornes de la pile, on branche une pile à une résistance R. À la figure 7.6a, l'interrupteur est ouvert, et il n'y a pas de courant dans la pile. La différence de potentiel aux bornes de la pile est $\Delta V_{\text{pile}} = V_b - V_a$. On obtient

$$V_a + \mathcal{E} - r(0) = V_b \Rightarrow V_b - V_a = \mathcal{E} \ .$$

La différence de potentiel aux bornes de la pile correspond à la f.é.m. À la figure 7.6b, l'interrupteur est fermé, et un courant i circule dans la pile (de la borne négative à la borne positive) et dans le circuit. On calcule le courant à l'aide de la loi des mailles, en commençant au point a et en parcourant la maille en sens horaire :

$$\mathcal{E} - ri - Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \ . \tag{7.3}$$

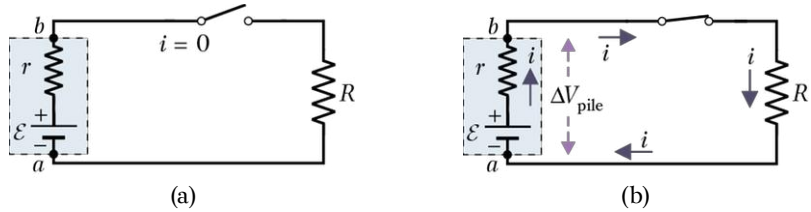


FIGURE 7.6
Une pile réelle est branchée à une résistance. (a) L'interrupteur est ouvert. (b) L'interrupteur est fermé.

À partir de ce courant, on calcule la différence de potentiel aux bornes de la pile :

$$V_a + \mathcal{E} - ri = V_b \Rightarrow V_b - V_a = \mathcal{E} - r\frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

$$V_b - V_a = \frac{r\mathcal{E} + R\mathcal{E} - r\mathcal{E}}{r + R}$$

$$\Delta V_{\text{pile}} = \frac{R}{r + R}\mathcal{E}\,. \tag{7.4}$$

La différence de potentiel est plus faible que la f.é.m., sauf si $r = 0$, ce qui correspond à une pile idéale. Si la résistance R est beaucoup plus grande que la résistance interne, alors $\Delta V_{\text{pile}} \approx \mathcal{E}$, et on peut négliger l'effet de la résistance interne de la pile. Si le courant circule de la borne positive à la borne négative (ce qui est le cas lorsqu'on recharge une pile), la différence de potentiel à ses bornes sera plus élevée que la f.é.m.

La f.é.m. correspond à l'énergie chimique par unité de charge transformée en énergie électrique dans la pile. La résistance interne transforme une partie de l'énergie électrique en énergie thermique. Pour cette raison, si un courant important circule dans une pile, celle-ci va devenir chaude. On peut distinguer le taux d'énergie chimique transformée ($P_{\mathcal{E}}$, la puissance de la f.é.m.), le taux d'énergie thermique dissipée dans la pile (P_r, la puissance dissipée dans la résistance interne) et le taux d'énergie nette fournie par la pile (P_{pile}, la puissance fournie par la pile au circuit) :

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}i \qquad \text{(puissance de la f.é.m.)} \tag{7.5}$$

$$P_r = ri^2 \qquad \text{(puissance de la résistance interne)} \tag{7.6}$$

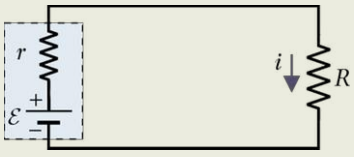
$$P_{\text{pile}} = \Delta V_{\text{pile}}\, i = P_{\mathcal{E}} - P_r \qquad \text{(puissance fournie par la pile).} \tag{7.7}$$

Dans de nombreuses situations, la résistance interne d'une pile est beaucoup plus petite que les autres résistances, et on peut considérer la pile comme une pile idéale. C'est ainsi que nous procéderons dans les prochaines sections, à moins d'un avis contraire.

Défi animé 7.1
La différence de potentiel aux bornes d'une pile réelle placée dans un circuit est-elle toujours inférieure à sa f.é.m. ?

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.2

La figure suivante montre une pile réelle branchée à une résistance. Le circuit est en fonction durant un grand intervalle de temps. La résistance interne de la pile augmente légèrement avec le temps. Comment varie alors le courant dans la résistance ?



EXEMPLE 7.2 La résistance interne d'une pile

On branche une pile de 1,50 V à une résistance de 4,00 Ω. On mesure une différence de potentiel de 1,38 V aux bornes de la pile.

a. Quelle est la résistance interne de la pile ?

b. Quelle est la puissance dissipée dans la pile ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le circuit est illustré à la figure 7.7.

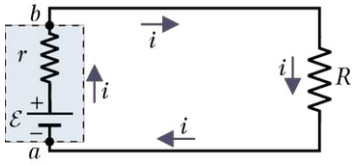


FIGURE 7.7
Le circuit pour l'exemple 7.2

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\mathcal{E} = 1{,}50\ \text{V}$ $R = 4{,}00\ \Omega$	r
$\Delta V_{\text{pile}} = 1{,}38\ \text{V}$	P_r

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est la loi des mailles. Nous pouvons commencer au point a :

$$\Delta V_{\text{pile}} - Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{\Delta V_{\text{pile}}}{R} . \qquad \text{(i)}$$

Ensuite, la deuxième **clé** consiste à calculer $V_b - V_a = \Delta V_{\text{pile}}$ en fonction de r :

$$V_a + \mathcal{E} - ri = V_b \Rightarrow r = \frac{\mathcal{E} - (V_b - V_a)}{i} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (i) dans l'équation (ii) et remplaçons les valeurs :

$$r = \frac{(\mathcal{E} - \Delta V_{\text{pile}})\, R}{\Delta V_{\text{pile}}}$$

$$r = \frac{(1{,}50\ \text{V} - 1{,}38\ \text{V})\ 4{,}00\ \Omega}{1{,}38\ \text{V}} = 0{,}348\ \Omega = 0{,}35\ \Omega .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que la puissance dissipée dans la pile correspond à la puissance dans la résistance interne :

$$P_r = ri^2 , \qquad \text{(iii)}$$

où le courant est calculé à l'aide de la loi des mailles :

$$\mathcal{E} - ri - Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{r + R} . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le courant dans le circuit à l'aide de l'équation (iv) :

$$i = \frac{1{,}50\ \text{V}}{4{,}00\ \Omega + 0{,}348\ \Omega} = 0{,}345\ \text{A} . \qquad \text{(v)}$$

Nous obtenons ensuite la puissance dissipée dans la pile :

$$P_r = 0{,}348\ \Omega\,(0{,}345\ \text{A})^2 = 0{,}041\ \text{W}$$
$$= 41\ \text{mW} .$$

(réponse)

Valider la réponse

Les réponses sont arrondies à deux chiffres significatifs à cause de la soustraction utilisée dans le calcul de la résistance interne.

7.4 L'association de résistances

Pour des circuits constitués d'une seule source de f.é.m. et de plusieurs résistances, il est possible de trouver un circuit équivalent, constitué d'une source de f.é.m. et d'une seule résistance. À partir du circuit équivalent, on peut déterminer le courant qui circule dans la pile, puis calculer le courant et la différence de potentiel dans chaque résistance. Cette méthode est équivalente à celle qui a été présentée à la section 5.4 pour analyser les circuits de condensateurs.

Les résistances en série

Lorsque des résistances sont branchées l'une à la suite de l'autre, comme le montre la figure 7.8, on dit qu'elles sont branchées *en série*. Ce circuit ne possède qu'une seule maille, sans nœud. On peut donc énoncer ce qui suit.

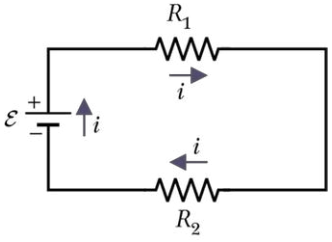


FIGURE 7.8
Les résistances sont branchées en série.

Lorsque des éléments d'un circuit sont branchés en série, ils sont parcourus par le même courant.

Dans la présente situation,

$$i_1 = i_2 = i \qquad \text{(en série)} \; . \tag{7.8}$$

On veut remplacer le circuit par un circuit ayant une seule résistance équivalente, comme le montre la figure 7.9b. Le circuit est équivalent si, pour une même source de f.é.m., on obtient un même courant i. Afin d'obtenir la relation entre la résistance équivalente et les résistances du circuit initial, on utilise la loi des mailles pour chaque circuit. D'abord, pour le circuit original de la figure 7.9a, on considère la maille *abcda* :

$$+\mathcal{E} - R_1 i - R_2 i = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = (R_1 + R_2)\, i \; . \tag{7.9}$$

Dans le cas du circuit équivalent de la figure 7.9b, on applique la loi des mailles pour la maille *abefa* :

$$\mathcal{E} - R_{\text{éq}} i = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = R_{\text{éq}} i \; . \tag{7.10}$$

En comparant les équations 7.9 et 7.10, on obtient

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 \; .$$

Si le circuit comprend N résistances en série, la résistance équivalente est la somme des résistances :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \; . \tag{7.11}$$

Résistance équivalente (en série)

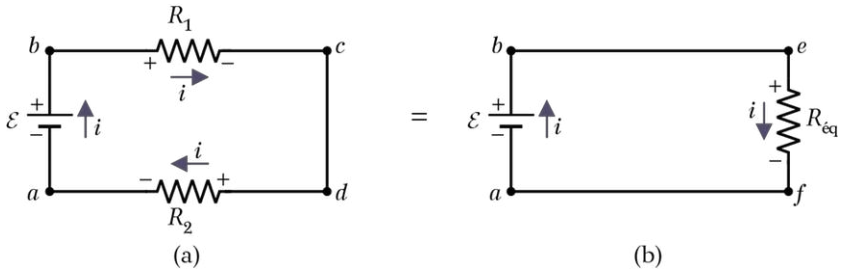


FIGURE 7.9
(a) Un circuit de résistances en série. (b) Le circuit équivalent.

REMARQUE

La résistance équivalente d'un groupement de résistances en série est plus grande que chacune des résistances du circuit initial.

Le courant est le même dans les résistances branchées en série. On le calcule à l'aide du circuit équivalent. Si $\Delta V = V_b - V_a$ (ce qui correspond ici à $\mathcal{E}$), le courant est donné par l'équation 6.26 :

$$i = \frac{\Delta V}{R_{\text{éq}}} = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2} \; . \tag{7.12}$$

La différence de potentiel est différente pour chaque résistance. Selon l'équation 6.26, la différence de potentiel aux bornes d'une résistance est $\Delta V = Ri$, ce qui donne, pour le circuit de la figure 7.9a, avec deux résistances en série,

$$\Delta V_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Delta V \tag{7.13}$$

$$\Delta V_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta V \; . \tag{7.14}$$

On voit que la différence de potentiel ΔV se divise en deux. Pour cette raison, on dit que l'association de deux résistances en série constitue un *diviseur de tension*. La résistance la plus élevée a la plus grande différence de potentiel.

La puissance fournie par la source de f.é.m. est transformée en énergie thermique dans les deux résistances. Pour un circuit à deux résistances, la puissance dans chacune d'elles est, selon l'équation 6.30 de la page 212,

$$P_1 = R_1 i^2 \tag{7.15}$$

$$P_2 = R_2 i^2 \ . \tag{7.16}$$

Comme le courant est le même dans les deux résistances, c'est la plus grande résistance qui dissipe la plus grande puissance.

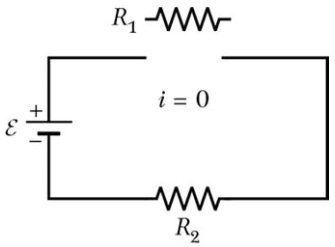


FIGURE 7.10
Si on débranche un élément en série, le courant devient nul.

Si on débranche un élément du circuit en série, comme le montre la figure 7.10, le courant ne passe plus. Ceci est équivalent à ajouter une résistance $R \to \infty$. La résistance équivalente du circuit devient infinie. Cette façon de procéder est utilisée dans les éléments de sécurité tels que les fusibles et les disjoncteurs. Ces éléments sont montés en série dans un circuit. Si le courant dans le circuit dépasse une valeur prédéfinie, le fusible et le disjoncteur se comportent comme un interrupteur ouvert, et le courant tombe à zéro. Les fusibles (*voir la figure 7.11*) et les disjoncteurs permettent d'éviter que le courant dans un circuit devienne très important, ce qui pourrait produire une surchauffe et endommager le circuit et même provoquer un incendie.

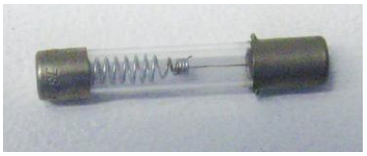


FIGURE 7.11
Un fusible utilisé pour protéger un ampèremètre d'un courant trop important

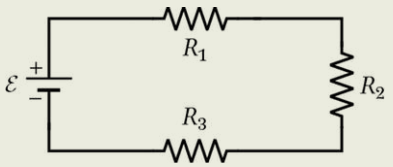
En résumé, pour un groupement de N résistances en série,

- Chaque résistance est parcourue par le même courant :
$$i = i_1 = i_2 = \cdots = i_N \ .$$
- La différence de potentiel aux bornes d'une résistance R_j est $\Delta V_j = R_j i$. La différence de potentiel et la puissance dissipée sont plus grandes pour la résistance la plus élevée.
- L'ensemble peut être remplacé par une résistance équivalente
$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \ ,$$
avec le même courant i.
- La différence de potentiel aux bornes du circuit équivalent (ΔV) est égale à la somme des différences de potentiel de chaque élément :
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_N \ .$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.3

Le circuit suivant montre trois résistances branchées à une pile, où $R_1 < R_2 < R_3$. Classez les résistances selon un ordre croissant :

a. du courant qui les traverse ;
b. de la différence de potentiel à leurs bornes ;
c. de la puissance dissipée.



Les résistances en parallèle

La figure 7.12 illustre un circuit où deux résistances sont branchées *en parallèle*, c'est-à-dire que leurs bornes sont reliées ensemble. Les points de jonction a et b sont des nœuds. La différence de potentiel aux bornes de R_1 est la même que la différence de potentiel aux bornes de R_2, c'est-à-dire $V_a - V_b$.

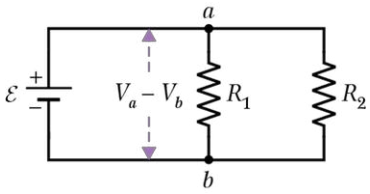


FIGURE 7.12
Les résistances sont branchées en parallèle.

> Des éléments branchés en parallèle ont tous la même différence de potentiel.

On peut donc dire que, pour la situation illustrée à la figure 7.12,

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_a - V_b = \mathcal{E} \ .$$

Comme dans le cas des résistances en série, il est possible de remplacer le circuit par un circuit équivalent, composé d'une seule résistance, pour lequel la source de f.é.m. fournira le même courant i que le circuit original. Comme le montre la figure 7.13a, le courant i qui se déplace dans la source de f.é.m. se divise en deux au nœud a. Selon la loi des nœuds,

$$i = i_1 + i_2 \ . \tag{7.17}$$

On calcule le courant dans chaque résistance à l'aide de l'équation $i = \Delta V/R = \mathcal{E}/R$ pour le circuit initial et pour le circuit équivalent :

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad , \quad i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} \quad , \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}} \ .$$

En insérant ces résultats dans l'équation 7.17, on obtient

$$\frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) .$$

La résistance équivalente d'un circuit en parallèle se calcule à partir de l'addition des inverses des résistances. En général, si le circuit est composé de N résistances, la résistance équivalente est

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}\right)^{-1} \ . \tag{7.18}$$

Résistance équivalente (en parallèle)

REMARQUE

La résistance équivalente d'un circuit en parallèle est plus faible que chacune des résistances du circuit initial.

À partir du circuit équivalent, on calcule le courant i :

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}} \ . \tag{7.19}$$

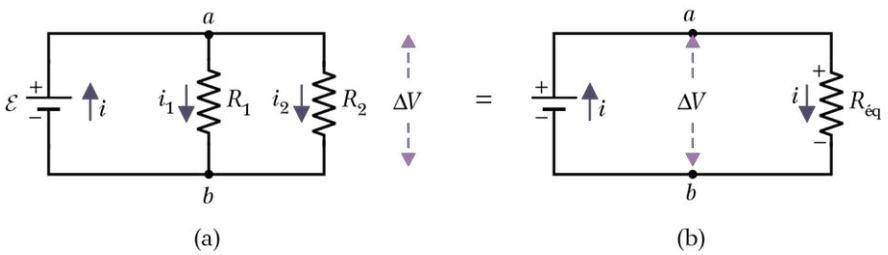


FIGURE 7.13
(a) Un circuit de résistances en parallèle. (b) Le circuit équivalent.

Le courant dans chacune des résistances est

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad , \quad i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} \, . \tag{7.20}$$

On voit que le courant est plus intense dans la résistance la plus faible.

Dans le cas particulier de deux résistances en parallèle de la figure 7.13a, on peut utiliser un même dénominateur dans l'addition des inverses et obtenir

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \, . \tag{7.21}$$

Avec deux résistances, le courant i se divise en deux au nœud a. Ce circuit est appelé un *diviseur de courant*. Avec la résistance équivalente donnée à l'équation 7.21, on obtient la relation suivante pour le circuit équivalent :

$$\mathcal{E} = R_{\text{éq}} i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \, i \, .$$

Insérons ce résultat dans l'équation 7.20 pour obtenir le courant dans chaque résistance en fonction du courant i :

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \, i \tag{7.22}$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \, i \, . \tag{7.23}$$

L'énergie fournie par la source de f.é.m. est dissipée dans chacune des résistances. Comme $P = (\Delta V)^2 / R$, on obtient

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} \quad , \quad P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} \, .$$

Donc, c'est la plus petite résistance qui dissipe la plus grande puissance lorsque les résistances sont en parallèle. Ceci peut vous sembler bizarre à première vue, étant donné que la puissance peut se calculer à l'aide de l'équation $P = Ri^2$, mais en fait, le courant est plus élevé dans la plus petite résistance.

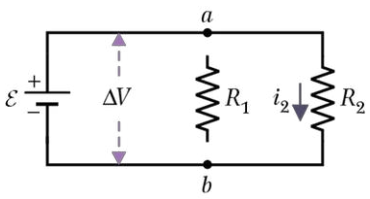


FIGURE 7.14
On débranche la résistance R_1. Ceci ne change rien pour la résistance R_2.

Si on débranche une résistance dans le circuit en parallèle, comme le montre la figure 7.14, ceci ne change rien pour l'autre résistance. En effet, la résistance R_2 est soumise à la même différence de potentiel, de telle sorte que le même courant circule dans cette résistance. Pour cette raison, les circuits d'une installation électrique sont des circuits en parallèle. Si vous éteignez votre téléviseur, cela ne change pas le circuit de la lampe qui éclaire votre salon.

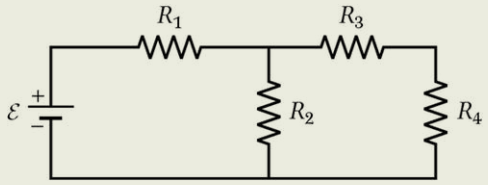
En résumé, pour un groupement de N résistances en parallèle :

- Chaque résistance a la même différence de potentiel à ses bornes :
$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_N \, .$$
- Le courant dans une résistance R_j est $i_j = (\Delta V)/R_j$. Le courant et la puissance dissipée sont plus importants dans la plus petite résistance.
- L'ensemble peut être remplacé par une résistance équivalente :
$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \right)^{-1} \, ,$$
avec la même différence de potentiel ΔV et un courant $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$.

Défi animé 7.2
Deux ampoules ayant des résistances différentes sont branchées à une pile. Le type de branchement (en série ou parallèle) influe-t-il sur la luminosité des ampoules ? Quelle ampoule sera la plus lumineuse ?

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.4

Dans le circuit suivant, les quatre résistances sont identiques. Classez les résistances par ordre croissant selon la puissance dissipée.



Les circuits mixtes

Pour des circuits ayant une seule source de f.é.m. et des résistances, la méthode de la résistance équivalente permet de calculer le courant et la différence de potentiel pour chaque résistance. La technique suivante peut être utilisée.

TECHNIQUE 7.1 Les circuits de résistances ayant une seule source

1. **Identifier** une partie du circuit comme un ensemble de résistances en série (l'une à la suite de l'autre) ou en parallèle (avec les bornes de chacune reliées à un même nœud). Calculez la résistance équivalente de l'ensemble:

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad \text{(en série)}$$

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}\right)^{-1}. \qquad \text{(en parallèle)}$$

2. **Redessiner le circuit** avec la résistance équivalente de cette partie.

3. **Répéter les étapes précédentes** jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule résistance branchée à la source de la f.é.m. Le courant dans le circuit est

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}}.$$

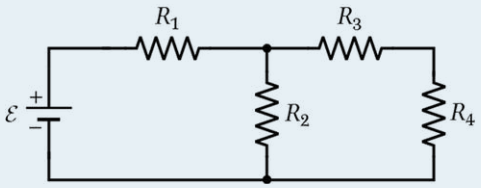
4. **Retourner en arrière** pour remplacer les résistances équivalentes par les résistances initiales.
   - Pour des résistances en série, elles ont le même i, et $\Delta V_j = R_j i$.
   - Pour des résistances en parallèle, elles ont le même ΔV, et $i_j = (\Delta V)/R_j$.

EXEMPLE 7.3 Un circuit de résistances

On branche quatre résistances à une batterie de 12,0 V, comme le montre la figure suivante.

a. Quelle est la puissance fournie par la batterie ?

b. Déterminez le courant et la différence de potentiel pour chaque résistance.



$R_1 = 500\ \Omega$

$R_2 = 800\ \Omega$

$R_3 = 1100\ \Omega$

$R_4 = 400\ \Omega$

Connues		Inconnues	
$R_1 = 500\ \Omega$	$R_2 = 800\ \Omega$	$P_\mathcal{E}$	
$R_3 = 1100\ \Omega$	$R_4 = 400\ \Omega$	i_j	ΔV_j
$\mathcal{E} = 12{,}0\ \text{V}$			

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Pour calculer la puissance de la pile, nous devons remplacer le circuit par un circuit équivalent, avec une seule résistance.

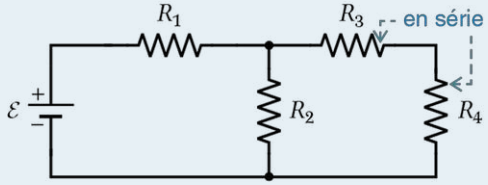
Identifier la clé

Pour calculer la puissance de la pile, la **clé** est l'équation 6.28 :

$$P_\mathcal{E} = \mathcal{E}i\ . \qquad \text{(i)}$$

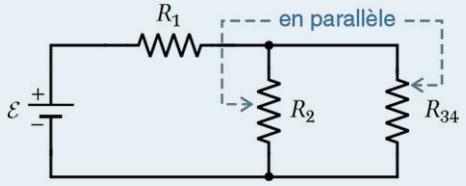
Pour déterminer le courant i, nous devons remplacer le circuit par le circuit équivalent, avec une seule résistance.

Résoudre le problème



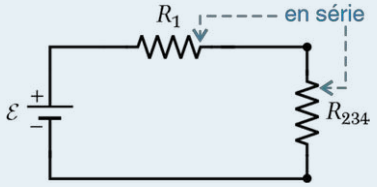
La résistance équivalente R_{34} est

$$R_{34} = 1100\ \Omega + 400\ \Omega = 1500\ \Omega\ .$$



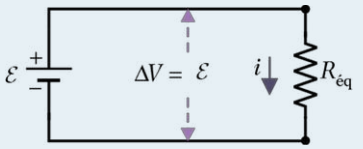
La résistance équivalente R_{234} est

$$R_{234} = \left(\frac{1}{800\ \Omega} + \frac{1}{1500\ \Omega}\right)^{-1} = 522\ \Omega\ .$$



La résistance équivalente du circuit est

$$R_{\text{éq}} = 500\ \Omega + 522\ \Omega = 1022\ \Omega\ .$$



Le courant i du circuit est

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}} = \frac{12{,}0\ \text{V}}{1022\ \Omega} = 0{,}011\,74\ \text{A}\ .$$

Selon l'équation (i), la puissance de la pile est

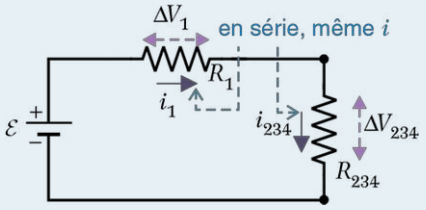
$$P_\mathcal{E} = 12{,}0\ \text{V} \times 0{,}011\,74\ \text{A} = 0{,}141\ \text{W}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

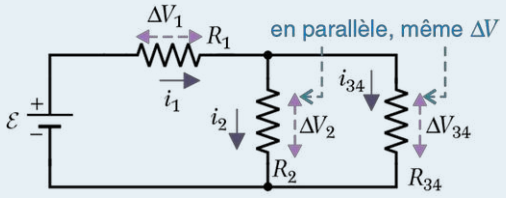
Identifier la clé

Nous devons reconstruire le circuit initial.

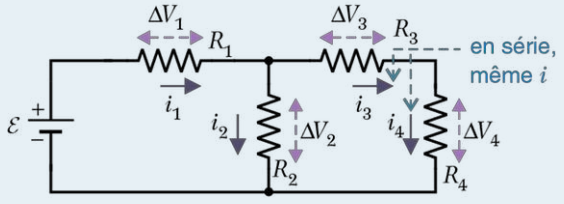
Résoudre le problème



$$i = i_1 = i_{234} = 0{,}011\,74\ \text{A} = 11{,}7\ \text{mA}$$
$$\Delta V_1 = R_1 i_1 = 500\ \Omega \times 0{,}011\,74\ \text{A} = 5{,}87\ \text{V}$$
$$\Delta V_{234} = R_{234} i_{234} = 522\ \Omega \times 0{,}011\,74\ \text{A} = 6{,}13\ \text{V}$$



$$\Delta V_{234} = \Delta V_2 = \Delta V_{34} = 6{,}13\ \text{V}$$
$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{6{,}13\ \text{V}}{800\ \Omega} = 7{,}66\ \text{mA}$$
$$i_{34} = \frac{\Delta V_{34}}{R_{34}} = \frac{6{,}13\ \text{V}}{1500\ \Omega} = 4{,}11\ \text{mA}$$



$$i_{34} = i_3 = i_4 = 4{,}11\ \text{mA}$$

$$\Delta V_3 = R_3 i_3 = 1\,100\ \Omega \times 4{,}11 \times 10^{-3}\ \text{A} = 4{,}49\ \text{V}$$
$$\Delta V_4 = R_4 i_4 = 400\ \Omega \times 4{,}11 \times 10^{-3}\ \text{A} = 1{,}64\ \text{V}$$

En résumé, le courant et la différence de potentiel de chaque résistance sont :

$i_1 = 11{,}7\ \text{mA}$ $\quad \Delta V_1 = 5{,}87\ \text{V}$
$i_2 = 7{,}66\ \text{mA}$ $\quad \Delta V_2 = 6{,}13\ \text{V}$
$i_3 = 4{,}11\ \text{mA}$ $\quad \Delta V_3 = 4{,}49\ \text{V}$
$i_4 = 4{,}11\ \text{mA}$ $\quad \Delta V_4 = 1{,}64\ \text{V}$.

Valider la réponse

Nous vérifions que $i_2 + i_3 = i_1$, que $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \mathcal{E}$ et que $\Delta V_3 + \Delta V_4 = \Delta V_2$, comme il se doit pour le présent circuit. L'ordre de grandeur est correct.

7.5 Les instruments de mesure

Pour mesurer le courant dans une branche, on doit ouvrir le circuit et placer un *ampèremètre*, comme à la figure 7.15. Le courant doit traverser l'appareil. Un appareil réel possède une certaine résistance interne r, que le fabricant indique dans les spécifications. L'appareil change le courant dans la branche, car en le branchant, on ajoute une résistance r en série avec les autres éléments de la branche. L'effet est négligeable si la résistance interne de l'ampèremètre est beaucoup plus faible que la résistance des autres éléments dans la branche. Si ce n'est pas le cas, on doit en tenir compte dans l'analyse en ajoutant la résistance interne r en série avec les autres éléments de la branche.

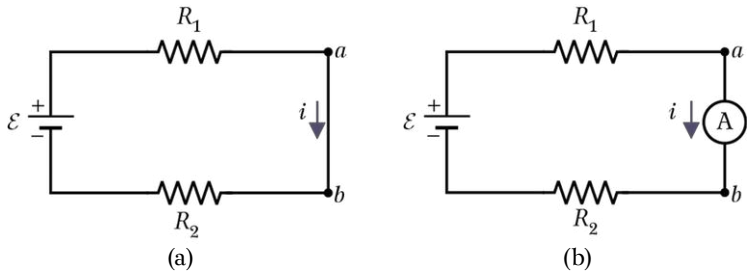


FIGURE 7.15
Pour mesurer le courant entre les points a et b, on insère un ampèremètre entre ces points.

La différence de potentiel entre deux points d'un circuit se mesure avec un *voltmètre*. Contrairement à l'ampèremètre, on n'ouvre pas le circuit pour utiliser le voltmètre ; il suffit de le brancher entre les points où l'on veut mesurer la différence de potentiel, comme le montre la figure 7.16. L'appareil est donc branché en parallèle par rapport aux éléments situés entre les points a et b. Pour que le voltmètre ait un effet négligeable sur le circuit, il faut que sa résistance interne r soit beaucoup plus grande que la résistance des éléments entre les points a et b. Typiquement, la résistance interne d'un voltmètre est de l'ordre de la dizaine de mégohms. Dans ce cas, on doit se préoccuper de sa résistance interne seulement si les résistances sont de l'ordre de $10^6\ \Omega$ ou plus grandes.

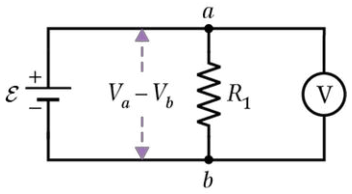
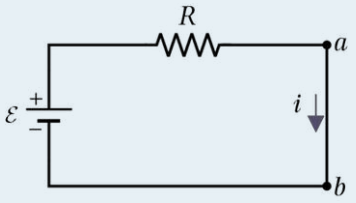


FIGURE 7.16
Pour mesurer la différence de potentiel entre les points a et b, on branche un voltmètre entre ces points.

Un *multimètre* est un appareil qui regroupe les fonctions d'ampèremètre et de voltmètre, en plus de fonctions comme celles d'un *ohmmètre* pour mesurer la résistance et parfois d'un *capacimètre* pour mesurer la capacité des condensateurs.

EXEMPLE 7.4 L'influence d'un ampèremètre

Pour mesurer le courant dans le circuit de la figure ci-contre, on branche un ampèremètre entre les points a et b. La f.é.m. est de 1,50 V, la résistance est de 80,0 Ω et la résistance interne de l'ampèremètre, de 10,0 Ω.



a. Quelle est la valeur de courant indiquée par l'appareil ?

b. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la résistance R ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le fait de brancher un ampèremètre entre les points a et b équivaut à ajouter une résistance r (la résistance interne de l'ampèremètre) entre ces points. La figure 7.17 illustre le circuit.

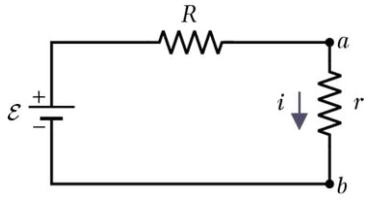


FIGURE 7.17
Le circuit de l'exemple 7.4

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$\mathcal{E} = 1{,}50$ V	$R = 80{,}0\ \Omega$	i
$r = 10{,}0\ \Omega$		ΔV_R

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la loi des mailles pour le circuit complet. Le courant i est le même dans tout le circuit, car il n'y a pas de nœud. En commençant à la borne négative de la source de f.é.m., nous obtenons

$$+\mathcal{E} - Ri - ri = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R+r}\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$i = \frac{1{,}50\ \text{V}}{80{,}0\ \Omega + 10{,}0\ \Omega} = 0{,}016\,7\ \text{A} = 16{,}7\ \text{mA}\,. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** pour calculer la différence de potentiel aux bornes d'une résistance est la définition de la résistance (*voir l'équation 6.26*) :

$$\Delta V = Ri\,.$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\Delta V = 80{,}0\ \Omega \times 0{,}016\,7\ \text{A} = 1{,}33\ \text{V}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La différence de potentiel aux bornes de la résistance R est plus faible que la f.é.m., car il y a une diminution de potentiel aux bornes de la résistance interne de l'ampèremètre.

Si on enlève l'ampèremètre, le courant sera plus élevé, et la différence de potentiel dans la résistance sera égale à la f.é.m.

7.6 Les circuits à plusieurs sources de f.é.m.

Lorsqu'un circuit possède uniquement une source de f.é.m. et des résistances, on peut remplacer le circuit complet par un circuit équivalent, avec une source de f.é.m. et une résistance équivalente. Lorsque le circuit possède plusieurs sources, il faut utiliser les lois de Kirchhoff et obtenir un système d'équations qu'on pourra résoudre. La stratégie suivante donne la stratégie générale pour analyser des circuits quelconques qui sont composés de plusieurs résistances, de plusieurs sources de f.é.m. et même de condensateurs.

STRATÉGIE 7.1 Les circuits et l'application des lois de Kirchhoff

Illustrer la situation
Dessinez le circuit. Si le sens des courants n'est pas donné, faites une hypothèse pour le sens du courant dans chaque branche. Identifiez les courants à l'aide de symboles.

Décortiquer le problème
Indiquez bien les quantités connues et les quantités inconnues.

Identifier les clés
La première **clé** est l'équation des nœuds :

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}} .$$

Pour un circuit ayant n nœuds, la loi des nœuds donne $(n - 1)$ équations indépendantes.

La deuxième **clé** est l'équation des mailles. Pour chaque maille indépendante, vous devez calculer les différences de potentiel, selon la méthode décrite à la section 7.2 :

$$(\Delta V)_{\text{maille}} = \sum \Delta V_i = 0 .$$

Résoudre le problème
Vous obtenez un système d'équations, avec N inconnues et N équations, que vous pouvez résoudre par les méthodes habituelles. Si vous obtenez un courant négatif, cela indique que le courant réel est dans le sens opposé au sens choisi dans votre hypothèse.

Valider la réponse
Il est possible de vérifier la solution en remplaçant les valeurs obtenues dans les équations de la loi des mailles et de la loi des nœuds.

Prenons par exemple le circuit de la figure 7.18, avec le sens des courants déjà choisi. Il y a deux nœuds (c et d). Pour le nœud c, selon la loi des nœuds, on a

$$i_1 + i_2 = i_3 .$$

En ce qui a trait au nœud d, on obtient la même équation. On doit ensuite appliquer la loi des mailles. Pour la maille $abcda$, on a

$$+\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - \mathcal{E}_2 + R_2 i_2 = 0 .$$

Pour la maille $dcefd$, la loi des mailles implique que :

$$-R_2 i_2 + \mathcal{E}_2 - R_3 i_3 + \mathcal{E}_3 = 0 .$$

On peut aussi considérer la maille $abcefda$, mais cette dernière n'est pas indépendante des deux autres. Elle correspond à la somme des deux autres mailles. L'équation obtenue avec la maille $abcefda$ n'apporte donc rien de plus que les équations qu'on a trouvées avec les deux autres mailles. Avec un nœud et deux mailles, on obtient trois équations indépendantes, ce qui permet de trouver trois inconnues.

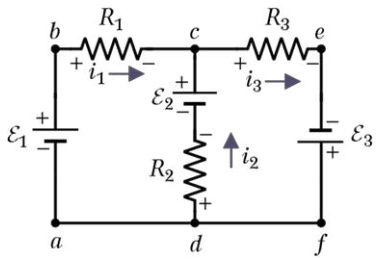
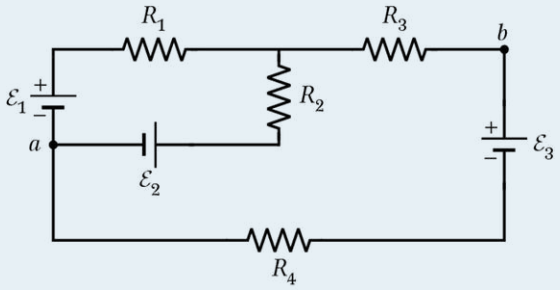


FIGURE 7.18
Un circuit à deux mailles

EXEMPLE 7.5 Un circuit plus complexe

Un circuit est constitué de trois sources de f.é.m. ($\mathcal{E}_1 = 3{,}00$ V, $\mathcal{E}_2 = 4{,}40$ V et $\mathcal{E}_3 = 5{,}50$ V) et de quatre résistances ($R_1 = 1{,}00$ kΩ, $R_2 = 2{,}30$ kΩ, $R_3 = 1{,}70$ kΩ et $R_4 = 0{,}800$ kΩ), comme le montre la figure ci-contre.



a. Calculez le courant qui circule dans chaque source de f.é.m.

b. Calculez la différence de potentiel $V_b - V_a$.

SOLUTION

Illustrer la situation

À la figure 7.19, nous ajoutons au circuit les courants, incluant un sens. Ceci est une hypothèse.

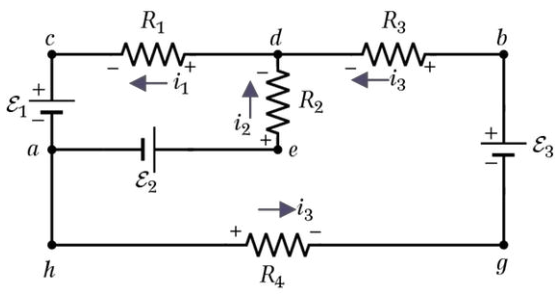


FIGURE 7.19
Le circuit de l'exemple 7.5, avec le sens des courants

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$\mathcal{E}_1 = 3{,}00$ V	$R_1 = 1{,}00$ kΩ	i_1
$\mathcal{E}_2 = 4{,}40$ V	$R_2 = 2{,}30$ kΩ	i_2
$\mathcal{E}_3 = 5{,}50$ V	$R_3 = 1{,}70$ kΩ	i_3
	$R_4 = 0{,}800$ kΩ	$V_b - V_a$

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est la loi des nœuds. Dans le cas du nœud d,

$$i_2 + i_3 = i_1 \,. \qquad \text{(i)}$$

Ensuite, la deuxième **clé** est la loi des mailles. Nous l'appliquons d'abord à la maille $aedca$:

$$+\mathcal{E}_2 - R_2 i_2 - R_1 i_1 - \mathcal{E}_1 = 0 \,. \qquad \text{(ii)}$$

Ensuite, pour la maille $gbdcahg$, nous obtenons

$$\mathcal{E}_3 - R_3 i_3 - R_1 i_1 - \mathcal{E}_1 - R_4 i_3 = 0 \,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Afin de résoudre les équations, nous commençons par regrouper les termes et remplacer les valeurs. Pour simplifier, nous exprimons les résistances en kΩ, ce qui va donner des courants en mA.

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad \text{(iv)}$$

$$4{,}40 - 2{,}30 i_2 - 1{,}00 i_1 - 3{,}00 = 0$$

$$\Rightarrow 1{,}00 i_1 + 2{,}30 i_2 = 1{,}40 \qquad \text{(v)}$$

$$5{,}50 - 1{,}70 i_3 - 1{,}00 i_1 - 3{,}00 - 0{,}800 i_3 = 0$$

$$\Rightarrow 1{,}00 i_1 + 2{,}50 i_3 = 2{,}50 \qquad \text{(vi)}$$

La variable i_1 se retrouve dans les trois équations, alors que les variables i_2 et i_3 apparaissent seulement dans deux équations. Il est alors plus simple d'isoler i_2 et i_3 en fonction de i_1. À partir de l'équation (v),

$$i_2 = \frac{1{,}40 - 1{,}00 i_1}{2{,}30} = 0{,}6087 - 0{,}4348 i_1 \,. \qquad \text{(vii)}$$

Selon l'équation (vi),

$$i_3 = \frac{2{,}50 - 1{,}00 i_1}{2{,}50} = 1{,}00 - 0{,}400 i_1 \,. \qquad \text{(viii)}$$

Nous insérons ensuite les équations (vii) et (viii) dans l'équation (iv) pour obtenir une équation avec seulement l'inconnue i_1 :

$$i_1 = (0{,}6087 - 0{,}4348 i_1) + (1{,}00 - 0{,}400 i_1)$$

$$1{,}8348 i_1 = 1{,}6087$$

$$i_1 = 0{,}8768 \text{ mA} = 877 \text{ µA} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Nous trouvons les autres valeurs de courant en remplaçant la valeur de i_1 dans les équations (vii) et (viii) :

$$i_2 = \frac{1{,}40 - 0{,}8768}{2{,}30} = 0{,}227 \text{ mA} = 227 \text{ µA} \qquad \text{(réponse)}$$

$$i_3 = 1{,}00 - 0{,}400 \times 0{,}8768 = 0{,}649 \text{ mA} = 649 \text{ µA} .$$
(réponse)

Valider la réponse

Les valeurs positives que nous avons obtenues indiquent que l'hypothèse pour le sens des courants est correcte. Le courant i_1 circule de la borne + à la borne – dans $\mathcal{E}_1$, alors que les deux autres courants circulent de la borne – vers la borne + dans $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ respectivement.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La clé consiste à additionner les différences de potentiel, du point a au point b. Nous pouvons choisir n'importe quel parcours entre les deux points. Nous optons pour le parcours $ahgb$:

$$V_a - R_4 i_3 + \mathcal{E}_3 = V_b \Rightarrow V_b - V_a = \mathcal{E}_3 - R_4 i_3 . \quad \text{(ix)}$$

Résoudre le problème

En tenant compte des résultats trouvés à la partie a., nous obtenons

$$V_b - V_a = 5{,}50 \text{ V} - 0{,}800 \text{ kΩ} \times 0{,}649 \text{ mA}$$
$$= 4{,}98 \text{ V} . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le point b a un potentiel plus élevé, selon le résultat obtenu.

7.7 Les circuits RC

Dans les circuits que nous avons étudiés jusqu'à présent dans ce chapitre, le courant est constant, il ne varie pas dans le temps. Cette situation se produit dans le cas de résistances qui sont branchées à des piles. Quand un condensateur fait partie du circuit, le courant change en fonction du temps. Lorsque le condensateur n'a pas de charge, le courant est important, alors que lorsque le condensateur est chargé complètement, il n'y a plus de courant dans la branche du condensateur. Nous allons maintenant analyser le circuit possédant un condensateur en régime transitoire, c'est-à-dire entre le moment où le condensateur est complètement déchargé et le moment où il est complètement chargé.

La décharge d'un condensateur

Le circuit de la figure 7.20a est constitué d'un condensateur, dont la capacité est C et la charge initiale est Q_m, branché à une résistance R et à un interrupteur. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui permet aux électrons de l'armature négative de se déplacer vers l'armature positive, en passant par la résistance. Ceci produit un courant i dans le circuit. À mesure que la charge du condensateur diminue, le courant diminue aussi. Pour connaître la charge du condensateur et le courant dans le circuit en fonction du temps, on applique la loi des mailles au circuit de la figure 7.20b, pour la maille $abcda$:

$$\Delta V_C + \Delta V_R = \frac{Q}{C} - Ri = 0 . \quad (7.24)$$

Dans cette équation, Q et i sont les valeurs instantanées de la charge du condensateur et du courant dans la résistance. On sait que le courant correspond au taux de variation de la charge. Dans le présent cas, la charge du condensateur diminue ($dQ/dt < 0$). Par conséquent, puisque le courant i est une valeur positive,

$$i = \left|\frac{dQ}{dt}\right| = -\frac{dQ}{dt} . \quad (7.25)$$

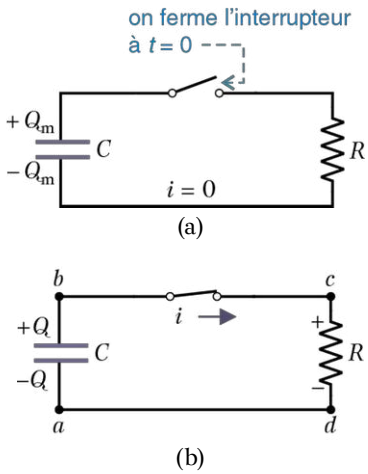


FIGURE 7.20
Un circuit RC : (a) avant la fermeture ; (b) après la fermeture de l'interrupteur

On peut écrire l'équation 7.24 en fonction de la charge Q et des propriétés du circuit :

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0 \,. \tag{7.26}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre. Pour résoudre cette équation, on place les termes qui dépendent de Q dans le membre gauche de l'équation et les autres termes dans le membre droit :

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\,dt \,.$$

Ici, RC est une constante qui dépend des caractéristiques du circuit. On intègre chacun des membres de l'équation :

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + \mathcal{K} \,,$$

où $\mathcal{K}$ est une constante d'intégration. Pour isoler Q, on calcule la fonction exponentielle (l'inverse de ln) pour chaque membre de la dernière équation :

$$Q = e^{\mathcal{K} - t/RC} = e^{\mathcal{K}}\, e^{-t/RC} = \mathcal{K}'\, e^{-t/RC} \,, \tag{7.27}$$

où $\mathcal{K}' = e^{\mathcal{K}}$ est une autre constante. Cette constante doit être déterminée à partir des conditions initiales. Comme $Q = Q_m$ à $t = 0$, on trouve $\mathcal{K}' = Q_m$, et la charge du condensateur en fonction du temps est

$$Q = Q_m\, e^{-t/RC} \,. \tag{7.28}$$

Le paramètre RC est exprimé en unités de temps, car un exposant ne peut pas avoir d'unité. Ce paramètre est la *constante de temps* τ du circuit :

$$\tau \equiv RC \,. \tag{7.29}$$

L'équation 7.28 s'écrit alors

Charge d'un circuit RC (décharge)

$$Q = Q_m\, e^{-t/\tau} \,. \tag{7.30}$$

On calcule le courant en fonction du temps en remplaçant l'équation 7.28 dans l'équation 7.25 :

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -Q_m\, e^{-t/RC}\left(\frac{-1}{RC}\right) = \frac{Q_m}{RC}\, e^{-t/\tau} \,.$$

Le facteur qui multiplie la fonction exponentielle correspond au courant initial dans le circuit, car $Q_m/C = \Delta V_m$ est la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur, et donc la différence de potentiel aux bornes de la résistance. Le courant dans la résistance en fonction du temps est

Courant dans un circuit RC (décharge)

$$i = \frac{Q_m}{RC}\, e^{-t/\tau} = \frac{\Delta V_m}{R}\, e^{-t/\tau} = i_m\, e^{-t/\tau} \,. \tag{7.31}$$

La figure 7.21 illustre la charge du condensateur et le courant en fonction du temps. Les deux fonctions sont des exponentielles décroissantes. À $t = 0$, la

charge et le courant sont maximaux. Ensuite, ils diminuent de façon exponentielle et tendent vers zéro lorsque $t \to \infty$. Après $t = \tau$, la charge est $Q = Q_m/e$, ce qui représente environ 37 % de la charge initiale. Plus la constante de temps est faible, plus le condensateur se décharge rapidement. Si la résistance est faible, le courant initial est élevé, ce qui décharge rapidement le condensateur. C'est le cas par exemple quand un condensateur est branché au flash d'un appareil photo. De même, si la capacité est faible, le condensateur n'a pas une grande charge au départ, et celle-ci diminue rapidement lorsque le condensateur se décharge.

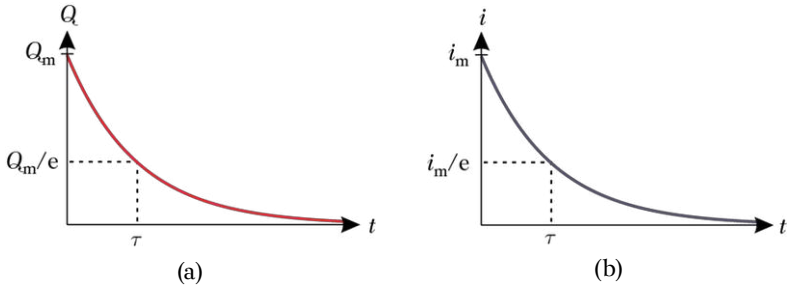


FIGURE 7.21
Pour un circuit RC avec un condensateur qui se décharge : (a) la charge du condensateur en fonction du temps ; (b) le courant dans la résistance en fonction du temps

REMARQUE

Mathématiquement, le condensateur a besoin d'un temps infini pour se décharger complètement. Dans la pratique, après un temps $t = 5\tau$, la charge du condensateur représente moins de 1 % de la charge initiale ; le condensateur peut être considéré comme un condensateur déchargé.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.5

Le tableau suivant présente les données de trois circuits RC différents. Classez les circuits par ordre croissant du temps pour que la charge du condensateur atteigne 50 % de sa valeur initiale.

	Circuit 1	Circuit 2	Circuit 3
Q_m (μC)	2	4	8
R (kΩ)	10	5	3
C (μF)	1	2	3

La charge d'un condensateur

Pour charger un condensateur, on le branche à une source de f.é.m. et à une résistance, comme dans le circuit de la figure 7.22a (*voir la page suivante*). Lorsque $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, et la charge du condensateur est nulle. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. La f.é.m. de la pile produit un champ électrique dans le circuit, et les électrons se déplacent de l'armature supérieure du condensateur vers l'armature inférieure, en passant par la source de f.é.m. et la

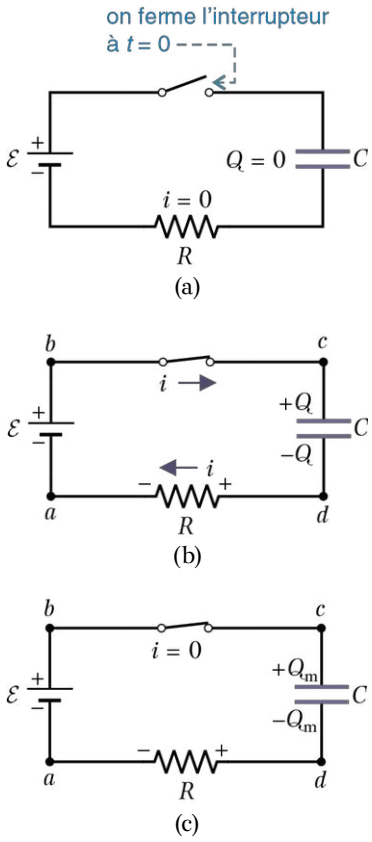


FIGURE 7.22
Un circuit RC avec une source de f.é.m. : (a) avant la fermeture ; (b) après la fermeture de l'interrupteur ; (c) pour $t \to \infty$.

résistance. La charge du condensateur augmente graduellement. La figure 7.22b montre la situation pour $t > 0$, lorsque la charge du condensateur est Q et que le courant dans la résistance est i.

Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est complètement chargé, comme le montre la figure 7.22c. À ce moment, le courant dans le circuit est nul, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est égale à la f.é.m. ($\Delta V_C = \Delta V_m = \mathcal{E}$), et la charge du condensateur est maximale ($Q = Q_m = C\,\Delta V_m = C\mathcal{E}$).

Pour obtenir la charge Q et le courant i en fonction du temps, on applique la loi des mailles, pour la maille *abcda* dans le cas intermédiaire de la figure 7.22b :

$$\Delta V_\mathcal{E} + \Delta V_C + \Delta V_R = +\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - Ri = 0\ . \tag{7.32}$$

Le potentiel diminue lorsqu'on traverse le condensateur, car on va de l'armature positive à l'armature négative. Cette fois-ci, la charge du condensateur augmente. Ainsi,

$$i = \left|\frac{dQ}{dt}\right| = \frac{dQ}{dt}\ . \tag{7.33}$$

En insérant l'équation 7.33 dans l'équation 7.32, on obtient une équation différentielle du premier ordre :

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{7.34}$$

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\,(Q - C\mathcal{E}) = 0\ . \tag{7.35}$$

Pour résoudre cette équation, on doit faire un changement de variable afin d'obtenir une forme semblable à l'équation 7.26. Si on pose $X = Q - C\mathcal{E}$ (ce qui implique que $dX/dt = dQ/dt$), on arrive à l'équation

$$R\frac{dX}{dt} + \frac{X}{C} = 0\ . \tag{7.36}$$

Cette équation est identique à l'équation 7.26, à cela près que Q est remplacée par X. La solution est donnée par l'équation 7.27, en remplaçant Q par X :

$$X = \mathcal{K}'\,e^{-t/\tau}\ ,$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit et $\mathcal{K}'$, une constante d'intégration qu'on doit déterminer à l'aide des données initiales. On peut réinsérer la charge Q dans l'équation :

$$X = Q - C\mathcal{E} = \mathcal{K}'\,e^{-t/\tau} \Rightarrow Q = C\mathcal{E} + \mathcal{K}'\,e^{-t/\tau}\ .$$

À $t = 0$, la charge du condensateur est nulle. En insérant cette donnée dans l'équation précédente, on obtient

$$0 = C\mathcal{E} + \mathcal{K}' \Rightarrow \mathcal{K}' = -C\mathcal{E}\ .$$

La charge du condensateur en fonction du temps est donc

Charge dans un circuit RC (condensateur qui se charge)

$$Q = C\mathcal{E}\ (1 - e^{-t/\tau}) = Q_m\ (1 - e^{-t/\tau})\ . \tag{7.37}$$

La figure 7.23a illustre la charge en fonction du temps. La charge initiale est nulle et pour $t \to \infty$, la charge est $Q = Q_m = C\mathcal{E}$. Après un temps $t = \tau$, la charge est $Q = C\mathcal{E}(1 - 1/e)$, ce qui représente environ 63 % de la charge maximale.

Défi animé 7.3
Dans le cas d'un circuit RC, pouvez-vous prédire l'allure de la différence de potentiel aux bornes de la résistance et du condensateur pendant que ce dernier se charge ?

On trouve le courant qui circule dans la résistance et la source de f.é.m. en dérivant la charge :

$$i = \frac{dQ}{dt} = -C\mathcal{E}\left(\frac{-1}{RC}\right)e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} . \qquad (7.38)$$

C'est la même expression que dans le cas du circuit RC avec un condensateur qui se décharge. À $t = 0$, le courant est $i = i_m = \mathcal{E}/R$, ce qui représente le courant maximal. Le courant en fonction du temps est présenté à la figure 7.23b, et il est donné par :

$$i = i_m e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} . \qquad (7.39)$$

Courant dans un circuit RC (condensateur qui se charge)

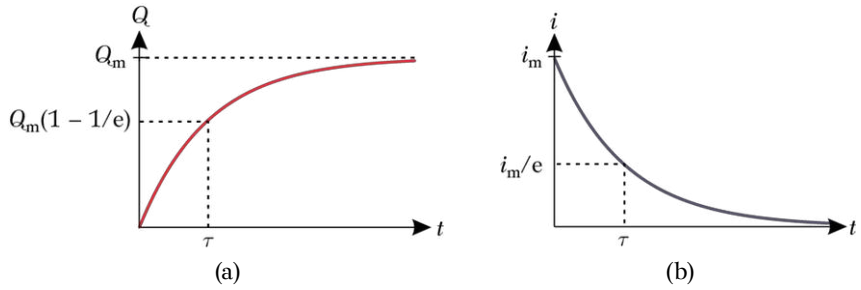
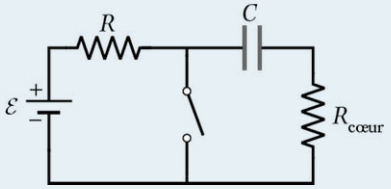


FIGURE 7.23
Pour un circuit RC avec un condensateur qui se charge : (a) la charge en fonction du temps ; (b) le courant en fonction du temps.

REMARQUE
Les équations obtenues sont valables quand le circuit RC possède un condensateur et une résistance. Lorsqu'il y a plusieurs résistances ou plusieurs condensateurs, il est souvent possible de réduire le circuit à un circuit équivalent, avec une seule résistance et un seul condensateur. Les équations précédentes peuvent alors être utilisées dans ce circuit équivalent.

EXEMPLE 7.6 Un stimulateur cardiaque

La figure ci-contre montre le circuit d'un stimulateur cardiaque semblable à celui de la photo en début de chapitre. Le circuit est constitué d'une pile ($\mathcal{E} = 3{,}50$ V), d'une résistance R, d'un condensateur C et d'un interrupteur contrôlé par un système électronique, le tout complété par le cœur, dont la résistance est de 520 Ω. Lorsque l'interrupteur est ouvert, le condensateur doit acquérir 95,0 % de la charge maximale en 0,300 s (le temps entre deux battements). Lorsque l'interrupteur est fermé, le condensateur doit se décharger avec une constante de temps de 0,500 ms à travers le cœur, pour que le cœur reçoive très rapidement l'énergie électrique. Calculez les valeurs de R et de C nécessaires.



SOLUTION

Illustrer la situation

Lorsque l'interrupteur est ouvert, le circuit est celui de la figure 7.24a, avec deux résistances en série. Lorsque l'interrupteur est fermé, tout le courant va passer par l'interrupteur ; on peut enlever la branche contenant la pile sans rien changer, comme à la figure 7.24b.

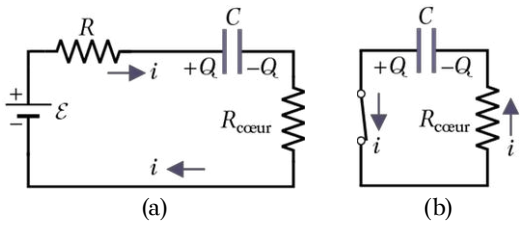


FIGURE 7.24
Le circuit équivalent : (a) lorsque l'interrupteur est ouvert ; (b) lorsque l'interrupteur est fermé.

Décortiquer le problème

Nous ajoutons un indice (a) pour spécifier les données durant la charge et un indice (b) pour indiquer les données durant la décharge du condensateur.

Connues		Inconnues
$R_{cœur} = 520\ \Omega$	$Q_{(a)} = 0{,}950 Q_m$	R
$\mathcal{E} = 3{,}50\ \text{V}$	$t_{(a)} = 0{,}300\ \text{s}$	C
$\tau_{(b)} = 0{,}500\ \text{ms}$		

Identifier les clés

Pour le circuit (a), la charge du condensateur est donnée par l'équation 7.37 :

$$Q = Q_m\left(1 - e^{-t_{(a)}/R_{éq}C}\right), \qquad \text{(i)}$$

où $R_{éq} = R + R_{cœur}$, car les résistances sont en série.

Pour le circuit (b), la constante de temps est donnée par l'équation 7.29 :

$$\tau_{(b)} = R_{cœur}C\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous pouvons d'abord calculer C à l'aide de l'équation (ii). Nous obtenons

$$C = \frac{\tau_{(b)}}{R_{cœur}} = \frac{0{,}500\times10^{-3}\ \text{s}}{520\ \Omega} = 961{,}53\ \text{nF} = 962\ \text{nF}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Pour trouver la valeur de la résistance R, nous isolons d'abord $R_{éq}$ dans l'équation (i) :

$$0{,}950Q_m = Q_m\left(1 - e^{-t_{(a)}/R_{éq}C}\right)$$

$$0{,}950 = 1 - e^{-t_{(a)}/R_{éq}C}$$

$$\Rightarrow 0{,}050 = e^{-t_{(a)}/R_{éq}C}$$

$$\Rightarrow \ln(0{,}050) = \frac{-t_{(a)}}{R_{éq}C}$$

$$\Rightarrow R_{éq} = \frac{-t_{(a)}}{C\ln(0{,}050)}$$

$$= \frac{-0{,}300\ \text{s}}{961{,}53\times10^{-9}\ \text{F}\ln(0{,}050)}$$

$$R_{éq} = 104{,}1\ \text{k}\Omega\,.$$

La résistance R est donc

$$R = R_{éq} - R_{cœur} = 104{,}1\times10^{3}\ \Omega - 520\ \Omega$$

$$= 103{,}6\ \text{k}\Omega = 104\ \text{k}\Omega\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La résistance du stimulateur cardiaque est beaucoup plus grande que la résistance du cœur. Le courant qui circule dans le cœur durant la charge du condensateur est donc très faible : $i_m = \mathcal{E}/R_{éq} = 34\ \mu\text{A}$.

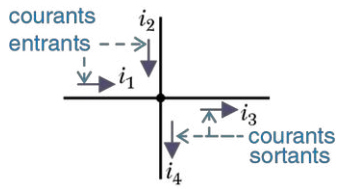
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons analysé les circuits à l'aide des lois de Kirchhoff, qui sont des règles générales s'appliquant aux circuits.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

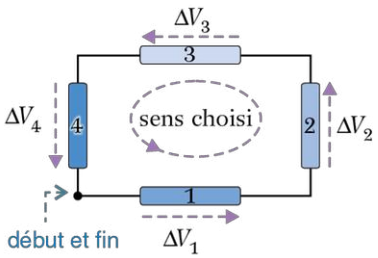
- Un **nœud** est un point où des conducteurs se rencontrent. Selon la **loi des nœuds**,

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}} .$$

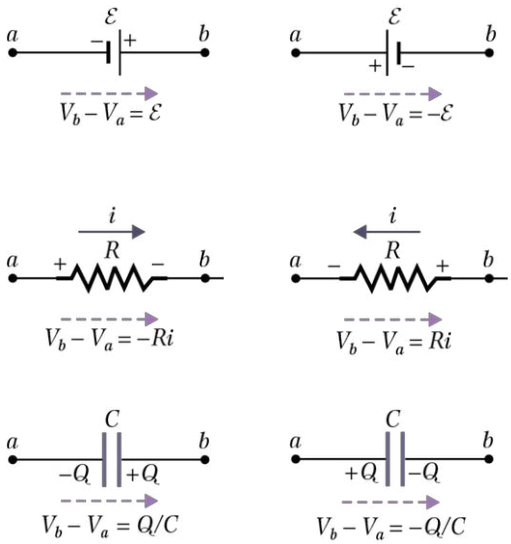


- Une **maille** est un parcours fermé dans un circuit. Selon la **loi des mailles**,

$$(\Delta V)_{\text{maille}} = \sum_i \Delta V_i = 0 .$$



- La **différence de potentiel** dans un dispositif dépend du sens utilisé :

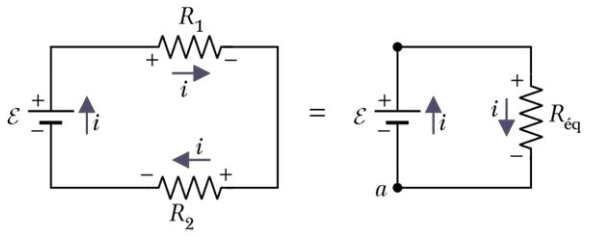


LES RÉSULTATS

- Les **résistances en série** :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots$$

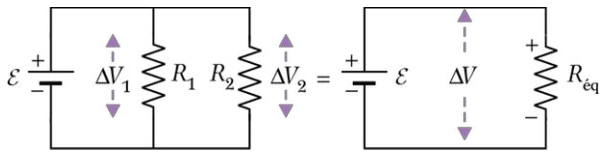
$$i_1 = i_2 = i .$$



- Les **résistances en parallèle** :

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \right)^{-1}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V .$$



LES APPLICATIONS

Un **circuit *RC*** comprend un condensateur et une résistance en série. La constante de temps est

$$\tau = RC .$$

- Lorsqu'un condensateur se décharge dans une résistance,

$$Q = Q_{\text{m}}\, e^{-t/\tau} = Q_{\text{m}}\, e^{-t/RC}$$

$$i = \frac{Q_{\text{m}}}{RC}\, e^{-t/\tau} = i_{\text{m}}\, e^{-t/RC} .$$

- Lorsqu'un condensateur est chargé par une source de f.é.m. en série avec une résistance,

$$Q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = Q_{\text{m}}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-t/\tau} = i_{\text{m}}\, e^{-t/RC} .$$

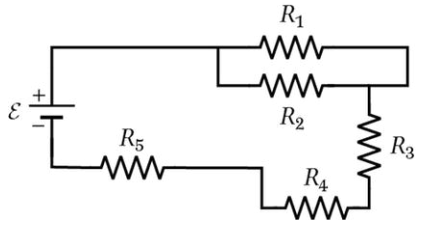
QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

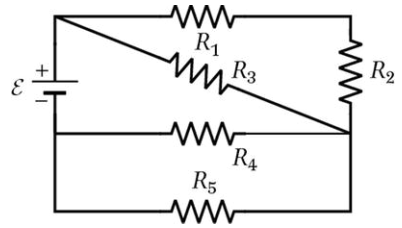
Section 7.2 Les lois de Kirchhoff

Q1 Combien de nœuds et de mailles indépendantes y a-t-il dans les circuits suivants ?

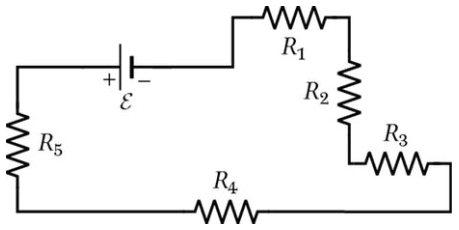
a.



b.



c.



Q2 La figure 7.25 montre une partie d'un circuit. Quel est le courant dans la branche verticale ? Indiquez aussi son sens.

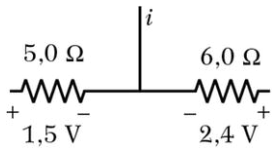


FIGURE 7.25 • Question 2

Q3 Pour le circuit de la figure 7.26, écrivez les équations de Kirchhoff :

a. pour le nœud c ;

b. pour la maille $abca$;

c. pour la maille $cdac$.

E4 Dans le circuit de la figure 7.27, $\mathcal{E}_1 = 12{,}0$ V, $\mathcal{E}_2 = 15{,}0$ V, $R_1 = 3{,}00\ \Omega$, $R_2 = 25{,}0\ \Omega$ et $R_3 = 60{,}0\ \Omega$. Déterminez le courant qui circule dans la maille et indiquez son sens.

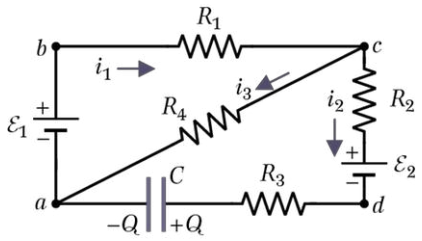


FIGURE 7.26 • Question 3

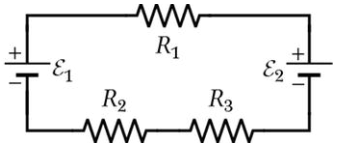


FIGURE 7.27 • Exercice 4

E5 Dans le circuit de la figure 7.28, $\mathcal{E}_1 = 120$ V, $R_1 = 75{,}0\ \Omega$ et $R_2 = 36{,}0\ \Omega$.

a. Quel est le courant dans le circuit ?

b. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance ?

c. Quelle est la puissance dissipée par chaque résistance ?

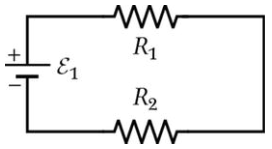


FIGURE 7.28 • Exercice 5

E6 La figure 7.29 montre une partie d'un circuit. Dans ce circuit, $\mathcal{E} = 5{,}00$ V, $R_1 = 250\ \Omega$, $R_2 = 125\ \Omega$, $i_1 = 12{,}0$ mA et $i_2 = 6{,}00$ mA.

a. Quel est le courant i_3 et quel est son sens ?

b. Calculez la différence de potentiel $V_b - V_a$.

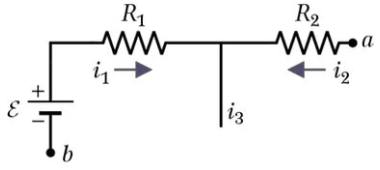


FIGURE 7.29 • Exercice 6

P7 Dans le circuit de la figure 7.30, $\mathcal{E} = 11{,}5$ V, $C_1 = 32{,}0\ \mu$F, $C_2 = 64{,}0\ \mu$F, $R_1 = 320\ \Omega$, $R_2 = 160\ \Omega$, $R_3 = 160\ \Omega$ et $R_4 = 320\ \Omega$.

a. À un instant donné, le courant dans la résistance R_1 est de 15,0 mA. Quelle est la charge sur le condensateur C_1 à cet instant ?

b. À un autre instant, la charge sur le condensateur C_2 est la même que la charge calculée en **a.** Quel est alors le courant dans la résistance R_2 et le courant dans la résistance R_4 ?

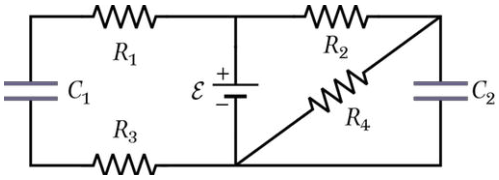


FIGURE 7.30 • Problème 7

P8 Un *pont de Wheatstone* est un montage permettant de mesurer une résistance inconnue R_x à partir de la valeur connue de trois autres résistances (*voir la figure 7.31*). La résistance R_2 est une résistance variable, et l'appareil au centre est un galvanomètre (un ampèremètre très sensible). On change la valeur de R_2 jusqu'à ce que le galvanomètre indique un courant nul, ce qui signifie que $V_b = V_a$. Montrez que la valeur de R_x est alors donnée par :

$$R_x = \left(\frac{R_3}{R_1}\right) R_2 \, .$$

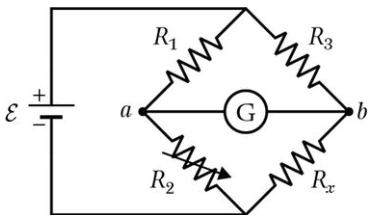


FIGURE 7.31 • Problème 8

Section 7.3 Les piles réelles

Q9 La figure 7.32 montre trois situations où la même pile réelle est utilisée dans un circuit (qui n'est pas complètement illustré). Classez les situations par ordre croissant de la différence de potentiel $\Delta V = V_b - V_a$.

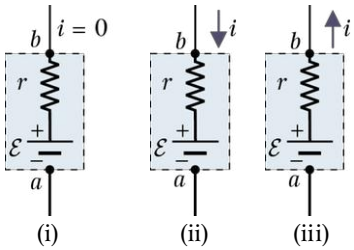


FIGURE 7.32 • Question 9

E10 Une pile réelle a une f.é.m. de 1,50 V. Lorsqu'on la branche à une résistance de 2,50 Ω, la différence de potentiel aux bornes de la pile est de 1,20 V. Quelle est la résistance interne de la pile ?

E11 Une batterie réelle a une f.é.m. de 12,0 V. Elle est branchée à une résistance de 1,50 Ω. La résistance dissipe une puissance de 60,0 W. Quelle est la valeur de la résistance interne de la batterie ?

E12 Une batterie ayant une f.é.m. de 6,00 V a une résistance interne de 0,800 Ω. On la branche à une résistance $R = 2{,}50\ \Omega$.

a. Quelle est la puissance produite par les réactions chimiques de la batterie ?

b. Quelle est la puissance dissipée à l'intérieur de la batterie ?

c. Quelle est la puissance nette fournie par la batterie à la résistance R ?

E13 Pour connaître la résistance interne r d'une pile, dont la f.é.m. est $\mathcal{E}$, on la branche en série à une résistance R (*voir la figure 7.33*). Un voltmètre est branché à la résistance, et il affiche une différence de potentiel ΔV_R. Trouvez une expression algébrique pour r.

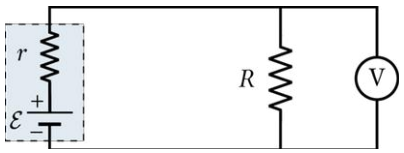


FIGURE 7.33 • Exercice 13

P14 Une pile réelle a une f.é.m. $\mathcal{E}$ et une résistance interne r. Elle est reliée à une résistance variable R.

a. Démontrez que la puissance dissipée par la résistance variable est maximale lorsque $R = r$. (Indice : Vous avez besoin de calculer une dérivée.)

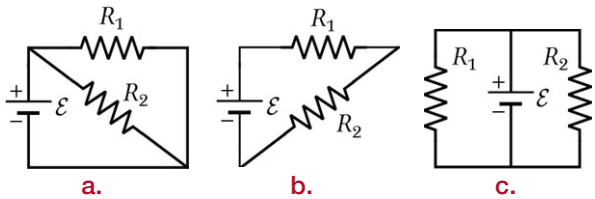
b. Quelle est la puissance maximale dissipée dans la résistance R ?

P15 Une pile de 1,45 V a une résistance interne de 0,350 Ω. On la branche à une résistance R, de telle sorte que cette dernière dissipe une puissance de 1,25 W. Quelle est la valeur de R ?

P16 Lorsqu'une cellule photovoltaïque est branchée à une résistance de 250 Ω, elle fournit un courant de 1,21 mA. Lorsqu'on la branche à une résistance de 500 Ω, elle fournit un courant de 0,840 mA. Déterminez la f.é.m. et la résistance interne de la cellule photovoltaïque.

Section 7.4 L'association de résistances

Q17 Pour les circuits suivants, indiquez si les résistances sont en série ou en parallèle.



Q18 Une ampoule de 60 W et une ampoule de 100 W sont conçues pour être utilisées dans un circuit en parallèle, branché à une source de f.é.m. de 120 V.

a. Quelle ampoule a la plus petite résistance ?

b. Si on branche les deux ampoules en série à une source de f.é.m., laquelle éclairera le plus ?

Q19 Les circuits de la figure 7.34 sont constitués de résistances identiques R. Classez les circuits par ordre croissant de leur résistance équivalente.

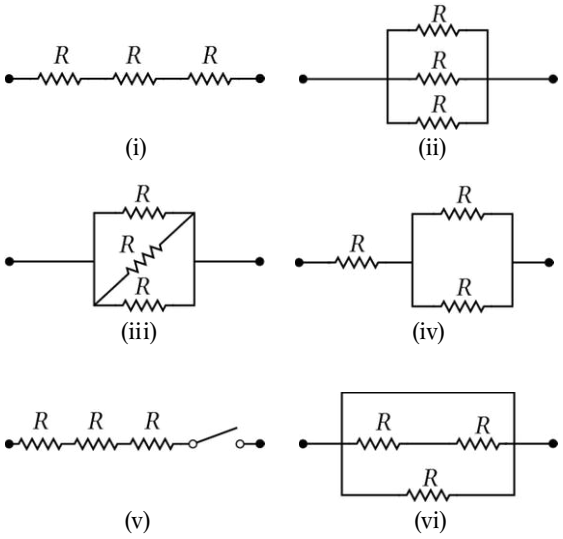


FIGURE 7.34 • Question 19

E20 Une guirlande lumineuse est composée de 25 ampoules identiques branchées en série. Chaque ampoule dissipe une puissance de 13 W lorsque la guirlande est branchée dans une prise de 120 V.

a. Quelle est la différence de potentiel aux bornes d'une ampoule ?

b. Quelle est la résistance de chaque ampoule ?

c. Quel est le courant qui circule dans une ampoule ?

d. Quel est le courant fourni par la prise de courant ?

E21 Dans le circuit de la figure 7.35, $\mathcal{E} = 24{,}0$ V, $R_1 = 124\ \Omega$ $R_2 = 210\ \Omega$, $R_3 = 144\ \Omega$ et $R_4 = 1{,}08$ kΩ. Quelle est la puissance fournie par la source de f.é.m. ?

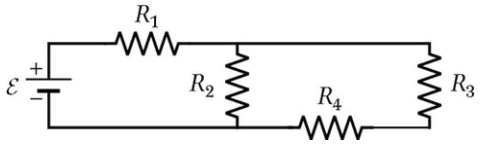
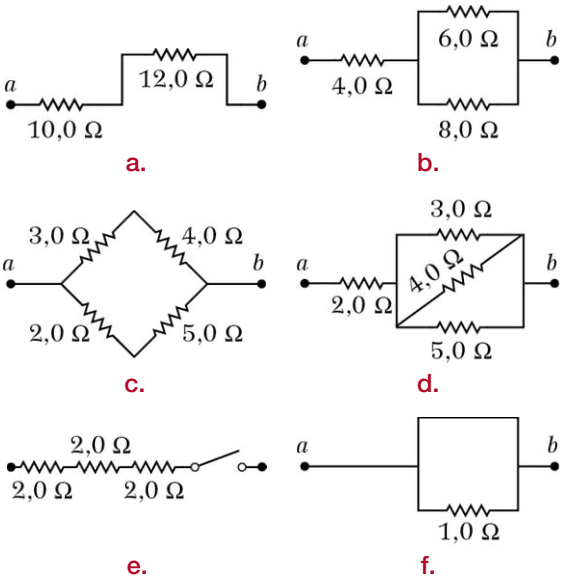


FIGURE 7.35 • Exercice 21

E22 Trouvez la résistance équivalente entre les points a et b dans les circuits suivants.



E23 Soit le circuit de la figure 7.36, où $R_1 = 5{,}0$ kΩ, $R_2 = 4{,}0$ kΩ, $R_3 = 8{,}0$ kΩ et $R_4 = 1{,}0$ kΩ. Le courant dans la résistance R_3 est de 0,050 mA. Quelle est la f.é.m. de la source ?

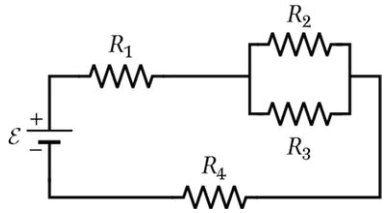


FIGURE 7.36 • Exercice 23

P24 Dans le circuit de la figure 7.37, R_o est une valeur connue. Quelle est la valeur de la résistance R pour que la résistance équivalente entre les points a et b soit $R_{éq} = R_o$?

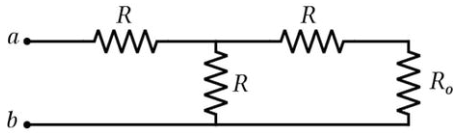


FIGURE 7.37 • Problème 24

P25 Dans le circuit de la figure 7.38, $\mathcal{E} = 6{,}00$ V, $R_1 = 50{,}0\ \Omega$, $R_2 = 120\ \Omega$, $R_3 = 190\ \Omega$ et $R_4 = 20{,}0\ \Omega$.

a. Calculez la puissance fournie par la pile et la différence de potentiel $V_b - V_a$ lorsque l'interrupteur est ouvert.

b. Calculez la puissance fournie par la pile et la différence de potentiel $V_b - V_a$ lorsque l'interrupteur est fermé.

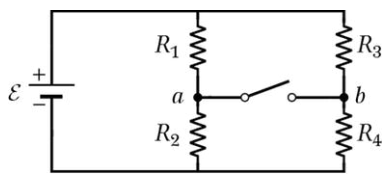


FIGURE 7.38 • Problème 25

P26 Dans le circuit de la figure 7.39, $\mathcal{E} = 12{,}0$ V, $R_1 = 12{,}0$ kΩ, $R_2 = 7{,}50$ kΩ, $R_3 = 24{,}0$ kΩ, $R_4 = 53{,}0$ kΩ et $R_5 = 8{,}20$ kΩ. Calculez le courant et la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance.

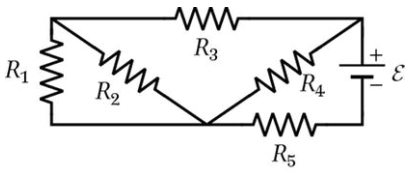


FIGURE 7.39 • Problème 26

P27 Dans le circuit de la figure 7.40, $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 4{,}00\ \Omega$ et la résistance R est une résistance variable (ce qui est indiqué par une flèche sur la résistance dans la figure). La pile a une f.é.m. constante.

a. Quel est le courant dans la résistance R ?

b. Quelle est la puissance dissipée dans la résistance R ?

c. Pour quelle valeur de R la puissance dissipée dans celle-ci sera-t-elle maximale ?

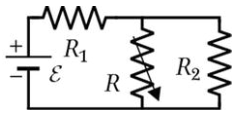


FIGURE 7.40 • Problème 27

Section 7.5 Les instruments de mesure

Q28 Classez par ordre croissant la lecture des voltmètres de la figure 7.41.

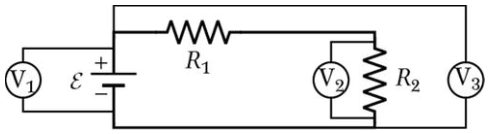


FIGURE 7.41 • Question 28

E29 On veut mesurer le courant dans le circuit de la figure 7.42, où $\mathcal{E} = 3{,}00$ V, $R_1 = 200\ \Omega$ et $R_2 = 500\ \Omega$. On utilise un ampèremètre dont la résistance interne est $r = 20\ \Omega$.

a. Quel est le courant $i_{\text{réel}}$ dans le circuit sans ampèremètre ?

b. Quel est le courant affiché i_{mes} par l'ampèremètre ?

c. Calculez l'erreur relative de l'ampèremètre :

$$\text{erreur relative} = \frac{i_{\text{réel}} - i_{\text{mes}}}{i_{\text{réel}}} \times 100\ \%\ .$$

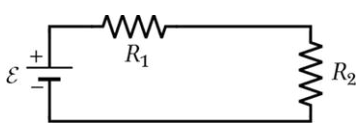


FIGURE 7.42 • Exercices 29 et 30

E30 On veut mesurer la différence de potentiel aux bornes de la résistance R_2 du circuit de la figure 7.42, où $\mathcal{E} = 30{,}0$ V, $R_1 = 500$ kΩ et $R_2 = 1{,}80$ MΩ. On utilise un voltmètre ayant une résistance interne de 10,0 MΩ.

a. Quelle est la différence de potentiel $\Delta V_{\text{réel}}$ aux bornes de R_2 avant de brancher l'appareil ?

b. Quelle est la valeur affichée ΔV_{mes} par le voltmètre lorsqu'on le branche aux bornes de R_2 ?

c. Calculez l'erreur relative causée par l'appareil :

$$\text{erreur relative} = \frac{\Delta V_{\text{réel}} - \Delta V_{\text{mes}}}{\Delta V_{\text{réel}}} \times 100\ \%\ .$$

E31 On désire mesurer le courant dans une résistance de 960 Ω soumise à une différence de potentiel de 110 V. On utilise un ampèremètre dont la résistance interne est de 5,00 Ω. Quelle erreur relative l'instrument de mesure produit-il si la différence de potentiel aux bornes de la résistance demeure constante ?

Section 7.6 Les circuits à plusieurs sources de f.é.m.

E32 Dans le circuit de la figure 7.43, $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ V, $\mathcal{E}_2 = 9{,}0$ V, $\mathcal{E}_3 = 6{,}0$ V, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 180\ \Omega$, $R_3 = 62\ \Omega$ et $R_4 = 120\ \Omega$. Déterminez le courant qui circule dans chacune des sources de f.é.m., en indiquant aussi le sens du courant.

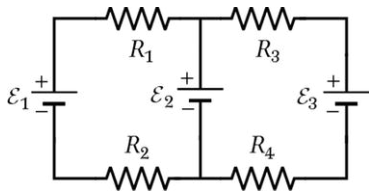


FIGURE 7.43 • Exercice 32

P33 La batterie de votre voiture étant déchargée, vous ne pouvez plus démarrer. La f.é.m. est de 9,800 V, et sa résistance interne est de 0,980 Ω. Vous demandez à un ami de vous aider à recharger votre batterie en utilisant des câbles de démarrage et la batterie de son automobile (ce qu'on appelle à tort, dans le langage courant, un « survoltage » ou un « boostage » de batterie). La batterie de votre ami a une f.é.m. de 12,0 V et une résistance interne de 0,005 00 Ω. Le circuit est présenté à la figure 7.44. Quel est le courant dans le démarreur lorsque vous fermez l'interrupteur, si la résistance de votre démarreur est de 0,023 0 Ω ?

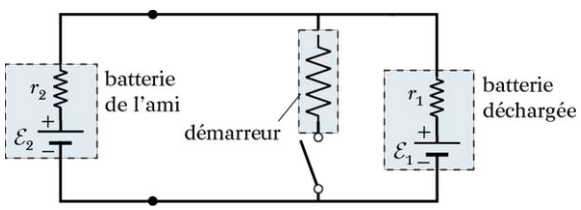


FIGURE 7.44 • Problème 33

P34 Dans le circuit de la figure 7.45, $\mathcal{E}_1 = 12{,}0$ V, $\mathcal{E}_2 = 17{,}0$ V, $\mathcal{E}_3 = 8{,}00$ V, $R_1 = 2{,}00$ kΩ, $R_2 = 4{,}00$ kΩ, $R_3 = 3{,}00$ kΩ et $R_4 = 5{,}00$ kΩ.

a. Quel est le courant qui circule dans l'ampèremètre ? Indiquez aussi son sens.

b. Calculez la différence de potentiel $V_b - V_a$.

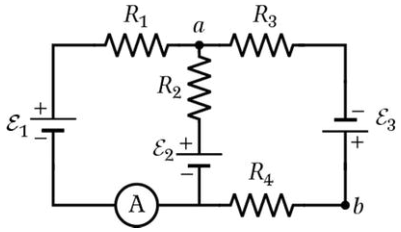


FIGURE 7.45 • Problème 34

P35 Dans le circuit de la figure 7.46, $\mathcal{E}_1 = 6{,}00$ V, $\mathcal{E}_2 = 2{,}00$ V et $\mathcal{E}_3 = 4{,}00$ V. Les résistances $R = 3{,}00$ Ω sont identiques. La résistance interne des sources de f.é.m. n'est pas négligeable, mais elle est égale à $r = 1{,}00$ Ω.

a. Quelle est la valeur et le sens des courants qui circulent dans les sources de f.é.m. ?

b. Pour chaque source de f.é.m., calculez la différence de potentiel à leurs bornes, c'est-à-dire $V_+ - V_-$.

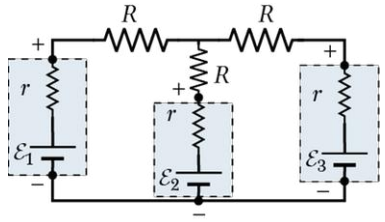


FIGURE 7.46 • Problème 35

P36 Le circuit de la figure 7.47 est constitué des sources $\mathcal{E}_1 = 6{,}00$ V et $\mathcal{E}_2 = 4{,}00$ V, de la résistance $R_2 = 1{,}20$ kΩ et de deux résistances inconnues, R_1 et R_3. On mesure la différence de potentiel entre les points a et b, qui est $V_b - V_a = -5{,}12$ V. De plus, le courant $i_3 = 2{,}56$ mA circule vers le bas dans la résistance R_3.

a. Quel est le courant dans la résistance R_2 ? Indiquez aussi son sens.

b. Quelle est la résistance R_3 ?

c. Quelle est la résistance R_1 ?

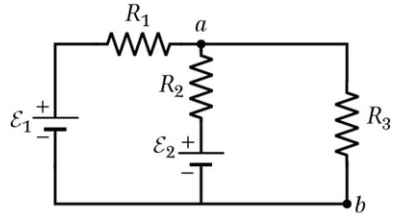


FIGURE 7.47 • Problème 36

P37 Le circuit de la figure 7.48 possède trois sources ayant des f.é.m. inconnues (indiquées par des cercles) et les résistances $R_1 = 1\,330$ Ω, $R_2 = 454$ Ω et $R_3 = 894$ Ω. On mesure que $V_b - V_a = 2{,}00$ V, $i_1 = 4{,}51$ mA et $i_2 = 2{,}20$ mA. Calculez :

a. le courant i_3 ;

b. la différence de potentiel $V_b - V_c$;

c. la différence de potentiel $V_b - V_d$;

d. la différence de potentiel $V_b - V_f$.

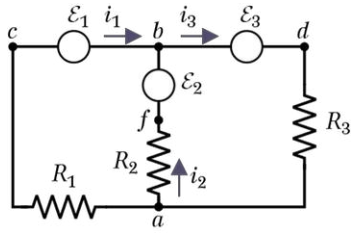


FIGURE 7.48 • Problème 37

P38 Dans le circuit de la figure 7.49, $\mathcal{E}_1 = 9{,}00$ V, $\mathcal{E}_2 = 6{,}00$ V, $R_1 = 100$ Ω, $R_2 = 133$ Ω et $R_3 = 200$ Ω. La puissance dissipée dans chaque résistance ne peut dépasser 0,500 W. La résistance R_1 va-t-elle surchauffer ?

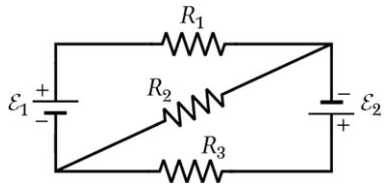


FIGURE 7.49 • Problème 38

P39 Dans le circuit de la figure 7.50, $\mathcal{E}_1 = 4{,}00$ V, $\mathcal{E}_2 = 12{,}0$ V, $\mathcal{E}_3 = 3{,}00$ V, $\mathcal{E}_4 = 16{,}0$ V, $R_1 = 2{,}00$ kΩ, $R_2 = 4{,}00$ kΩ, $R_3 = 12{,}0$ kΩ, $R_4 = 10{,}0$ kΩ, $R_5 = 3{,}00$ kΩ, $R_6 = 7{,}00$ kΩ.

a. Quelle est la puissance de la pile $\mathcal{E}_1$? Indiquez aussi si la pile fournit ou absorbe de l'énergie.

b. Quel est le courant dans la résistance R_4 ?

c. Déterminez la différence de potentiel $V_b - V_a$ entre les points a et b.

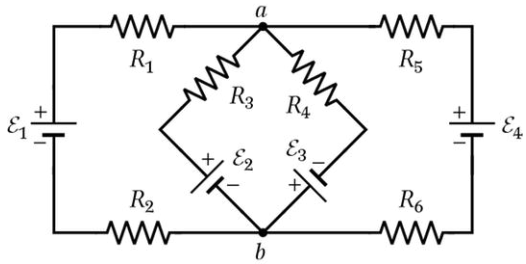


FIGURE 7.50 • Problème 39

Section 7.7 Les circuits *RC*

Q40 On branche en série une pile, une ampoule lumineuse, un interrupteur et un condensateur. Initialement, le condensateur n'est pas chargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. Comment évolue l'intensité de la lumière émise par l'ampoule ?

Q41 La figure 7.51 montre trois circuits *RC*. Les circuits sont composés de dispositifs identiques. On ferme les interrupteurs en même temps. Classez les circuits selon un ordre croissant :

a. de la constante de temps ;

b. de la charge maximale sur le condensateur ;

c. du courant maximal dans la branche du condensateur.

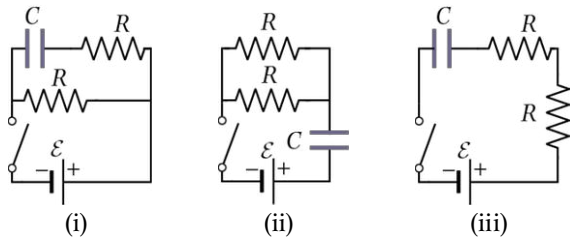


FIGURE 7.51 • Question 41

Q42 La figure 7.52 illustre le graphique de la charge en fonction du temps pour quatre situations différentes où un condensateur C se décharge dans une résistance. La capacité du condensateur est la même dans chaque cas. Classez les situations par ordre croissant selon :

a. la constante de temps du circuit ;

b. la résistance du circuit ;

c. le courant initial dans la résistance.

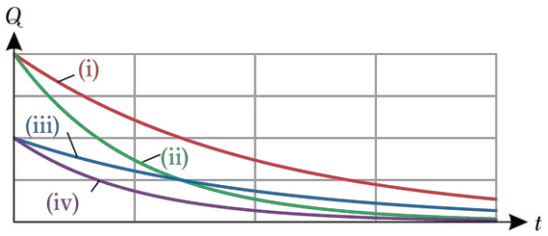


FIGURE 7.52 • Question 42

E43 Vérifiez que les unités du produit *RC* sont bien des secondes, à partir de la définition du ohm et de celle du farad.

E44 Dans le circuit *RC* de la figure 7.53, $\mathcal{E} = 120$ V, $R = 200$ kΩ et $C = 50{,}0$ µF. Le condensateur est complètement déchargé avant que l'interrupteur soit fermé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

a. Quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur après une constante de temps ?

b. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la résistance après une constante de temps ?

c. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur à $t = 5{,}0$ s ?

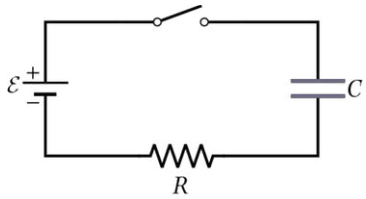


FIGURE 7.53 • Exercices 44 et 45

E45 Dans le circuit de la figure 7.53, $\mathcal{E} = 15{,}0$ V, $R = 7{,}00$ kΩ et $C = 12{,}0$ µF. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. À quel temps le courant est-il égal à 80 % du courant maximal ?

E46 Dans un circuit *RC* qui se décharge, la constante de temps est égale à 60,0 ms. Déterminez le temps nécessaire pour que :

a. la charge diminue de moitié ;

b. l'énergie emmagasinée diminue de moitié.

E47 L'énergie potentielle emmagasinée dans un condensateur de 2,50 µF est de 0,120 J. On branche le condensateur à une résistance de 1,50 MΩ à $t = 0$.

a. Quelle est la constante de temps du circuit ?

b. Quelle est la charge initiale sur le condensateur ?

c. Quel est le courant dans la résistance à $t = 5{,}00$ s après le branchement ?

E48 Une pile, ayant une f.é.m. $\mathcal{E}$, est reliée à un interrupteur, à un condensateur de capacité C et à une résistance R (*voir la figure 7.54*). La résistance peut être changée (ce qui est indiqué par une flèche dans la figure). Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, le condensateur se décharge dans la résistance.

a. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, combien de temps le condensateur prend-il pour que la différence de potentiel à ses bornes diminue de moitié ?

b. On mesure le temps de demi-décharge, c'est-à-dire le temps pour que le condensateur perde la moitié de sa charge initiale, en fonction de la résistance. Quel type de graphique obtient-on ?

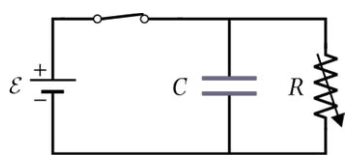


FIGURE 7.54 • Exercice 48

P49 Un condensateur de 2,75 µF possédant une charge initiale de 12,2 µC est relié à un circuit, comme l'illustre la figure 7.55. Dans ce circuit, $R_1 = 4{,}00\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 5{,}00\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 6{,}75\ \text{k}\Omega$ et $R_4 = 7{,}35\ \text{k}\Omega$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Quelle est la charge du condensateur à $t = 3{,}70$ ms ?

b. Quel est le courant qui circule dans la résistance R_2 à $t = 3{,}70$ ms ?

c. À quel temps la charge du condensateur est-elle égale à $Q = 1{,}22$ µC ?

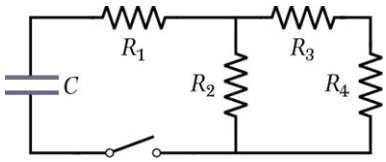


FIGURE 7.55 • Problème 49

P50 Dans le circuit de la figure 7.56, les trois condensateurs sont identiques et ils ont une capacité de 10 µF. Ils n'ont pas de charge initiale. Les quatre résistances sont identiques, avec une résistance de 450 Ω chacune. La source 1 a une f.é.m. de 8,00 V et la source 2, une f.é.m. de 5,00 V.

a. Quel est le courant dans la résistance R_1 tout juste après avoir fermé l'interrupteur ?

b. Quelle est la charge du condensateur C_3 lorsque le régime permanent est atteint, c'est-à-dire lorsque les condensateurs sont complètement chargés ?

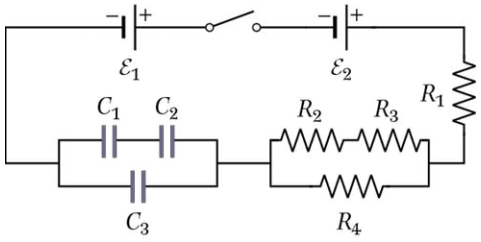


FIGURE 7.56 • Problème 50

P51 Soit le circuit de la figure 7.57, où $\mathcal{E} = 120$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 730\ \Omega$ et $C = 6{,}50$ µF. La charge du condensateur est nulle avant la fermeture de l'interrupteur. À $t = 0$, on ferme ce dernier.

a. Déterminez le courant dans chaque résistance tout juste après la fermeture de l'interrupteur.

b. Déterminez le courant dans chaque résistance pour $t \to \infty$.

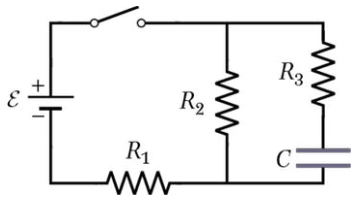


FIGURE 7.57 • Problème 51

P52 Un circuit RC est constitué d'un condensateur C et d'une résistance R branchés en série à une source de f.é.m. $\mathcal{E}$. À $t = 0$, la charge du condensateur est nulle.

a. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur lorsque celui-ci est complètement chargé ?

b. Quelle est l'énergie fournie par la pile ?

c. Montrez que la moitié de l'énergie fournie par la pile est dissipée dans la résistance.

P53 Dans le circuit de la figure 7.58, $\mathcal{E} = 12{,}0$ V, $R_1 = 60{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 20{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 15{,}00\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 50{,}0\ \text{k}\Omega$ et $C = 2{,}70$ µC.

a. Après avoir fermé l'interrupteur, quelle est la charge maximale portée par l'armature positive du condensateur ?

b. Quelle est l'armature positive ?

c. Une fois le condensateur chargé, on ouvre l'interrupteur. Quelle est la constante de temps durant la décharge du condensateur ?

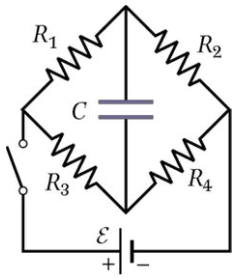


FIGURE 7.58 • Problème 53

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

7.1 $V_b - V_a = 1{,}0$ V

Selon la loi des mailles, la somme des différences de potentiel d'une maille donne zéro. Si on part de la borne négative de la pile, en sens horaire, on a une augmentation du potentiel de 1,5 V dans la pile, puis une diminution de 2,5 V dans la résistance (selon le sens du courant). Il y a donc une augmentation de 1,0 V dans le dispositif inconnu.

7.2 i diminue.

Le courant fourni par la pile est

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Si r augmente sans que $\mathcal{E}$ change, le courant diminue.

7.3 **a.** $i_1 = i_2 = i_3$

Le courant est le même pour des résistances en série. Il n'y a pas de nœud pour que le courant se divise.

b. $\Delta V_1 < \Delta V_2 < \Delta V_3$

La différence de potentiel aux bornes d'une résistance est $\Delta V = Ri$. Le courant est le même, donc la plus faible résistance a la plus faible différence de potentiel.

c. $P_1 < P_2 < P_3$

On peut calculer la puissance dissipée par une résistance à l'aide de l'équation $P = Ri^2$. Comme le courant est le même, c'est la plus faible résistance qui dissipe le moins de puissance.

7.4 $P_3 = P_4 < P_2 < P_1$

La puissance dissipée est $P = Ri^2$. Les résistances étant identiques, c'est le courant qui permet de savoir laquelle dissipe la plus petite puissance. Les résistances R_3 et R_4 sont en série. Elles sont parcourues par un même courant, donc elles dissipent la même puissance. La branche contenant ces deux résistances est en parallèle avec la branche de la résistance R_2. Le courant est plus élevé dans la résistance de R_2, car celle-ci est plus faible que la résistance équivalente de R_3 et de R_4. Finalement, le courant est plus grand dans R_1 selon la loi des nœuds $i_1 = i_2 + i_3$, donc la résistance R_1 dissipe la plus grande puissance.

7.5 $t_3 < t_1 = t_2$

Le temps de décharge est rapide si $\tau = RC$ est faible. Selon le tableau, $\tau_1 = \tau_2 = 10$ ms et $\tau_3 = 9$ ms.

Chapitre 08

Le champ magnétique

Buts du chapitre

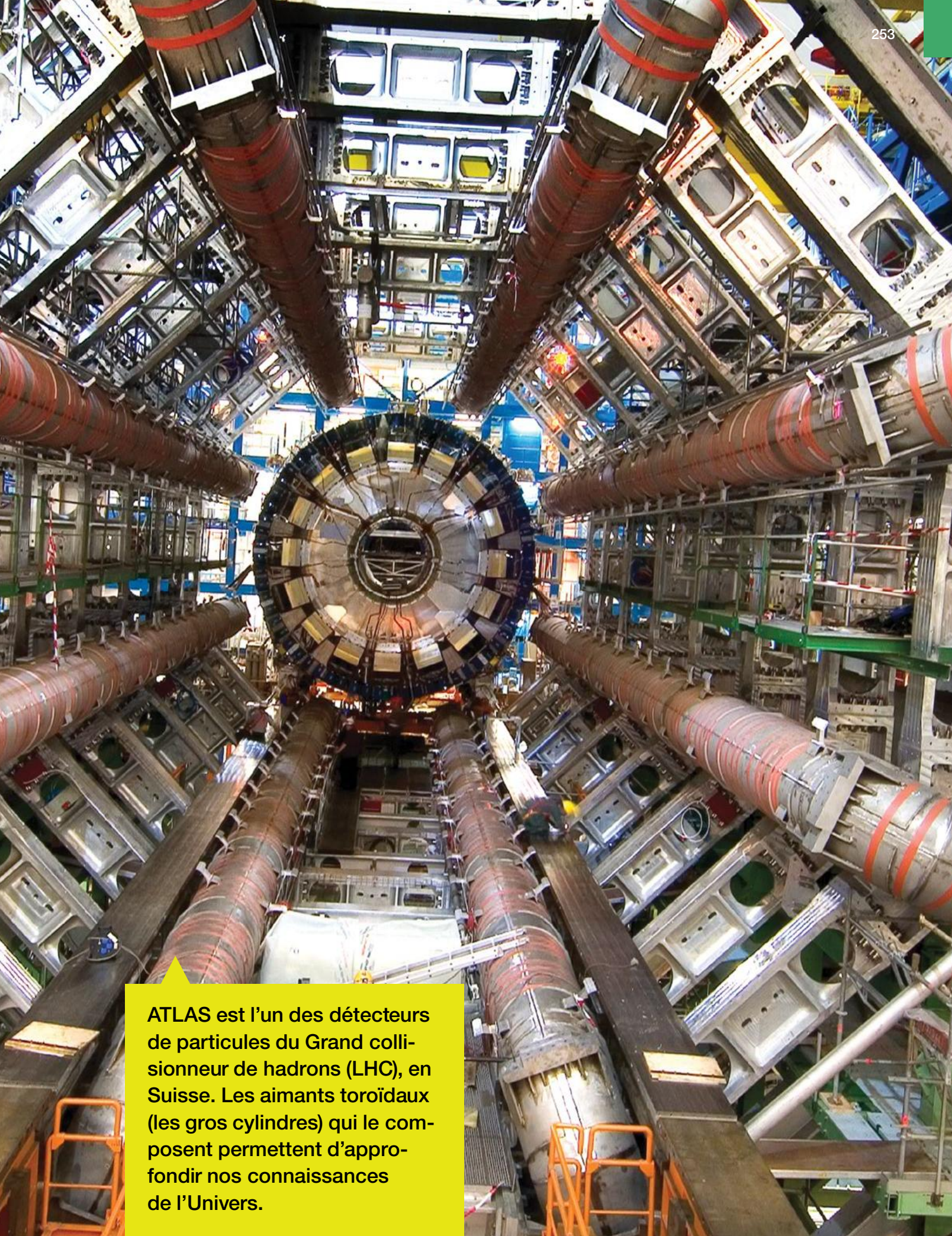
Dans ce chapitre, on présente et on calcule le champ magnétique produit par des courants électriques. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de définir la notion de champ magnétique ;
- de calculer le champ magnétique de certaines configurations de courants électriques à l'aide de la loi de Biot-Savart ;
- de calculer le champ magnétique de configurations symétriques de courants électriques à l'aide du théorème d'Ampère ;
- de calculer le champ magnétique d'un dipôle magnétique.

Préalables

Ce chapitre porte sur la façon de calculer le champ magnétique. Revoyez :

- la notion de champ, présentée à la section 2.1 ;
- le champ électrique pour une distribution continue, analysé à la section 2.4 ;
- les dipôles électriques, étudiés à la section 2.3 ;
- la symétrie et le théorème de Gauss, présentés aux sections 3.1, 3.3 et 3.4 ;
- le produit vectoriel, expliqué à la section 2.5 du tome 1.



ATLAS est l'un des détecteurs de particules du Grand collisionneur de hadrons (LHC), en Suisse. Les aimants toroïdaux (les gros cylindres) qui le composent permettent d'approfondir nos connaissances de l'Univers.

Le courant passe d'Ørsted à Ampère

Pour être compris des savants européens, l'acte de naissance de l'électromagnétisme a dû être écrit en latin. En effet, ce sont des chercheurs de plusieurs origines qui ont fait avancer la science européenne. En astronomie, Copernic est polonais, Galilée, italien et Kepler, allemand. En mécanique, Descartes est français, Huygens, néerlandais et Newton, anglais. L'histoire de l'électromagnétisme n'est pas une exception. Elle commence avec l'Anglais William Gilbert, qui signe la première étude scientifique de l'aimant en 1600, et elle se poursuit avec les expériences de l'Allemand Otto von Guericke, qui fabrique le premier générateur d'électricité statique en 1663. Au 18e siècle, Coulomb est français et Alessandro Volta, italien, mais Benjamin Franklin vient d'Amérique du Nord.

Au Moyen Âge, le latin était la langue de travail des universités et des lettrés. À partir du 17e siècle, la science gagnant en popularité, des passionnés forment des sociétés pour discuter de leur sujet favori dans une langue vivante. Certains philosophes écrivent encore en latin, mais d'autres veulent communiquer avec le plus grand nombre. Galilée écrit donc en italien et Descartes, en français. Au 19e siècle, trois langues s'imposent en raison de l'importance des communautés scientifiques correspondantes : le français, l'anglais et l'allemand. Cependant, le latin reste compris de nombreuses personnes éduquées.

Fils d'apothicaire, Hans Christian Ørsted a grandi sur une petite île danoise. Malgré l'absence d'une école, il apprend l'allemand, le français, le grec et le latin tout en s'initiant à la pharmacie. Il termine son éducation à l'Université de Copenhague en obtenant un doctorat à l'âge de 22 ans. La chimie l'intéresse. L'invention de la pile électrique lui donne l'occasion d'étudier les sels dissous, et cette expérience stimule son intérêt pour les phénomènes électriques.

Depuis l'époque de Coulomb, quelques observations laissaient croire à un lien entre l'électricité et le magnétisme, mais Coulomb lui-même avait nié cette possibilité. En Europe du Nord, la philosophie dominante prône l'unité profonde des forces de la nature. Ørsted adhère à cette vision des choses. En 1820, il veut tester l'effet d'un courant électrique sur une aiguille aimantée avant un cours à l'université, mais il manque de temps. Du coup, ses étudiants assistent à sa première expérience. Ørsted n'en attend pas grand-chose, croyant qu'il faudra un courant assez intense pour chauffer le fil au rouge. La petite déflexion de l'aiguille n'impressionne pas ses étudiants, mais leur professeur comprend aussitôt qu'il vient de changer l'histoire de la physique.

Ørsted répète les expériences avant de rédiger une lettre de quatre pages en latin à l'intention des savants de toute l'Europe. Pour la première fois, ceux-ci ont sous les yeux une force qui produit un effet perpendiculaire à la ligne reliant deux corps. En France, le mathématicien André-Marie Ampère est surpris par la nouvelle. Fils d'un marchand de soie lyonnais guillotiné durant la Révolution française, il a consacré sa vie à la science. Galvanisé par la percée d'Ørsted, il enchaîne les expériences et formule neuf énoncés pour résumer ses constatations. Mieux, il propose une théorie générale qui ramène les phénomènes électriques et magnétiques à l'action de courants électriques.

À l'appui de sa nouvelle théorie électrodynamique, Ampère démontre qu'un solénoïde génère un champ magnétique et que deux fils parcourus par un courant électrique s'influencent mutuellement. Il en déduit aussi des conséquences : de la même façon qu'une aiguille aimantée réagit au passage du courant dans un fil ou une pile, la boussole pourrait réagir à la circulation de courants électriques à l'intérieur de la planète. Ce serait l'explication du géomagnétisme.

Ampère formule une théorie si complète que les physiciens en oublieront presque Ørsted : pourtant, la science n'aurait pas avancé sans la mise en commun de leurs efforts à tous les deux.

↘ Hans Christian Ørsted (1777-1851)

Après avoir étudié la force électrique qui s'exerce entre les particules chargées, nous commençons l'étude des phénomènes magnétiques dans le présent chapitre. Vous connaissez déjà sûrement les propriétés des aimants permanents, qui servent à placer des notes sur le réfrigérateur ou pour garder fermée la porte d'une douche. La force magnétique est une autre force à distance. Comme pour la force électrique, il existe un champ, le champ magnétique, qui est le médiateur de la force magnétique d'un point à un autre de l'espace.

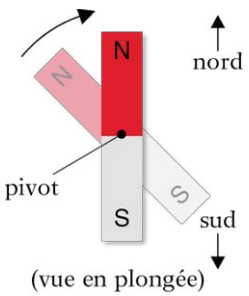
Lorsque vous écoutez de la musique au moyen d'un lecteur MP3, les haut-parleurs de vos écouteurs fonctionnent grâce à la force magnétique, et l'information est stockée dans le lecteur à l'aide d'un champ magnétique. De même, les moteurs électriques utilisent la force magnétique pour convertir de l'énergie électrique en énergie cinétique. La production de champs magnétiques très intenses a permis de développer l'imagerie par résonance magnétique, une méthode qui permet de voir à l'intérieur du corps humain. Les champs magnétiques intenses sont aussi nécessaires dans les détecteurs utilisés dans les accélérateurs de particules, comme c'est le cas pour le détecteur ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS), qui est l'un des principaux détecteurs de particules du LHC (Large Hadron Collider), l'accélérateur de particules situé près de Genève en Suisse.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la façon de calculer le champ magnétique produit par des charges électriques en mouvement, c'est-à-dire des courants électriques. Nous utiliserons deux méthodes complémentaires, selon la configuration présentée. D'abord, nous appliquerons la loi de Biot-Savart, équivalente à la loi de Coulomb en électrostatique, afin d'obtenir le champ magnétique en calculant une intégrale. Dans le cas de configurations symétriques, le théorème d'Ampère permet de calculer facilement le champ magnétique, comme le théorème de Gauss dans le cas du champ électrique. Nous étudierons la force magnétique en détail dans le chapitre 9 et verrons qu'un lien très important existe entre les phénomènes électriques et magnétiques au chapitre 10.

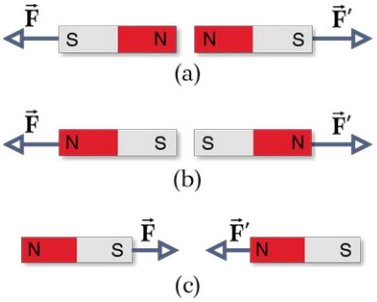
8.I Les aimants et le champ magnétique

Quelques expériences avec les aimants

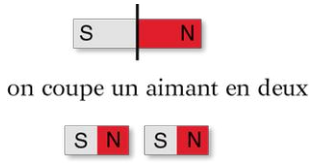
Au chapitre 1, nous avons commencé l'étude de la force électrique en réalisant quelques expériences simples avec des charges électriques. Nous procédons de même pour la force magnétique, en utilisant des barreaux aimantés.



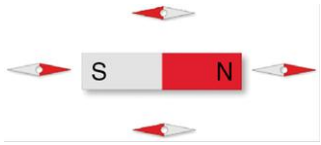
Expérience 1 : On place un aimant sur un pivot pour que celui-ci puisse tourner librement autour d'un axe vertical. L'aimant tourne et s'aligne approximativement dans une direction nord-sud. On appelle *pôle nord magnétique* de l'aimant la partie de l'aimant qui s'oriente vers le nord géographique (indiqué par la lettre **N**), et le *pôle sud magnétique* de l'aimant, la partie de l'aimant orientée vers le sud géographique (indiqué par la lettre **S**).



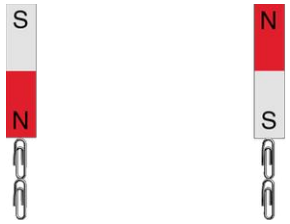
Expérience 2 : (a) Lorsqu'on approche le pôle nord d'un aimant du pôle nord d'un autre aimant, les aimants se repoussent. (b) On obtient le même résultat lorsqu'on approche le pôle sud d'un aimant du pôle sud d'un autre aimant ; les aimants se repoussent. (c) Lorsqu'on approche le pôle nord d'un aimant du pôle sud d'un autre aimant, les aimants s'attirent.



Expérience 3 : On coupe un aimant en deux. On n'obtient pas deux pôles isolés, mais deux aimants, chacun avec un pôle nord et un pôle sud.



Expérience 4 : On approche une boussole d'un aimant. L'aiguille indiquant le nord est attirée par le pôle sud de l'aimant, alors qu'elle est repoussée par le pôle nord de l'aimant. De plus, l'aiguille est orientée dans la même direction que l'aimant lorsqu'on place la boussole à côté de l'aimant.



Expérience 5 : Un aimant attire certains petits objets. Ces derniers sont attirés autant par le pôle nord que par le pôle sud de l'aimant. Les objets attirés sont composés de fer, de nickel ou de cobalt, ou d'un alliage de ces éléments.

L'expérience 1 montre que les aimants permanents ont deux pôles et qu'un aimant se comporte comme un dipôle. L'expérience 2 révèle que la force magnétique est semblable à la force électrique : c'est une force à distance entre les pôles. Les pôles de même type se repoussent, alors que les pôles différents s'attirent. L'expérience 3 met en évidence qu'on ne peut pas isoler un pôle magnétique. Un aimant contient nécessairement un pôle nord et un pôle sud. Certaines théories prévoient l'existence de monopôles magnétiques (uniquement un pôle nord ou un pôle sud), mais aucune expérience n'a permis de conclure qu'ils existaient réellement.

L'expérience 4 montre qu'une boussole subit un moment de force lorsqu'elle est placée près d'un aimant. L'aiguille d'une boussole est un dipôle magnétique qui subit un moment de force produit par la force magnétique de l'aimant.

L'expérience 5 révèle que la force magnétique agit sur des objets qui ne sont pas des aimants permanents. Ces objets sont attirés autant par le pôle nord que par le pôle sud d'un aimant. Pour la plupart des objets, la force magnétique n'est pas observable. Les objets doivent être composés de fer, de nickel ou de cobalt. Ces éléments ont des propriétés particulières. Remarquez que dans le cas de la force électrique, un objet chargé produit une attraction sur un objet neutre, quelle que soit sa composition (la force étant plus intense pour un conducteur, mais un isolant subit aussi une attraction). Les objets attirés par les aimants sont aimantables. Lorsqu'ils sont près des aimants, ils deviennent des *aimants temporaires* : ils peuvent attirer eux-mêmes de petits objets aimantables. Par contre, ils perdent leur aimantation rapidement lorsqu'on les éloigne de l'aimant permanent.

Le champ magnétique

Comme c'est le cas pour la force électrique, on introduit un champ comme médiateur de la force magnétique. C'est le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. Un aimant produit autour de lui un champ magnétique. Si on place un objet dans ce champ, il subit une force magnétique. Pour le visualiser, on trace les lignes de champ magnétique, de la même façon qu'on a tracé des lignes de champ électrique pour visualiser le champ électrique. Les lignes de champ magnétique ont les propriétés suivantes :

- Le champ magnétique est tangent aux lignes de champ.
- Le module du champ magnétique est proportionnel à la densité des lignes de champ : plus les lignes de champ sont rapprochées, plus le module du champ est grand.
- Des lignes de champ doivent sortir du pôle nord d'un aimant et se rendre jusqu'au pôle sud.
- Les lignes de champ ne se croisent pas.

Il est possible d'observer les lignes de champ en saupoudrant de la limaille de fer près d'un aimant. La limaille de fer va s'aligner sur les lignes de champ, comme le montre la figure 8.1. On peut aussi obtenir l'orientation des lignes de champ magnétique à l'aide d'une boussole. L'aiguille de la boussole va s'orienter dans le sens du champ magnétique.

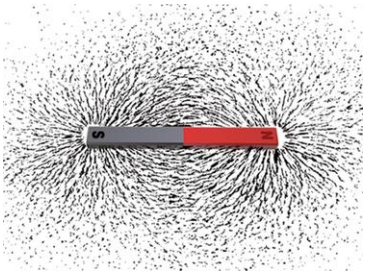


FIGURE 8.1
La limaille de fer autour d'un aimant permet de rendre visible les lignes de champ.

Les lignes de champ magnétique doivent continuer dans l'aimant, selon le résultat de l'expérience 3. En effet, à l'intérieur de l'aimant, il n'y a pas de monopôle magnétique où peuvent s'arrêter les lignes de champ, contrairement aux lignes de champ électrique qui commencent et se terminent aux charges électriques. La figure 8.2 montre les lignes de champ autour d'un barreau aimanté. On arrive au résultat important, valide pour n'importe quelle configuration de lignes de champ magnétique :

Les lignes de champ magnétique forment des boucles fermées, car les monopôles magnétiques n'existent pas.

Le champ magnétique terrestre

Dans l'expérience 1, un aimant qui peut tourner librement sur un pivot s'oriente dans une direction approximativement nord-sud. L'aimant est alors une boussole. Cette rotation est causée par un moment de force magnétique exercée par la Terre. En effet, la Terre produit le *champ magnétique terrestre*, qui ressemble beaucoup au champ d'un barreau aimanté (*voir la figure 8.3 à la page suivante*). Puisque les lignes de champ magnétique sont orientées vers le nord géographique, ceci signifie que le nord géographique de la Terre est un **pôle sud magnétique.** De même, le pôle nord magnétique de la Terre se trouve vers le sud géographique.

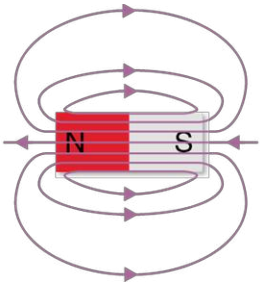


FIGURE 8.2
Les lignes de champ magnétique d'un barreau aimanté. Elles forment toujours des boucles fermées.

Si on place un aimant pour qu'il puisse tourner selon un axe horizontal, il va s'incliner de telle sorte que le pôle nord de l'aimant sera orienté vers le sol lorsqu'on est dans l'hémisphère Nord, alors qu'il sera orienté vers le haut pour des points de l'hémisphère Sud de la Terre. L'*inclinaison* représente l'angle entre l'horizontale et l'aimant. Aux pôles magnétiques, l'aimant sera orienté de façon verticale, alors qu'il sera horizontal à l'équateur magnétique.

Les pôles magnétiques de la Terre ne concordent pas exactement avec les pôles géographiques. Les randonneurs utilisant une carte topographique et une boussole doivent en tenir compte. La *déclinaison* est l'angle entre la direction indiquée par la boussole et la vraie direction nord-sud. Cette déclinaison varie selon la position sur la Terre. Les pôles magnétiques ne sont pas fixes, ils se déplacent lentement. La figure 8.4 montre le déplacement du pôle nord magnétique, situé en Antarctique, entre 1590 et 2010.

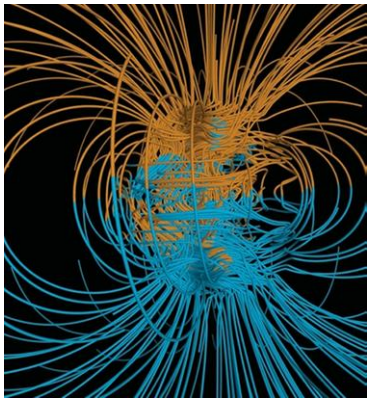


FIGURE 8.3
Une simulation du champ magnétique terrestre. Les lignes jaunes indiquent les lignes de champ qui s'éloignent et les lignes bleues, des lignes de champ qui s'approchent de la Terre.

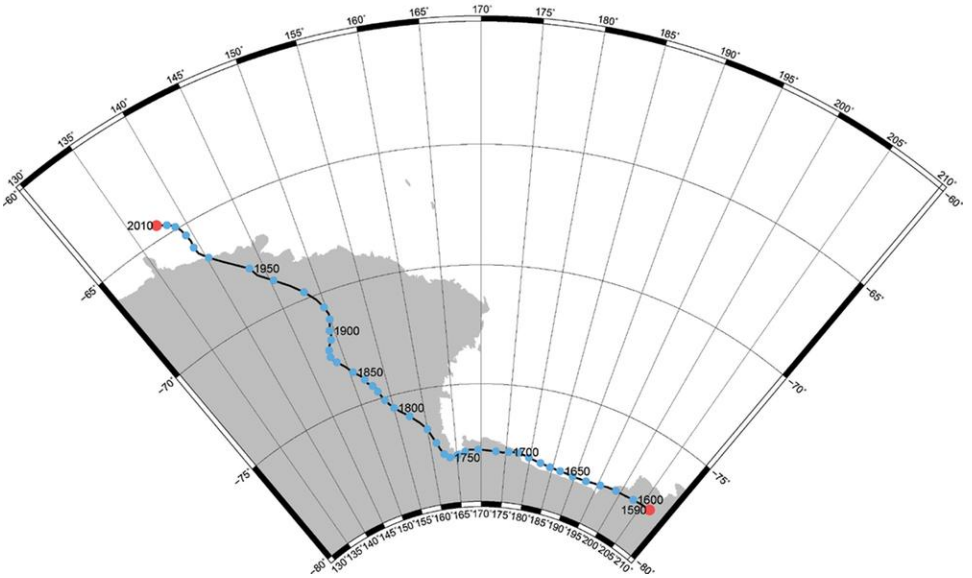


FIGURE 8.4
Le déplacement du pôle nord magnétique, entre 1590 et 2010.

Le champ magnétique produit par un long fil

Les propriétés magnétiques des aimants sont connues depuis l'Antiquité. On avait alors remarqué que certaines pierres de magnétite, composées d'un oxyde de fer, attiraient certains objets fabriqués en fer. Ces pierres étaient des aimants permanents. En 1820, le physicien danois Hans Christian Ørsted* (1777-1851) (*voir la figure 8.5*) a fait une découverte très importante durant un cours de physique : un courant électrique dans un fil change l'orientation de l'aiguille d'une boussole placée près du fil. Cette expérience montre qu'un courant électrique produit un champ magnétique.

FIGURE 8.5
Hans Christian Ørsted (1777-1851), physicien danois

La figure 8.6 illustre un long fil et des boussoles sur un plan perpendiculaire au fil. Lorsque le courant dans le fil est nul, les boussoles indiquent approximativement le nord géographique, comme le montre la figure 8.6a. Lorsqu'un courant i circule dans le fil, les aiguilles des boussoles changent d'orientation (*voir la figure 8.6b*). Le champ magnétique produit par le fil est tangent à un cercle centré sur le fil. Comme le montre la figure 8.6c, le sens du champ magnétique est obtenu à l'aide de la règle de la main droite :

Pour un long fil parcouru par un courant i continu, le champ magnétique est tangent à un cercle centré sur le fil. Le sens est celui qui est indiqué par les doigts de la main droite lorsque le pouce est placé dans le sens du courant.

* Le Ø (O barré) se prononce « EU ».

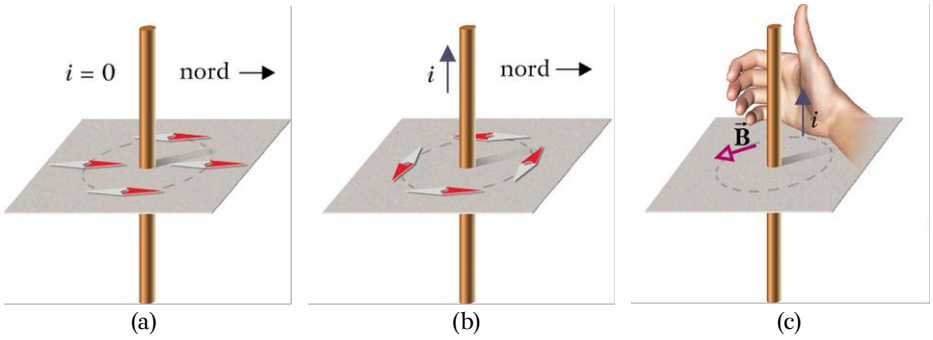


FIGURE 8.6
(a) Lorsque le courant est nul, les boussoles indiquent le nord. (b) Pour un courant vers le haut, les aiguilles des boussoles sont tangentes à un cercle. (c) Le champ magnétique est tangent au cercle, et son sens est obtenu à l'aide de la règle de la main droite.

Les problèmes de magnétisme font intervenir les trois dimensions. Dans l'exemple du fil, le courant est vers haut, et les lignes de champ magnétique forment des cercles horizontaux. Il est plus difficile de tracer correctement les situations à trois dimensions sur une feuille de papier. Nous allons donc utiliser des schémas en deux dimensions, en ajoutant les vecteurs perpendiculaires au plan de la feuille avec les symboles illustrés à la figure 8.7 : pour un vecteur qui sort de la page, on utilise un point (la pointe de la flèche) et pour un vecteur qui entre dans la page, on utilise une croix (comme les plumes d'une flèche).

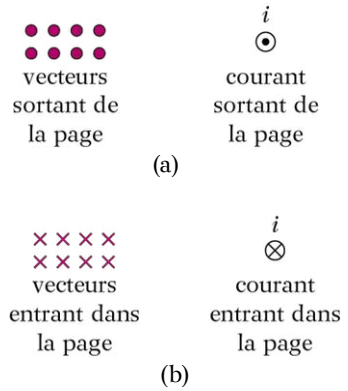


FIGURE 8.7
Les symboles pour les vecteurs et les courants perpendiculaires à la page

Conformément à cette convention, on indique à la figure 8.8 les lignes de champ magnétique pour un fil perpendiculaire à la page, avec un courant sortant et un courant entrant respectivement. Le champ magnétique diminue lorsqu'on s'éloigne du fil (comme c'est le cas pour le champ électrique d'un fil chargé), ce qui implique que les lignes de champ sont plus éloignées à mesure qu'on s'éloigne du fil. Nous allons voir dans les prochaines sections la façon de calculer le module et l'orientation du champ magnétique produit par des courants électriques.

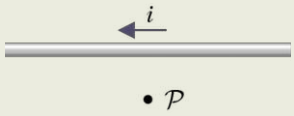
FIGURE 8.8
Les lignes de champ magnétique autour d'un courant perpendiculaire à la page. Le champ magnétique est tangent aux cercles : (a) pour un courant sortant de la page ; (b) pour un courant entrant dans la page.

REMARQUE

Le champ magnétique créé par un fil est très différent du champ électrique produit par un fil chargé, illustré à la figure 3.6 de la page 85. En effet, les lignes de champ magnétique forment des boucles fermées, alors que les lignes de champ électrique vont jusqu'à l'infini.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.1

Dans la figure suivante, quelle est l'orientation du champ magnétique au point $\mathcal{P}$?



8.2 La loi de Biot-Savart

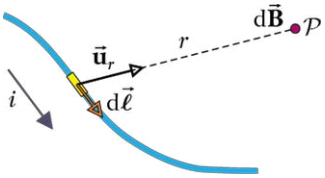


FIGURE 8.9
Un élément infinitésimal $d\vec{\ell}$ produit un champ $d\vec{B}$ au point $\mathcal{P}$.

Après la découverte d'Ørsted, les physiciens français Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841) ont trouvé une formule permettant de calculer le champ magnétique produit par un fil parcouru par un courant continu. La figure 8.9 montre une partie d'un fil parcouru par un courant i continu et un point $\mathcal{P}$ où on veut déterminer le champ magnétique $\vec{B}$. On considère d'abord un élément infinitésimal de longueur $d\vec{\ell}$, orienté selon le sens du courant i et situé à une distance r du point $\mathcal{P}$. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, nous ajoutons le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ entre l'élément de longueur et le point $\mathcal{P}$:

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} . \tag{8.1}$$

Selon la loi de Biot-Savart, l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ produit un champ magnétique infinitésimal, perpendiculaire à la fois à $d\vec{\ell}$ et à $\vec{u}_r$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2} . \tag{8.2}$$

Pour obtenir le champ produit par le fil entier, on doit faire la somme (c'est-à-dire calculer l'intégrale) sur tous les éléments de longueur du fil:

Loi de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int\frac{d\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2} . \tag{8.3}$$

Dans le Système international, le champ magnétique se mesure en teslas (T), en l'honneur de l'ingénieur américain d'origine croate Nikola Tesla (1856-1943), qui a entre autres développé les générateurs à courant alternatif. Nous verrons au chapitre 9 la définition exacte du tesla en fonction des autres unités du SI. Un champ magnétique d'un tesla représente un très grand champ magnétique. Pour cette raison, le champ magnétique est parfois exprimé en gauss (G), une unité qui ne fait pas partie du SI:

$$1\,\text{G} = 1\times10^{-4}\,\text{T} .$$

Par exemple, le champ magnétique terrestre varie d'environ 0,2 G à 0,6 G selon la position sur Terre. Le tableau 8.1 donne quelques exemples de valeurs typiques approximatives du module du champ magnétique.

TABLEAU 8.1

Quelques valeurs du module du champ magnétique

Source	B (T)
Cerveau humain	10^{-13}
Petit aimant de réfrigérateur	10^{-6}
Terre (moyen)	$0{,}4 \times 10^{-4}$
Soleil (à la surface)	10^{-2}
Barreau aimanté	10^{-2}
Soleil (dans les taches)	0,1
Aimant pour imagerie à résonance magnétique	2
Aimant à supraconducteur	10-30
Étoile à neutrons	10^{8}

La constante μ_0 est appelée la *constante magnétique* (anciennement appelée la *perméabilité du vide*). Sa valeur dans le SI est

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}\ . \tag{8.4}$$

La loi de Biot-Savart est au magnétisme ce que la loi de Coulomb est pour l'électrostatique. On peut en principe calculer le champ magnétique de n'importe quelle configuration de courant continu à partir de cette loi. Celle-ci n'est valide que lorsque le courant est continu, c'est-à-dire qu'il ne change pas en fonction du temps. Nous verrons au chapitre 10 une équation plus générale, valide pour les courants variables.

REMARQUE

La constante magnétique n'a pas d'incertitude. Nous verrons en effet au chapitre 9 que la valeur est choisie pour définir l'ampère, l'étalon du courant électrique. Dans le tome 3, nous verrons aussi qu'il existe une relation entre ϵ_0, μ_0 et la vitesse de la lumière dans le vide, qui est utilisée pour définir le mètre.

Lorsqu'il y a plusieurs sources de champ magnétique, on obtient le champ magnétique résultant à l'aide du principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \cdots\ . \tag{8.5}$$

Principe de superposition

Le produit vectoriel

La loi de Biot-Savart est exprimée en fonction d'un produit vectoriel entre l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ et le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$. Le produit vectoriel a été expliqué dans le chapitre 2 du tome 1. Comme nous aurons besoin de ce produit dans les prochaines sections, nous présentons un rappel de ses propriétés.

Prenons deux vecteurs quelconques $\vec{\mathbf{C}}$ et $\vec{\mathbf{D}}$, illustrés à la figure 8.10. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}\ .$$

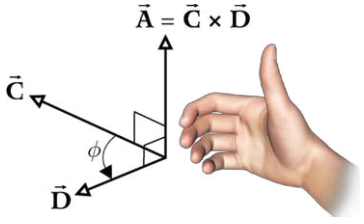


FIGURE 8.10
Le vecteur $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$, est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{C}}$ et à $\vec{\mathbf{D}}$.

Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ a les propriétés suivantes :

- Son module est $A = CD \sin \phi$, où ϕ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{C}}$ et $\vec{\mathbf{D}}$ (l'angle ϕ doit remplir la condition $0 \leq \phi \leq 180°$).
- La direction de $\vec{\mathbf{A}}$ est la direction perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{\mathbf{C}}$ et $\vec{\mathbf{D}}$. On peut ainsi dire que $\vec{\mathbf{A}}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{C}}$ et à $\vec{\mathbf{D}}$.
- Le sens de $\vec{\mathbf{A}}$ est obtenu à l'aide de la règle de la main droite du produit vectoriel : on place les doigts de la main droite selon le premier vecteur du produit ($\vec{\mathbf{C}}$) ; on tourne les doigts vers le deuxième vecteur ($\vec{\mathbf{D}}$), en balayant le plus petit angle ; le pouce donne le sens de $\vec{\mathbf{A}}$. La figure 8.10 illustre l'opération précédente.

L'ordre est très important dans un produit vectoriel. En effet, le produit vectoriel est anticommutatif ; si on change l'ordre des deux vecteurs, on obtient un vecteur opposé :

$$\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{C}} = -(\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}) .$$

De plus, le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même donne toujours le vecteur $\vec{\mathbf{0}}$, car dans ce cas, $\phi = 0$.

MISE EN GARDE

Il est très important d'utiliser le symbole × pour indiquer un produit vectoriel entre deux vecteurs et non le symbole ·, car ce dernier symbole indique plutôt un produit scalaire. Le produit vectoriel et le produit scalaire sont des opérations mathématiques différentes.

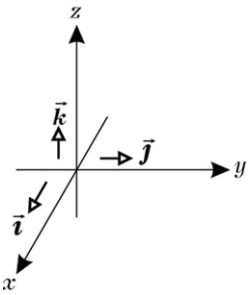


FIGURE 8.11
Les vecteurs unitaires cartésiens

La plupart du temps, nous aurons besoin de calculer le produit vectoriel à partir des composantes cartésiennes des vecteurs. Pour ce faire, nous devons calculer le produit vectoriel entre les vecteurs unitaires cartésiens, illustrés à la figure 8.11. D'abord, le produit vectoriel d'un vecteur unitaire avec lui-même donne zéro :

$$\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\mathbf{0}} . \tag{8.6}$$

Les autres produits sont obtenus à l'aide de la règle de la main droite :

$$\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}} \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}} \qquad \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}} \tag{8.7}$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = -\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{j}} \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = -\vec{\boldsymbol{i}} . \tag{8.8}$$

Prenons les vecteurs $\vec{\mathbf{C}} = C_x\vec{\boldsymbol{i}} + C_y\vec{\boldsymbol{j}} + C_z\vec{\boldsymbol{k}}$ et $\vec{\mathbf{D}} = D_x\vec{\boldsymbol{i}} + D_y\vec{\boldsymbol{j}} + D_z\vec{\boldsymbol{k}}$. Le produit vectoriel $\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$ est alors donné par :

$$\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}} = (C_yD_z - C_zD_y)\,\vec{\boldsymbol{i}} + (C_zD_x - C_xD_z)\,\vec{\boldsymbol{j}} + (C_xD_y - C_yD_x)\,\vec{\boldsymbol{k}} . \tag{8.9}$$

On peut aussi exprimer le produit vectoriel comme un déterminant :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}} &= \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ C_x & C_y & C_z \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_y & C_z \\ D_y & D_z \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} C_x & C_z \\ D_x & D_z \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} C_x & C_y \\ D_x & D_y \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{k}} . \end{aligned} \tag{8.10}$$

Le champ magnétique d'un fil

Pour illustrer l'utilisation de la loi de Biot-Savart, on calcule le champ magnétique produit par un long fil rectiligne, de longueur $2L$, parcouru par un courant continu i, comme le montre la figure 8.12. Le fil fait partie d'un circuit qui n'est pas illustré ici. On choisit un système de coordonnées cartésiennes pour que le fil soit sur l'axe des z, entre $z = -L$ et $z = L$. Le courant circule dans le sens de l'axe des z. On calcule le champ vis-à-vis du centre du fil, pour un point $\mathcal{P}$ situé à la coordonnée y.

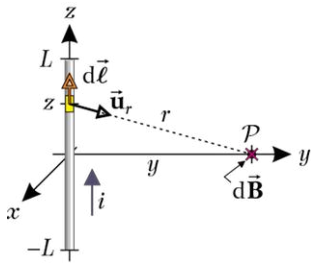


FIGURE 8.12
Un fil de longueur $2L$ est parcouru par un courant continu i. On veut calculer le champ magnétique au point $\mathcal{P}$.

On doit d'abord diviser le fil en éléments de longueur $d\vec{\ell}$. Un élément, situé à la coordonnée z, est illustré à la figure 8.12. Selon la figure, le courant a le même sens que l'axe des z. L'élément de longueur est

$$d\vec{\ell} = dz\ \vec{k}\ .$$

Il faut aussi calculer le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ et la distance r entre l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ et le point $\mathcal{P}$. Pour ce faire, on calcule d'abord le vecteur $\vec{r}$ qui relie l'élément $d\vec{\ell}$ et $\mathcal{P}$: on doit se déplacer d'une distance z à l'opposé de l'axe des z, puis d'une distance y dans le sens de l'axe des y. On obtient alors

$$\vec{r} = y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{y^2 + z^2}$$
$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{y\,\vec{j} - z\,\vec{k}}{\sqrt{y^2 + z^2}}\ .$$

On calcule ensuite le produit vectoriel $d\vec{\ell} \times \vec{u}_r$ à l'aide des équations 8.6 et 8.7:

$$d\vec{\ell} \times \vec{u}_r = \frac{dz\ y\,(\vec{k} \times \vec{j}) - dz\ z\,(\vec{k} \times \vec{k})}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{-\vec{\imath}\,y\ dz}{\sqrt{y^2 + z^2}}\ . \qquad (8.11)$$

En effet, le premier produit vectoriel donne $-\vec{\imath}$, et le second est nul. L'élément de longueur $d\vec{\ell}$ produit un champ infinitésimal, donné par l'équation 8.2:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(-\vec{\imath})y\ dz}{\sqrt{y^2 + z^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)^2$$
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(-\vec{\imath})y\ dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}\ .$$

Le champ magnétique résultant est obtenu en calculant l'intégrale de la dernière équation sur tout le fil, donc de $z = -L$ à $z = L$. Dans cette équation, la coordonnée y est une constante, car elle correspond à la position du point $\mathcal{P}$, qui est fixe. C'est la coordonnée z qui varie lorsqu'on fait la somme sur tous les éléments de longueur. Le champ magnétique est

$$\vec{B} = \int_{-L}^{L} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(-\vec{\imath})y\ dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$= -\frac{\mu_0 i y}{4\pi} \vec{\imath} \int_{-L}^{L} \frac{dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}\ .$$

L'intégrale peut être calculée à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E, avec $x \to z$ et $a \to y$. Ainsi,

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\mu_0 iy}{4\pi}\vec{\imath}\left[\frac{z}{y^2\sqrt{y^2+z^2}}\right]\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{4\pi y}\left[\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}} - \frac{(-L)}{\sqrt{y^2+L^2}}\right]\vec{\imath}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}}\vec{\imath}\,. \qquad (8.12)$$

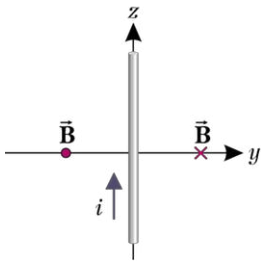


FIGURE 8.13
Le champ magnétique de chaque côté d'un fil

Le champ magnétique est parallèle à l'axe des x, donc il est parallèle au plan de la page. La figure 8.13 montre l'orientation du champ magnétique. Pour un point $\mathcal{P}$ à droite du fil, $y > 0$, et le champ est opposé à $\vec{\imath}$, donc il entre dans la page. Pour un point à gauche du fil, $y < 0$, et le champ est dans le sens de $\vec{\imath}$, donc sortant de la page.

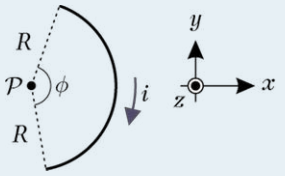
Regardons le module du champ dans le cas limite où le point $\mathcal{P}$ est très éloigné ($y = r \gg L$). Dans cette situation, on peut négliger L^2 dans la racine carrée du dénominateur :

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{L}{\sqrt{r^2}} = \frac{\mu_0 iL}{2\pi r^2}\,. \qquad (r \gg L)$$

Comme le champ électrique, le champ magnétique diminue selon $1/r^2$ pour des points très éloignés de la source du champ, c'est-à-dire du fil parcouru par un courant.

EXEMPLE 8.1 Le champ magnétique d'un arc de cercle

Un fil est recourbé pour former un arc de cercle, de rayon $R = 10{,}0$ cm et dont l'angle au sommet est $\phi = 160°$. Un courant $i = 15$ A circule dans le fil, comme le montre la figure ci-contre. Calculez le champ magnétique créé par l'arc de cercle au point $\mathcal{P}$. (Le fil fait partie d'un circuit, qui n'est pas illustré ici.)



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 8.14 montre l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ et le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$. En prenant le produit vectoriel de ces deux vecteurs, nous obtenons le champ magnétique infinitésimal $d\vec{\mathbf{B}}$, qui est entrant dans la page, donc orienté selon $-\vec{k}$.

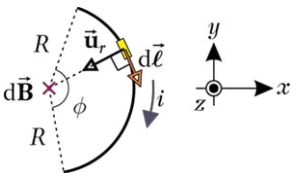


FIGURE 8.14
Le schéma de la situation pour l'exemple 8.1

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$i = 15$ A $\quad R = 0{,}100$ m $\phi = 160°$	$\vec{\mathbf{B}}$

Identifier la clé

La clé est la loi de Biot-Savart. Pour un élément $d\vec{\mathbf{B}}$, le champ infinitésimal est

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}\,. \qquad (i)$$

Dans le présent cas, tous les éléments de longueur sont situés à une distance constante $r = R$ du point $\mathcal{P}$. De plus, les vecteurs $d\vec{\ell}$ et $\vec{\mathbf{u}}_r$ sont perpendiculaires. Le produit vectoriel se calcule alors facilement à partir du module des vecteurs et de

l'orientation obtenue à l'aide de la règle de la main droite pour le produit vectoriel :

$$d\vec{\ell} \times \vec{u}_r = \left[d\ell \sin(90°)\right](-\vec{k}) = -d\ell\, \vec{k}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (i) et nous intégrons sur toute la longueur du fil :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\ell}{R^2}(-\vec{k}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{(-\vec{k})}{R^2} \int d\ell\,. \qquad \text{(iii)}$$

L'intégrale de l'élément de longueur donne simplement la longueur du fil. Pour un arc de cercle, la longueur est $L = R\phi$, où R est le rayon de l'arc de cercle et ϕ, l'angle au sommet, **exprimé en radians.** Nous obtenons alors

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}(R\phi)\,\vec{k} = -\frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}\,\vec{k}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Il ne reste qu'à remplacer les valeurs numériques dans l'équation (iv) :

$$\vec{B} = -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 15}{4\pi \times 0{,}100}\left(160° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)\vec{k}$$
$$= -4{,}2 \times 10^{-5}\ \text{T}\ \vec{k}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct (selon les valeurs indiquées au tableau 8.1). Le champ est perpendiculaire à $d\vec{\ell}$ et à $\vec{u}_r$.

8.3 Le champ magnétique d'un fil infini

À la section 8.2, nous avons calculé le champ magnétique produit par un fil rectiligne de longueur $2L$ dans lequel circule un courant i. Pour les points très rapprochés du fil, ce dernier semble infini. Selon l'équation 8.12, le module du champ magnétique est, pour $y = r \ll L$,

$$B \approx \frac{\mu_0 i L}{2\pi y L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\,. \qquad (8.13)$$

Le module du champ magnétique diminue en $1/r$. Ce résultat est semblable à celui que nous avons obtenu au chapitre 3, dans le cas d'un champ électrique produit par une tige infinie.

Regardons maintenant le fil infini dans une figure à trois dimensions. Comme le module du champ dépend de la distance r, les lignes de champ sont des cercles concentriques. Le champ magnétique doit être tangent aux lignes, comme l'indique la figure 8.15. C'est le résultat obtenu par Ørsted. L'orientation du champ magnétique est obtenue à l'aide de la règle de la main droite énoncée à la page 258.

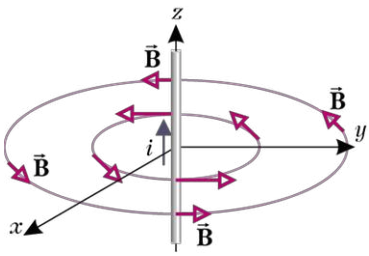


FIGURE 8.15
Le champ magnétique d'un fil infini

Il est aussi possible d'écrire cette règle à partir de vecteurs unitaires (*voir la figure 8.16*). Soit le vecteur unitaire $\vec{u}_\ell$ ayant le même sens que le courant et le vecteur unitaire $\vec{u}_\perp$ perpendiculaire au fil, orienté du fil vers le point $\mathcal{P}$. Par construction, ces deux vecteurs unitaires sont perpendiculaires. Selon la loi de Biot-Savart, l'orientation du champ magnétique produit par un long fil est donnée par le produit vectoriel $\vec{u}_\ell \times \vec{u}_\perp$. On obtient donc le champ magnétique à une distance r d'un fil parcouru par un courant i :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\vec{u}_\ell \times \vec{u}_\perp\,. \qquad (8.14)$$

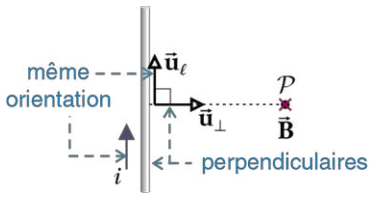


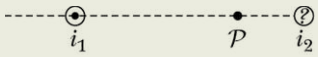
FIGURE 8.16
Les vecteurs unitaires pour le champ magnétique d'un fil infini

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.2

La figure suivante montre deux longs fils parcourus par des courants perpendiculaires à la page. Le champ magnétique résultant est nul au point $\mathcal{P}$.

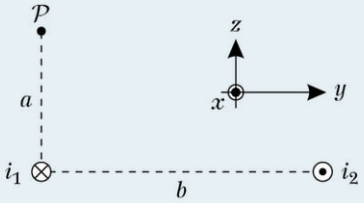
a. Quel est le sens du courant i_2 ?

b. Quel courant est le plus intense ?



EXEMPLE 8.2 Le champ produit par deux fils

Deux très longs fils sont parcourus par des courants ($i_1 = 5{,}00$ A et $i_2 = 8{,}00$ A) dans le sens de l'axe des x, comme le montre la figure ci-contre. Calculez le champ magnétique au point $\mathcal{P}$ si $a = 1{,}50$ cm et $b = 2{,}50$ cm.



SOLUTION

Illustrer la situation

À la figure 8.17, nous illustrons les vecteurs associés à chaque fil : $\vec{\mathbf{u}}_\ell$ avec la même orientation que le courant et $\vec{\mathbf{u}}_\perp$ perpendiculaire au fil. Nous traçons aussi les champs magnétiques, perpendiculairement à la direction radiale et avec le sens obtenu à l'aide de la règle de la main droite.

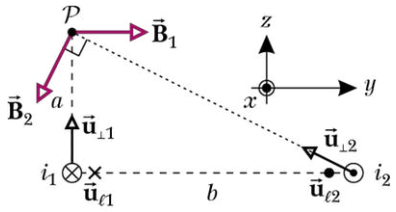


FIGURE 8.17
Les vecteurs unitaires pour l'exemple 8.2

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$a = 0{,}0150$ m	$b = 0{,}0250$ m	$\vec{\mathbf{B}}$
$i_1 = 5{,}00$ A	$i_2 = 8{,}00$ A	

Selon le système de coordonnées, nous avons

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 1} = -\vec{\imath} \qquad \vec{\mathbf{u}}_{\perp 1} = \vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 1} \times \vec{\mathbf{u}}_{\perp 1} = -\vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath} \qquad r_1 = a$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 2} = \vec{\imath} \qquad \vec{\mathbf{u}}_{\perp 2} = \frac{-b\vec{\jmath} + a\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 2} \times \vec{\mathbf{u}}_{\perp 2} = \frac{\vec{\imath} \times (-b)\vec{\jmath} + \vec{\imath} \times (a)\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-b\vec{k} - a\vec{\jmath}}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Identifier les clés

La première clé est que chaque fil produit un champ magnétique obtenu à l'aide de l'équation 8.14 :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{\mathbf{u}}_\ell \times \vec{\mathbf{u}}_\perp . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est que le champ résultant est obtenu en appliquant le principe de superposition, c'est-à-dire l'équation 8.5 :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons le champ magnétique produit par chaque fil :

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1} \vec{\mathbf{u}}_{\ell 1} \times \vec{\mathbf{u}}_{\perp 1}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5{,}00}{2\pi \times 0{,}0150} \vec{\jmath} = 6{,}667 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2} \vec{\mathbf{u}}_{\ell 2} \times \vec{\mathbf{u}}_{\perp 2}$$

$$= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{-b\vec{k} - a\vec{\jmath}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \left(\frac{-a\vec{\jmath} - b\vec{k}}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}00}{2\pi} \left(\frac{-0{,}0150\vec{\jmath} - 0{,}0250\vec{k}}{0{,}0150^2 + 0{,}0250^2} \right)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2 = (-2{,}824\vec{\jmath} - 4{,}706\vec{k}) \times 10^{-5}\ \mathrm{T} .$$

Le champ résultant est

$$\vec{\mathbf{B}} = 6{,}667\times10^{-5}\,\mathrm{T}\,\vec{\boldsymbol{j}} + (-2{,}824\times10^{-5}\,\vec{\boldsymbol{j}} - 4{,}706\times10^{-5}\,\vec{\boldsymbol{k}})\,\mathrm{T}$$
$$= (3{,}84\vec{\boldsymbol{j}} - 4{,}71\vec{\boldsymbol{k}})\times10^{-5}\,\mathrm{T}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
Les champs magnétiques calculés ont la même orientation que celle que nous obtenons à l'aide de la règle de la main droite. L'ordre de grandeur est correct.

8.4 Les boucles de courant et les dipôles magnétiques

Le champ sur l'axe d'une boucle de courant

La loi de Biot-Savart permet de calculer le champ magnétique produit par une boucle conductrice, parcourue par un courant continu i. La figure 8.18a montre une boucle circulaire de rayon R, dans le plan des xy et centrée à l'origine. On veut calculer le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à la coordonnée z sur l'axe de la boucle. La figure 8.18b montre une projection dans le plan des yz.

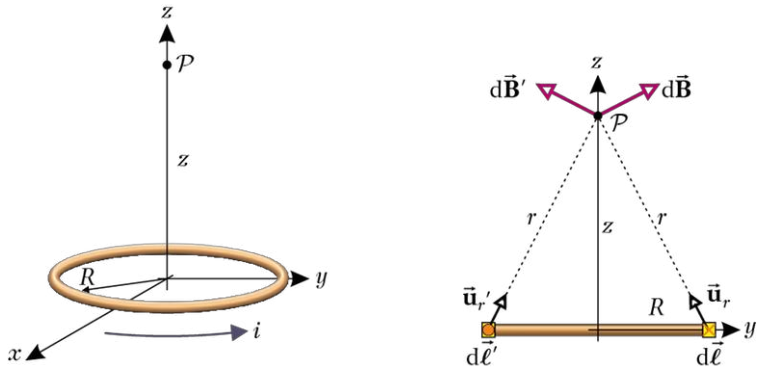


FIGURE 8.18
(a) Une boucle de rayon R est parcourue par un courant i. (b) Une projection de la boucle avec les vecteurs pour le calcul du champ magnétique.

Soit un élément $\mathrm{d}\vec{\ell}$ illustré, qui est situé sur l'axe des y. Selon la loi de Biot-Savart, cet élément produit un champ magnétique :

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}\times\vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}\,.$$

À cet endroit, le courant entre dans la page de telle sorte que $\mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\ell\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$. On a aussi

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \frac{-R\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$r = \sqrt{R^2+z^2}\,.$$

Le produit vectoriel entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\vec{\mathbf{u}}_r$ est

$$d\vec{\ell} \times \vec{u}_r = (-\vec{\imath}\, d\ell) \times \left(\frac{-R\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$
$$= \frac{R\vec{k} + z\vec{\jmath}}{\sqrt{R^2 + z^2}}\, d\ell \,.$$

Le champ $d\vec{\mathbf{B}}$ a la même orientation que ce produit vectoriel. Ce champ magnétique est indiqué à la figure 8.18b.

À l'opposé de l'élément $d\vec{\ell}$, il y a un élément $d\vec{\ell}'$ où le courant est sortant. Cet élément est situé à la même distance r, et il produit un champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}'$ illustré à la figure 8.18b. Pour cet élément,

$$d\vec{\ell}' = \vec{\imath}\, d\ell$$
$$\vec{u}_r' = \frac{R\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$
$$r' = r = \sqrt{R^2 + z^2} \,.$$

Le champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}'$ est orienté selon le produit vectoriel suivant :

$$d\vec{\ell}' \times \vec{u}_r' = (\vec{\imath}\, d\ell) \times \left(\frac{R\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}\, d\ell \right)$$
$$= \frac{R\vec{k} - z\vec{\jmath}}{\sqrt{R^2 + z^2}}\, d\ell \,.$$

On remarque que l'élément de longueur $d\vec{\ell}'$ produit un champ magnétique qui a la même composante z, mais une composante y opposée au champ infinitésimal $d\vec{\mathbf{B}}$, car la distance r est la même. Lorsqu'on va calculer l'intégrale, la composante y de chaque champ infinitésimal sera annulée. Pour les autres éléments de longueur, le champ aura une composante z et une composante horizontale. La composante horizontale sera annulée par l'élément de longueur opposé, ce qui laissera uniquement la composante z. Le champ résultant de la boucle est donc obtenu en intégrant uniquement la composante z des champs infinitésimaux :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{R\vec{k}\, d\ell}{r^2 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int d\ell \,,$$

où on a sorti les constantes de l'intégrale (la coordonnée z est une constante, car le point $\mathcal{P}$ est fixe). Il ne reste qu'à intégrer sur l'élément $d\ell$, ce qui donne simplement la longueur de la boucle, c'est-à-dire $2\pi R$. On obtient donc le champ magnétique sur l'axe d'une boucle :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\, 2\pi R$$
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2 \vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{(une boucle de courant)} \,. \tag{8.15}$$

Le module est maximal au centre de la boucle ; à cet endroit, le champ est

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{k} \,. \quad \text{(au centre de la boucle)}$$

Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant dans la boucle. On trouve une nouvelle règle de la main droite qui donne l'orientation de $\vec{\mathbf{B}}$ selon l'orientation du courant dans la boucle.

On enroule les doigts de la main droite selon le sens du courant dans la boucle. Le sens du champ magnétique au centre et sur l'axe de la boucle est donné par le pouce.

Règle de la main droite pour les boucles de courant

La figure 8.19 illustre le champ sur l'axe de la boucle.

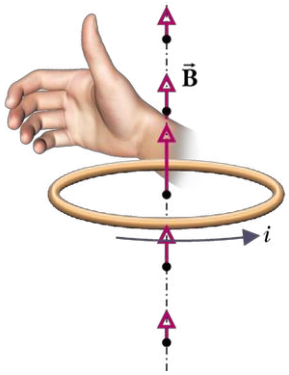
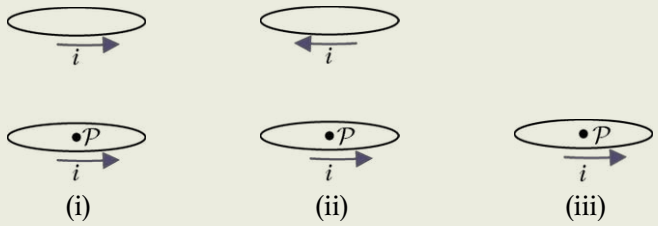


FIGURE 8.19
Le champ magnétique sur l'axe d'une boucle

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.3

La figure suivante montre trois configurations de boucles de courant. Chaque boucle est parcourue par le même courant i. Classez les configurations par ordre décroissant du module du champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé au centre d'une boucle.



Les dipôles magnétiques

On veut maintenant obtenir le champ magnétique d'une boucle de courant pour des points très éloignés de la boucle. L'équation 8.15 permet de calculer le champ magnétique sur l'axe de la boucle pour $|z| \gg R$:

$$\vec{\mathbf{B}} \approx \frac{\mu_0 i \pi R^2}{2\pi |z|^3} \vec{k} = \frac{\mu_0 i A}{2\pi |z|^3} \vec{k} ,$$

où $A = \pi R^2$ est l'aire de la boucle. Il est possible de montrer que pour des points éloignés, la forme de la boucle n'a pas d'importance, seulement son aire. C'est la raison pour laquelle on écrit le champ en fonction de l'aire de la boucle.

Au chapitre 3, nous avons considéré le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ comme un vecteur qui est perpendiculaire à une surface et dont le module donne l'aire de la surface. Ce vecteur est aussi utile ici, car le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la boucle. Il y a par contre une ambiguïté dans le sens du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$, car il y a deux sens possibles pour un vecteur perpendiculaire à la boucle. On lève cette ambiguïté en ajoutant une convention pour le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$, qu'on appelle la *convention de la main droite* (*voir la figure 8.20*).

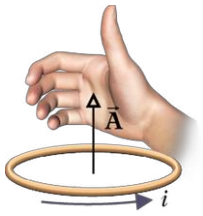


FIGURE 8.20
La convention de la main droite pour le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$

Convention de la main droite

On oriente les doigts de la main droite selon le courant dans la boucle. Le sens du pouce donne l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ qui représente l'aire de la boucle. Le champ magnétique au centre et sur l'axe de la boucle a la même orientation que le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$.

Le champ magnétique sur l'axe de la boucle pour des points éloignés est

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i \vec{\mathbf{A}}}{2\pi |z|^3} \qquad \text{(sur l'axe, pour } |z| \gg R) \; . \qquad (8.16)$$

Ce champ magnétique a la même forme que le champ électrique sur l'axe d'un dipôle électrique. Nous avons vu au chapitre 2 qu'un dipôle électrique est constitué d'une charge $+q$ et d'une charge $-q$. Selon l'équation 2.7 de la page 43, le champ électrique à une distance z sur l'axe d'un dipôle électrique est

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{2k\vec{\mathbf{p}}}{|z|^3} = \frac{\vec{\mathbf{p}}}{2\pi\epsilon_0 |z|^3} ,$$

où $\vec{\mathbf{p}}$ est le moment dipolaire électrique, qui caractérise le dipôle électrique. En comparant cette équation avec l'équation 8.16, on remarque que la constante électrique est remplacée par la constante magnétique (au numérateur à la place du dénominateur). Le même facteur $1/(2\pi|z|^3)$ apparaît. Le moment dipolaire électrique $\vec{\mathbf{p}}$ est remplacé par le facteur $i\vec{\mathbf{A}}$. On définit donc le *moment dipolaire magnétique* (ou simplement le *moment magnétique*) de la boucle ainsi :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} \equiv i\vec{\mathbf{A}} . \tag{8.17}$$

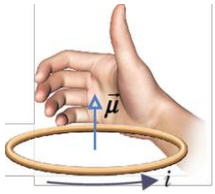
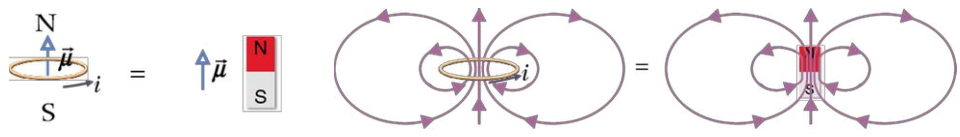


FIGURE 8.21
L'orientation du moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$

Dans le SI, le moment magnétique se mesure en $A \cdot m^2$. Le moment magnétique d'une boucle est un vecteur qui a la même orientation que le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$: son orientation est obtenue à l'aide de la convention de la main droite (*voir la figure 8.21*). Avec cette définition, le champ magnétique sur l'axe d'une boucle est

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \vec{\boldsymbol{\mu}}}{2\pi |z|^3} \qquad \text{(sur l'axe avec } |z| \gg R) . \tag{8.18}$$

Pour des points éloignés, une boucle de courant produit un champ magnétique équivalant au champ produit par un barreau aimanté, avec un pôle nord et un pôle sud séparés par une certaine distance. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ est orienté comme s'il reliait le pôle sud au pôle nord (*voir la figure 8.22a*), de la même façon que le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ est orienté de la charge électrique négative vers la charge électrique positive. On peut donc caractériser un barreau aimanté par un vecteur moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, de telle façon que l'équation 8.18 donne le champ magnétique de l'aimant. La figure 8.22b montre les lignes de champ pour une boucle de courant et pour un barreau aimanté.



(a) (b)

FIGURE 8.22
(a) Une boucle parcourue par un courant est équivalente à un barreau aimanté pour des points éloignés. Les deux configurations sont des dipôles magnétiques. (b) Les lignes de champ magnétique pour les deux configurations.

On a considéré une boucle simple. On peut aussi fabriquer un *solénoïde* (aussi appelé *bobine hélicoïdale*) constitué de N spires, en enroulant un fil conducteur sur un cylindre. Chaque spire est équivalente à une boucle de courant. Pour des points éloignés, le champ magnétique résultant est simplement le champ d'une

boucle multiplié par le nombre de spires. On tient compte du nombre de spires dans la définition du moment magnétique :

$$\vec{\mu}_{\text{solé}} \equiv Ni\vec{\mathbf{A}} \,. \tag{8.19}$$

Moment magnétique

Avec cette définition, le champ pour des points éloignés du solénoïde est donné par l'équation 8.18.

MISE EN GARDE

Veillez à ne pas confondre le vecteur moment magnétique $\vec{\mu}$ et la constante magnétique μ_0.

EXEMPLE 8.3 Le champ d'un dipôle magnétique

Une bobine plate est formée en enroulant un long fil sur un cylindre de carton de 1,00 cm de rayon. La bobine a 500 spires. À une distance de 15 cm au-dessus de la bobine et sur son axe, le module du champ magnétique est de $4{,}5 \times 10^{-5}$ T.

a. Quel est le module du moment magnétique de la bobine ?

b. Quel est le courant qui circule dans la bobine ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$B = 4{,}5 \times 10^{-5}$ T	$z = 0{,}15$ m	μ
$R = 0{,}010$ m	$N = 500$	i

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous supposons que $|z| \gg R$ pour pouvoir utiliser l'équation 8.18 comme une bonne approximation du champ magnétique. Cette équation permet de calculer le module du moment magnétique de la bobine :

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi |z|^3} \Rightarrow \mu = \frac{2\pi B |z|^3}{\mu_0} \,. \tag{i}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\mu = \frac{2\pi \times 4{,}5 \times 10^{-5} (0{,}15)^3}{4\pi \times 10^{-7}} = 0{,}759 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$\mu = 0{,}76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \,. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la définition du moment magnétique pour une bobine (*voir l'équation 8.19*) :

$$\mu = NiA = Ni\pi R^2 \Rightarrow i = \frac{\mu}{N\pi R^2} \,. \tag{ii}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons donc

$$i = \frac{0{,}759}{500 \times \pi \, (0{,}010)^2} = 4{,}8 \text{ A} \,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Remarquez qu'il faut un courant assez important et une bobine avec un grand nombre de spires pour produire un petit champ magnétique.

8.5 Le théorème d'Ampère

Le physicien français André-Marie Ampère (1775–1836) (*voir la figure 8.23 à la page suivante*), peu de temps après la découverte d'Ørsted, a découvert une méthode pour obtenir l'orientation du champ magnétique autour d'un long fil. Selon Ampère, le champ magnétique produit par un long fil parcouru par un courant continu est tangent à un cercle qui entoure le fil, et son module est uniforme le long du cercle. Ce résultat est un cas particulier du théorème qui porte son nom.

FIGURE 8.23
André-Marie Ampère (1775-1836), physicien français

Nous avons vu deux méthodes pour calculer le champ électrique engendré par une distribution continue de charge. Au chapitre 2, le champ électrique a été calculé à l'aide d'une intégrale basée sur la loi de Coulomb. Au chapitre 3, le champ électrique a été calculé pour des configurations ayant certaines symétries, à l'aide du théorème de Gauss. Cette dernière méthode ne peut pas être utilisée pour des configurations quelconques. Cependant, lorsqu'on peut l'utiliser, elle permet de calculer facilement le champ électrique.

La loi de Biot-Savart est l'équivalent de la loi de Coulomb. Elle permet de calculer de façon générale le champ magnétique pour n'importe quelle configuration de courant continu. Au besoin, un ordinateur peut être utilisé pour calculer l'intégrale. Il existe aussi une méthode, basée sur la symétrie d'une configuration, qui est la méthode du théorème d'Ampère.

Pour comprendre d'où vient ce théorème, on commence par comparer les lignes de champ électrique et les lignes de champ magnétique dans le cas de deux configurations simples. La figure 8.24a illustre les lignes de champ électrique produit par une charge ponctuelle positive $+q$. Les lignes de champ vont de la charge positive jusqu'à l'infini de façon radiale. À la figure 8.24b, les lignes de champ magnétique produit par un fil infini sont illustrées. Cette fois-ci, les lignes de champ forment des cercles fermés. La figure 8.24 présente des exemples simples qui illustrent les caractéristiques des lignes de champ électrique et des lignes de champ magnétique. Les lignes de champ électrique divergent vers l'infini, alors que les lignes de champ magnétique tournent autour d'un courant.

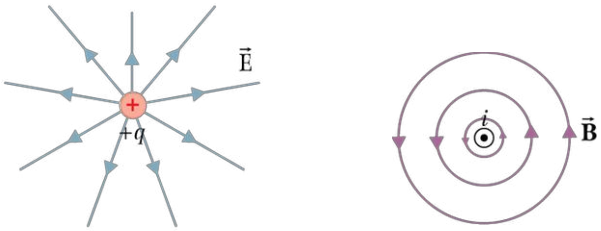


FIGURE 8.24
(a) Les lignes du champ électrique produit par une charge ponctuelle. (b) Les lignes du champ magnétique produit par un fil infini dans lequel circule un courant.

Le flux

La divergence des lignes de champ électrique est mise en évidence lorsqu'on calcule le flux à travers une surface fermée. Selon la section 3.2, le flux est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent une surface. À la figure 8.25a, on a tracé une surface de Gauss quelconque autour de la charge électrique. Les lignes de champ sortent de la surface de Gauss, ce qui correspond à un flux électrique non nul. Selon le théorème de Gauss (*voir l'équation 3.10*),

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{+q}{\epsilon_0}.$$

À la figure 8.25b, on a aussi tracé une surface de Gauss autour du fil pour calculer le flux magnétique à travers la surface. Étant donné que les lignes de champ magnétique forment des courbes fermées, les lignes qui entrent dans la surface à un endroit ressortent de la surface à un autre endroit. Il y a autant de lignes

entrant dans la surface que de lignes sortant de la surface. Le flux magnétique est donc nul :

$$\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \,. \tag{8.20}$$

Théorème de Gauss pour le magnétisme

C'est le théorème de Gauss pour le magnétisme. Cette équation est générale, car les lignes de champ magnétique forment toujours des courbes fermées, puisque les monopôles magnétiques n'existent pas. Le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. Le théorème de Gauss n'est donc pas utile pour calculer le champ magnétique d'une configuration, puisque le flux magnétique est nul pour toutes les configurations.

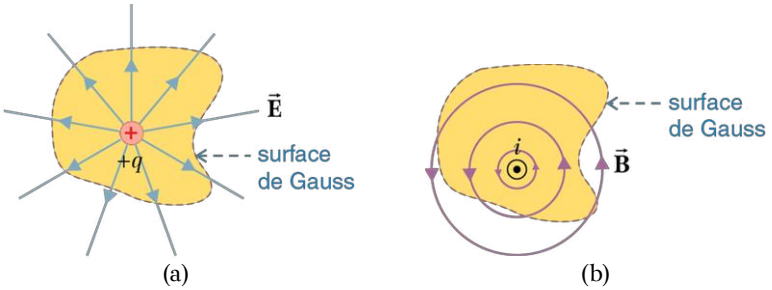


FIGURE 8.25
(a) Le flux électrique est positif, car les lignes de champ sortent de la surface. (b) Le flux magnétique est nul, car il y a autant de lignes de champ entrantes que de lignes de champ sortantes.

La circulation

La rotation des lignes de champ est mise en évidence mathématiquement en introduisant le concept de *circulation* du champ. La circulation d'un champ est définie par une intégrale curviligne du champ le long d'un parcours fermé. Pour calculer cette intégrale, on doit diviser le parcours en éléments $d\vec{\mathbf{s}}$, tangents au parcours. Prenons par exemple le champ électrique d'une charge ponctuelle $+q$, illustré à la figure 8.26, avec le parcours fermé qui est tracé en pointillé. La circulation est définie par l'équation :

$$\mathcal{C}_E = \oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,. \tag{8.21}$$

La notation $\oint$ indique qu'il s'agit d'un parcours fermé.

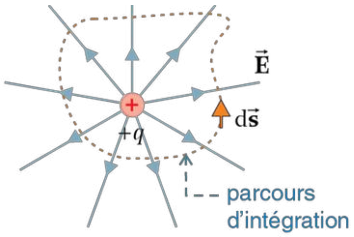


FIGURE 8.26
On calcule la circulation d'un champ électrique pour un parcours fermé.

Pour le champ électrique, la circulation correspond à la différence de potentiel, car l'équation 8.21 est équivalente à l'équation 4.10 de la page 126. Comme le parcours est fermé, on obtient la différence de potentiel $\Delta V = V_a - V_a = 0$. La circulation du champ électrique est nulle lorsque le champ est produit par des charges électriques* :

$$\mathcal{C}_E = \oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \,. \tag{8.22}$$

Ceci est la conséquence du fait que la force électrique est conservative. La loi des mailles, utilisée au chapitre 7, en est une conséquence. La circulation nulle du

* Au chapitre 10, nous étudierons un champ électrique qui n'est pas produit par des charges, et dont la circulation n'est pas nulle.

champ électrique montre que les lignes de champ électrique issues d'une charge ponctuelle ne tournent pas.

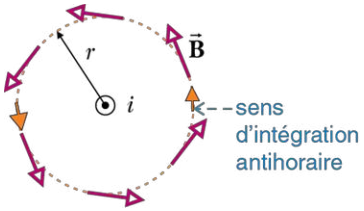


FIGURE 8.27
Le calcul de la circulation du champ magnétique produit par un fil infini, sur un cercle de rayon r

Contrairement au champ électrique, le champ magnétique peut avoir une circulation non nulle. Prenons par exemple le champ magnétique produit par un fil infini et calculons la circulation sur un parcours circulaire de rayon r, centré sur le fil (*voir la figure 8.27*). Un courant continu i circule dans le fil. Selon l'équation 8.14, le champ magnétique est tangent au cercle, et son module est uniforme le long du cercle :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} .$$

La circulation du champ est donc

$$\mathcal{C}_B = \oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{ligne}} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) ds \cos(0°)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint_{\text{ligne}} ds .$$

L'intégrale donne simplement la longueur du parcours, c'est-à-dire $2\pi r$. On obtient donc

$$\mathcal{C}_B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) (2\pi r)$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i .$$

On voit que la circulation du champ magnétique ne dépend pas du rayon du cercle choisi, mais seulement du courant qui traverse le cercle. On remarque donc que le flux électrique dépend de la charge électrique et que la circulation du champ électrique est nulle. À l'opposé, le flux magnétique est toujours nul, alors que la circulation du champ magnétique dépend du courant.

Le théorème d'Ampère

Le dernier calcul est un exemple du *théorème d'Ampère*. Soit une boucle fermée quelconque, qu'on appelle une *boucle d'Ampère*, qui entoure des fils parcourus par des courants. Selon le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique dépend uniquement du courant qui traverse la boucle d'Ampère et non de la longueur du parcours :

Théorème d'Ampère

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} . \qquad (8.23)$$

Ici, i_{inc} est le courant inclus dans la boucle, c'est-à-dire le courant qui passe à travers la surface délimitée par la boucle. Si le courant ne passe pas à travers la boucle d'Ampère, il ne contribue pas à la circulation du champ magnétique, même s'il produit un champ magnétique. La forme exacte et la position précise des courants à l'intérieur de la boucle n'ont pas d'effet sur le résultat de l'intégrale.

La description précédente est semblable au théorème de Gauss en électricité, où le flux électrique à travers une surface fermée dépend uniquement de la charge électrique à l'intérieur de la surface et non de la position exacte des charges à l'intérieur ou de la forme de la surface de Gauss.

Dans le théorème de Gauss, les charges positives et les charges négatives produisent un flux opposé, qui est nul lorsque la charge nette à l'intérieur de la surface est nulle. Dans le cas du théorème d'Ampère, le sens du courant qui traverse la boucle est aussi important. Dans l'équation 8.23, on doit ajouter un signe pour le courant, selon son sens, en fonction de la règle de la main droite. D'abord, il faut choisir un sens arbitraire pour le parcours d'intégration. Le signe du courant dépend de ce sens :

On enroule les doigts de la main droite selon le sens du parcours d'intégration. Le pouce indique le sens positif pour le courant dans le calcul de la circulation du champ magnétique. Si le courant est dans le sens du pouce, alors il est positif. Au contraire, si le courant est opposé au pouce, il est négatif.

La figure 8.28 montre une boucle d'Ampère qui entoure deux fils, avec un parcours en sens antihoraire. Selon la règle de la main droite, le sens positif du courant est le sens sortant de la page. La circulation du courant, pour cet exemple, est

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 (i_2 - i_1) .$$

Le courant i_3 ne contribue pas à l'intégrale parce qu'il ne traverse pas la boucle d'Ampère.

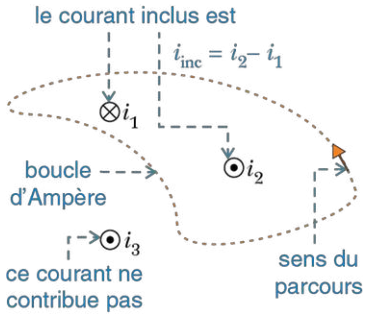


FIGURE 8.28
La règle de la main droite est utilisée pour obtenir le signe du courant dans le théorème d'Ampère.

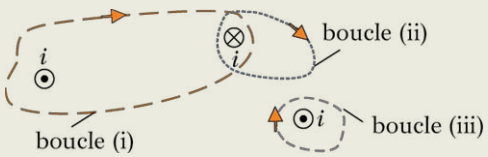
Tout comme le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère est utile pour calculer le champ magnétique seulement dans certains cas, lorsque la symétrie de la configuration de courant permet de connaître l'orientation du champ magnétique. De cette façon, on peut choisir une boucle d'Ampère de telle sorte que l'intégrale de la circulation soit très simple à calculer. La symétrie cylindrique du fil infini est un de ces cas. Nous verrons d'autres configurations dans les prochains exemples et la prochaine section.

REMARQUE

Une boucle d'Ampère est une courbe mathématique. Elle ne correspond pas nécessairement à une courbe réelle. On la choisit pour pouvoir appliquer le théorème d'Ampère.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.4

La figure suivante montre trois boucles d'Ampère et trois fils parcourus par un même courant i. Classez les boucles par ordre croissant (de la plus négative à la plus positive) selon la valeur de la circulation du champ magnétique ($\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$) pour des parcours d'intégration en sens horaire.



EXEMPLE 8.4 Le champ produit par un fil

Un long fil, de rayon R, est parcouru par un courant i uniformément distribué sur sa section transversale.

a. Calculez le module du champ magnétique à l'intérieur du fil, à une distance $r < R$ du centre du fil.

b. Calculez le module du champ magnétique à l'extérieur du fil, à une distance $r > R$ du centre du fil.

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 8.29a montre le fil parcouru par le courant i et la figure 8.29b, une coupe transversale agrandie du fil, avec le courant sortant de la page. La boucle d'Ampère choisie est circulaire, de rayon r, qui correspond à l'endroit où nous voulons calculer le champ magnétique.

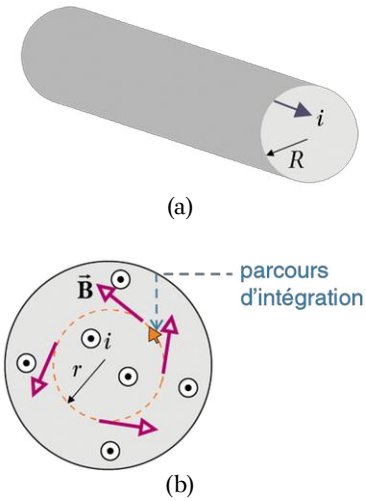


FIGURE 8.29
(a) Le fil parcouru par un courant i. (b) Une coupe transversale agrandie avec la boucle d'Ampère et le champ magnétique.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
R	i	B
$r < R$		

La configuration a une symétrie cylindrique. Le champ magnétique doit être tangent au cercle choisi comme boucle d'Ampère, car si nous faisons une réflexion par rapport à un diamètre du cylindre, la configuration ne change pas. De plus, le module du champ doit être uniforme, car si nous tournons le cylindre de n'importe quel angle, cela ne change pas la configuration. Nous trouvons le sens du champ à l'aide de la règle de la main droite : nous plaçons le pouce selon le sens du courant (qui sort de la page), et le champ tourne selon le sens des doigts (en sens antihoraire). Nous choisissons donc le sens du parcours d'intégration pour qu'il soit antihoraire.

Identifier la clé

La **clé** est le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Comme le montre la figure 8.29b, le champ magnétique est parallèle à l'élément $d\vec{\mathbf{s}}$ (donné par la flèche orange), car les deux vecteurs sont tangents au cercle. De plus, le module du champ doit être uniforme le long du cercle. Alors,

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} B\, ds \cos(0°) = B \oint_{\text{cercle}} ds$$
$$= B2\pi r \ . \qquad \text{(ii)}$$

Ici, le rayon r correspond au rayon de la boucle d'Ampère, car c'est sur cette boucle que se calcule l'intégrale curviligne.

Il faut faire attention, dans le calcul de i_{inc}, car ce n'est pas tout le courant i qui passe à travers la boucle d'Ampère. Comme le courant est uniformément distribué, cela implique que le module de la densité de courant $J = i/(\pi R^2)$ est uniforme. Alors,

$$i_{\text{inc}} = JA_{\text{boucle}} = J\,(\pi r^2) = \frac{i}{\pi R^2}(\pi r^2)$$
$$= i\frac{r^2}{R^2} \ . \qquad \text{(iii)}$$

En insérant les équations (ii) et (iii) dans l'équation (i), nous obtenons

$$B2\pi r = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

Pour trouver le champ à l'extérieur du fil, nous avons besoin d'une boucle d'Ampère de rayon $r > R$, comme le montre la figure 8.30.

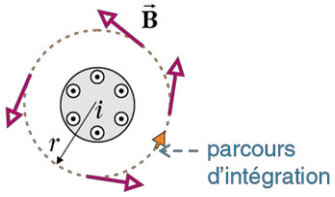


FIGURE 8.30
Une section transversale du fil avec la boucle d'Ampère et le champ magnétique

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
R	i	B
$r > R$		

Le champ magnétique doit de nouveau être tangent, car la configuration a la même symétrie cylindrique. Il doit tourner de façon antihoraire, selon la règle de la main droite. Le parcours d'intégration est choisi en sens antihoraire.

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} \ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

L'intégrale curviligne se calcule de la même façon que dans la partie **a.** :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} B\, ds \cos(0°) = B \oint_{\text{cercle}} ds$$
$$= B2\pi r \ , \qquad \text{(v)}$$

où r est le **rayon de la boucle d'Ampère.** Comme le montre la figure 8.30, c'est tout le courant i qui passe à travers la boucle d'Ampère, cette fois-ci. Alors, $i_{\text{inc}} = i$. Nous insérons ces résultats dans l'équation (v) :

$$B2\pi r = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous remarquons que le champ magnétique est nul au centre du fil et qu'il augmente jusqu'à la surface. À l'extérieur du fil, le champ magnétique diminue en $1/r$, comme nous l'avons vu à l'équation 8.16. La figure 8.31 montre la relation entre le module du champ et la distance r.

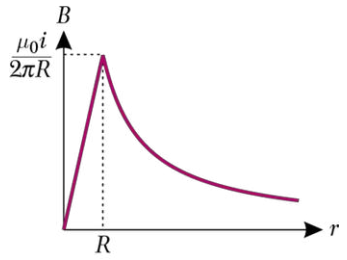
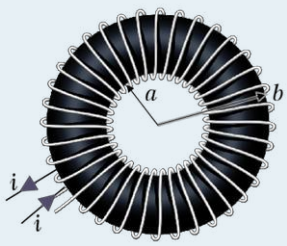


FIGURE 8.31
Le graphique du module du champ magnétique en fonction de la distance du centre du fil

EXEMPLE 8.5 Le champ d'une bobine toroïdale

Une bobine toroïdale est un enroulement de fil autour d'un tore (communément appelé un *beigne*), comme le montre la figure suivante. Le rayon intérieur de la bobine est $a = 2{,}00$ cm, et son rayon extérieur est $b = 10{,}0$ cm. La bobine possède 600 spires jointives (très rapprochées), et le courant dans le fil est de 3,50 A. Calculez le module du champ magnétique à une distance de 5,00 cm du centre.



SOLUTION

Illustrer la situation

Nous présentons, à la figure 8.32, le parcours d'intégration. Chaque spire peut être considérée comme une boucle de courant circulaire. Selon la règle de la main droite pour les boucles de courant, le champ magnétique doit être orienté vers la droite pour la spire du haut, et son orientation doit tourner en sens horaire par rapport au centre du tore.

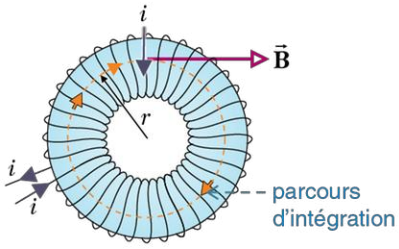


FIGURE 8.32
Le parcours d'intégration et le champ magnétique pour une spire

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$N = 600$	$i = 3{,}50$ A	B
$a = 0{,}020\,0$ m	$b = 0{,}100$ m	
$r = 0{,}050\,0$ m		

Pour des spires jointives, la configuration est symétrique sous une rotation autour du centre du tore. En effet, le tore peut être tourné d'un angle quelconque, et la situation ne change pas. De plus, on peut faire une réflexion par rapport à n'importe quel plan qui passe par le centre du tore. Ceci implique que le champ magnétique doit être tangent à un cercle centré sur le tore et que son module doit être uniforme le long de ce cercle. Nous choisissons alors un parcours d'intégration circulaire horaire, de rayon $r = 5{,}00$ cm.

Identifier la clé

La clé est le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Le champ magnétique est uniforme et dans le même sens que l'élément $d\vec{\mathbf{s}}$ sur tout le parcours d'intégration. L'intégrale curviligne est alors

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} B\, ds \cos(0°) = B \oint_{\text{cercle}} ds$$
$$= B2\pi r \,. \qquad \text{(ii)}$$

Pour chaque spire, le courant traverse la boucle d'Ampère dans le sens positif. Avec N spires, le courant qui passe à travers la boucle d'Ampère est

$$i_{\text{inc}} = Ni \,. \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons les équations (ii) et (iii) dans l'équation (i) :

$$B2\pi r = \mu_0 Ni \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \,. \qquad \text{(iv)}$$

Il ne reste qu'à remplacer les valeurs dans l'équation (iv) :

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 600 \times 3{,}50}{2\pi \times 0{,}050\,0} = 8{,}40 \times 10^{-3}\ \text{T}$$
$$= 8{,}40\ \text{mT} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien à la question. Remarquez que le champ magnétique est nul dans le trou et à l'extérieur du tore. Dans ces cas, on choisit une boucle d'Ampère circulaire avec $r < a$ ou $r > b$ respectivement. Par symétrie, le champ magnétique doit être tangent à un cercle, $i_{\text{inc}} = 0$ et $B = 0$. La bobine toroïdale est donc une configuration qui produit un champ magnétique dans une région limitée.

8.6 Le champ magnétique produit par les solénoïdes

Lors de l'étude de l'électrostatique, nous avons exploré l'effet d'un champ électrique uniforme. Ce champ est produit en utilisant deux grandes plaques parallèles qui ont des charges opposées uniformément distribuées. Dans l'étude

du magnétisme, toutes les configurations vues jusqu'à présent produisent un champ magnétique qui varie en module et en orientation d'un point à l'autre. Nous étudions maintenant une configuration qui produit un champ uniforme : l'intérieur d'un long *solénoïde*, aussi appelé une *bobine hélicoïdale*. Au prochain chapitre, nous allons utiliser des champs magnétiques uniformes pour examiner la force magnétique sur les particules chargées.

On construit un solénoïde en enroulant un fil sur un cylindre (*voir la figure 8.33*). Un solénoïde peut contenir des centaines de spires, parfois sur plusieurs couches. Si on fait circuler un courant i dans le solénoïde, le même courant i circule dans chaque spire. Chaque spire est équivalente à une boucle circulaire. Le champ magnétique résultant est la superposition des champs magnétiques produits par chaque spire. Le champ sur l'axe d'une boucle de courant a été calculé à la section 8.4.

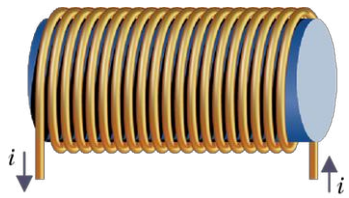


FIGURE 8.33
Un solénoïde est un enroulement de fil sur un cylindre.

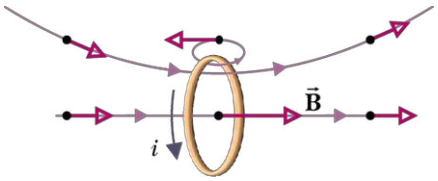


FIGURE 8.34
Le champ magnétique près d'une boucle de courant

Pour comprendre le champ résultant, nous allons étudier la superposition du champ de trois boucles. La figure 8.34 montre les lignes de champ et le champ magnétique à quelques endroits près d'une boucle. La figure 8.35a illustre les champs magnétiques produits par trois boucles. On trouve que le champ magnétique au centre de la boucle 2 (le point $\mathcal{P}_1$) est important, car les trois champs sont dans le même sens. Pour un point $\mathcal{P}_2$ à l'extérieur de la boucle 2, le champ est beaucoup plus faible, car le champ de la boucle du centre est presque complètement annulé par les champs produits par les deux autres boucles. La figure 8.35b montre le champ résultant aux points $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

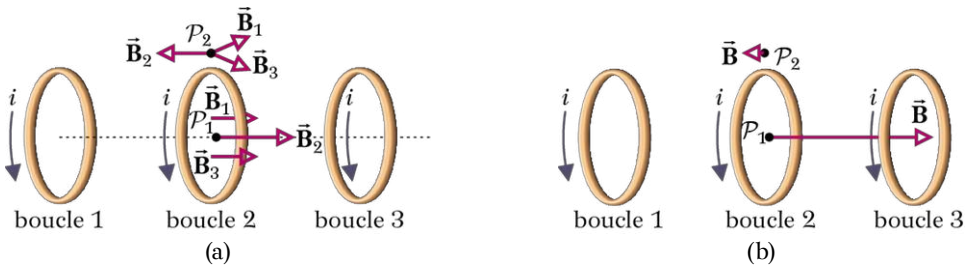


FIGURE 8.35
(a) Les champs magnétiques produits par trois boucles de courant. (b) Le champ magnétique résultant produit par trois boucles de courant.

Lorsqu'on ajoute un grand nombre de boucles de courant, on obtient un champ très intense au centre du solénoïde et un champ très faible à l'extérieur. De plus, le champ change très peu d'un point à l'autre. Il est presque uniforme. La figure 8.36 montre les lignes de champ pour un solénoïde ayant huit spires.

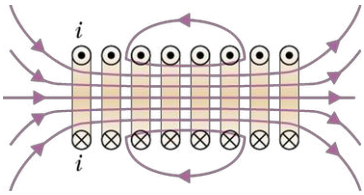


FIGURE 8.36
Les lignes de champ magnétique d'un solénoïde de huit spires selon une vue en coupe

Le solénoïde idéal

Un *solénoïde idéal* est un solénoïde dont la longueur tend vers l'infini et les spires sont jointives. Aucun solénoïde réel n'est infini, mais lorsque la longueur du solénoïde est beaucoup plus grande que son rayon, le centre du solénoïde se comporte comme un solénoïde idéal.

Pour un solénoïde infini, le champ magnétique est nul à l'extérieur. De plus, la symétrie cylindrique impose un champ qui soit perpendiculaire aux spires et uniforme. En effet, si on déplace le solénoïde selon son axe ou si on effectue une rotation autour de son axe, cela ne change pas la configuration. On ne change rien non plus si on fait une réflexion par rapport à un plan qui passe par l'axe du solénoïde.

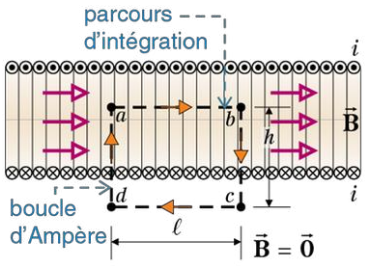


FIGURE 8.37
Le calcul du champ à l'intérieur d'un solénoïde idéal

La figure 8.37 montre une coupe transversale d'un très long solénoïde avec le sens du courant dans les spires. Le solénoïde a N spires, une longueur L et un rayon R (avec $L \gg R$). On définit le *nombre de spires par unité de longueur* n par :

$$n \equiv \frac{N}{L} . \tag{8.24}$$

À l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique est uniforme. On trouve son orientation à l'aide de la règle de la main droite pour les boucles de courant : on tourne les doigts de la main droite selon le sens du courant, et le pouce donne le sens de $\vec{\mathbf{B}}$, donc vers la droite. Pour calculer le module du champ, on applique le théorème d'Ampère pour une boucle d'Ampère rectangulaire, illustrée à la figure 8.37. Cette boucle est en partie dans le solénoïde et en partie à l'extérieur de celui-ci. Elle a une longueur ℓ et une largeur h. Le champ est alors soit parallèle, soit perpendiculaire à chacun des côtés de la boucle.

Selon le théorème d'Ampère,

$$\oint_{\text{rectangle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} . \tag{8.25}$$

On divise l'intégrale curviligne en quatre parties :

$$\oint_{\text{rectangle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_a^b \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_b^c \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_c^d \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_d^a \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} .$$

Pour la première intégrale, le champ est uniforme et il a la même orientation que l'élément $d\vec{\mathbf{s}}$:

$$\int_a^b \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_a^b B \, ds \cos(0°) = B \int_a^b ds = B\ell .$$

Pour la deuxième intégrale et la quatrième intégrale, le résultat est nul, car $\vec{\mathbf{B}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$ sont perpendiculaires :

$$\int_b^c \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_b^c B \, ds \cos(90°) = 0$$

et $$\int_d^a \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_d^a B \, ds \cos(90°) = 0 .$$

La troisième intégrale est aussi nulle, car le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde idéal :

$$\int_c^d \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_c^d \vec{\mathbf{0}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \ .$$

Le membre droit de l'équation 8.25 dépend du courant qui passe à travers la boucle d'Ampère. Il y a plusieurs spires qui passent à travers la boucle d'Ampère, selon la longueur ℓ de la boucle d'Ampère. Comme le nombre de spires par unité de longueur est n, le courant qui passe à travers la boucle d'Ampère est

$$i_{\text{inc}} = n\ell i \ .$$

En insérant les dernières équations dans l'équation 8.25, on obtient

$$B\ell = \mu_0 n\ell i \ .$$

Le module du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde idéal est donc

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{L} i \ , \tag{8.26}$$

Module du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde idéal

où N est le nombre total de spires et L, la longueur du solénoïde. Pour trouver l'orientation du champ magnétique à l'intérieur, on utilise la règle de la main droite pour les boucles de courant :

On tourne les doigts de la main droite selon l'orientation du courant dans le solénoïde. Le pouce donne l'orientation du champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ à l'intérieur du solénoïde.

Orientation du champ à l'intérieur du solénoïde

Le champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde est à peu près uniforme. Ceci est l'équivalent magnétique des grandes plaques en électrostatique. Pour obtenir un champ électrique uniforme, on doit être près du centre entre deux très grandes plaques. Pour obtenir un champ magnétique uniforme, on doit être près du centre d'un très long solénoïde.

EXEMPLE 8.6 Le champ d'un solénoïde

On veut produire un champ magnétique de 0,110 T à l'intérieur d'un solénoïde idéal parcouru par un courant de 9,50 A. Le solénoïde a une longueur de 10,0 cm. Combien de spires doit-il posséder ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$B = 0{,}110$ T	N
$i = 9{,}50$ A	
$L = 0{,}100$ m	

Identifier la clé

La clé est l'équation 8.26 :

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i \Rightarrow N = \frac{BL}{\mu_0 i} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$N = \frac{0{,}110 \times 0{,}100}{4\pi \times 10^{-7} \times 9{,}50} = 921 \ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien à la question. Pour obtenir le nombre de spires sur une petite distance, il faudra enrouler le fil sur plusieurs couches.

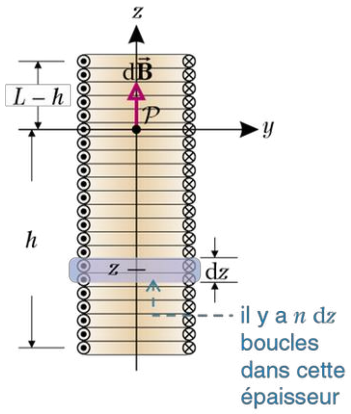


FIGURE 8.38
Le calcul du champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde

Le champ sur l'axe d'un solénoïde réel

La dernière sous-section a permis d'obtenir le champ à l'intérieur d'un solénoïde, près du centre. Il est aussi intéressant d'étudier le champ magnétique près des extrémités du solénoïde. Le théorème d'Ampère ne peut pas être utilisé, car la configuration n'a pas la symétrie cylindrique pour un point près de l'extrémité. En effet, si on déplace le solénoïde, la configuration change. Il faut donc utiliser la loi de Biot-Savart. On va se limiter aux points sur l'axe du solénoïde, de telle sorte qu'il est possible de calculer l'intégrale algébriquement.

La figure 8.38 montre un solénoïde de longueur L et de rayon R parcouru par un courant i. On veut calculer le champ magnétique en un point $\mathcal{P}$, situé à une distance h d'une des extrémités du solénoïde, sur l'axe de ce dernier. Pour simplifier le calcul de l'intégrale, on trace un axe des z orienté vers le haut avec son origine au point $\mathcal{P}$. On suppose aussi que le solénoïde se comporte comme un ensemble de boucles très rapprochées. Selon l'équation 8.15, chaque boucle produit un champ magnétique :

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{boucle}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2\,(z^2 + R^2)^{3/2}}\,\vec{\boldsymbol{k}}\,,$$

où z est la distance entre la boucle de courant et le point $\mathcal{P}$.

À la figure 8.38, on considère un ensemble de boucles ayant une épaisseur dz, situées à une distance z du point $\mathcal{P}$. Dans cette épaisseur, il y a $n\,\mathrm{d}z$ boucles, où n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Le champ magnétique produit par cette épaisseur de boucle est

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}} = n\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathbf{B}}_{\text{boucle}} = \frac{\mu_0 n i R^2}{2\,(z^2 + R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z\,\vec{\boldsymbol{k}}\,.$$

Le champ résultant est obtenu en intégrant sur toute la longueur du solénoïde. Selon la figure 8.38, les bornes d'intégration sont $z = -h$ pour la borne inférieure ($z < 0$, car on est sous l'origine) et $z = L - h$ pour la borne inférieure. On obtient, après avoir sorti les constantes de l'intégrale,

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 n i R^2}{2}\,\vec{\boldsymbol{k}} \int_{-h}^{L-h} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,.$$

L'intégrale se calcule à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E (avec $x \to z$ et $a \to R$). On obtient

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 n i R^2}{2}\,\vec{\boldsymbol{k}} \left[\frac{z}{R^2\sqrt{z^2 + R^2}} \right]\Bigg|_{-h}^{L-h}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{L-h}{\sqrt{(L-h)^2 + R^2}} + \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right] \vec{\boldsymbol{k}}\,. \qquad (8.27)$$

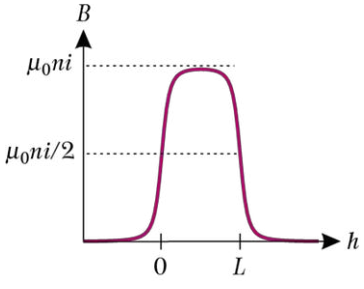


FIGURE 8.39
Le module du champ en fonction de la distance h entre le point $\mathcal{P}$ et le bas du solénoïde, pour $L = 10R$

L'équation précédente semble complexe, car on n'a pas fait d'approximation. La figure 8.39 montre le module du champ en fonction de la position h du point $\mathcal{P}$. Remarquez que les extrémités du solénoïde correspondent à $h = 0$ et à $h = L$. Les points $h > 0$ correspondent aux points $\mathcal{P}$ situés au-dessus de la partie inférieure du solénoïde.

On peut regarder deux positions particulières dans l'approximation où $L \gg R$. D'abord, pour un point au centre du solénoïde ($h = L/2$), on obtient

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} + \frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\right]$$

$$\approx \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L/2}{L/2} + \frac{L/2}{L/2}\right] = \mu_0 ni \ . \qquad (8.28)$$

C'est le résultat obtenu pour le module du champ à l'intérieur d'un solénoïde infini (*voir l'équation 8.26*). Ceci montre qu'on peut bel et bien considérer un solénoïde comme étant idéal pour les points près du centre, lorsque la longueur du solénoïde est beaucoup plus grande que son rayon.

La deuxième position intéressante est l'extrémité du solénoïde $h = 0$. Dans ce cas, avec l'approximation $L \gg R$,

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} + \frac{0}{R}\right]$$

$$\approx \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L}{L}\right] = \frac{\mu_0 ni}{2} \ . \qquad (8.29)$$

Ceci montre que le module du champ à l'extrémité est égal à la moitié du module du champ au centre du solénoïde. On trouve exactement le même résultat pour l'autre extrémité (avec $h = L$).

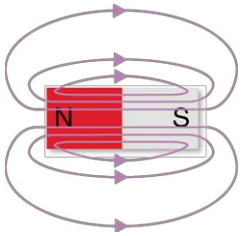
L'équation 8.27 est utile pour déterminer le champ magnétique près du solénoïde ou à l'intérieur de celui-ci. Pour les points très éloignés du solénoïde, ce dernier se comporte comme un dipôle magnétique, avec un moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}} = Ni\vec{\mathbf{A}}$, comme nous l'avons vu à la section 8.4.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le champ magnétique produit par des courants électriques.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Le **champ magnétique** est le médiateur de la force magnétique. Il est produit par les aimants et les courants électriques.
- Un **aimant** possède un pôle nord et un pôle sud.
- Les **lignes de champ magnétique** forment des boucles fermées, en sortant du pôle nord et en entrant au pôle sud.



- Les pôles semblables se repoussent, et les pôles opposés s'attirent.
- On ne peut pas isoler deux pôles magnétiques et obtenir des monopôles magnétiques.
- Selon le **théorème de Gauss en magnétisme**, le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul :

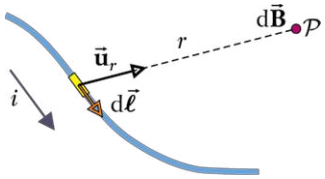
$$\oint_{\text{surface}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0 \, .$$

- Lorsqu'il y a plusieurs sources de champ magnétique, le champ résultant est obtenu à l'aide du **principe de superposition** :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \cdots \, .$$

- La **loi de Biot-Savart** permet de calculer le champ magnétique produit par un courant continu i :

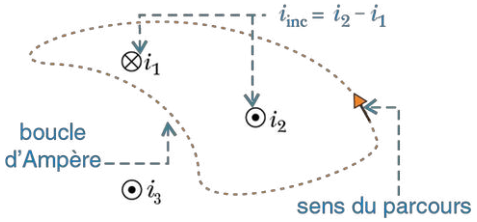
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2} \, .$$



- Le **théorème d'Ampère** permet de calculer le champ magnétique dans certaines situations où la configuration de courant est symétrique :

$$\oint_{\text{ligne}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} \, ,$$

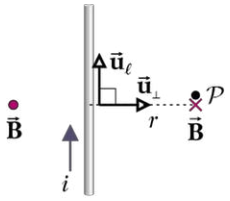
où i_{inc} est le courant inclus dans la boucle d'intégration.



LES RÉSULTATS

- Le **fil infini** :

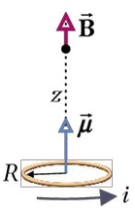
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{\mathbf{u}}_\ell \times \vec{\mathbf{u}}_\perp \, .$$



- Le **dipôle magnétique** pour $|z| \gg R$:

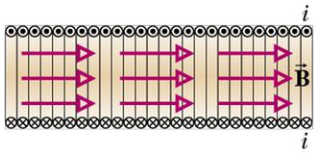
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \vec{\boldsymbol{\mu}}}{2\pi |z|^3} \, ,$$

où $\vec{\boldsymbol{\mu}} = Ni\vec{\mathbf{A}}$.



- Le **solénoïde idéal** :

$$B = \begin{cases} \mu_0 n i = \mu_0 \dfrac{N}{L} i & \text{(à l'intérieur)} \\ 0 & \text{(à l'extérieur)} \end{cases} \, .$$



- La **règle de la main droite** :
  - Pour un fil rectiligne : le pouce est orienté selon le courant, et les doigts tournent selon le champ magnétique.
  - Pour une boucle : les doigts sont orientés selon le courant, et le pouce donne le moment magnétique et le champ magnétique sur l'axe.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 8.2 La loi de Biot-Savart

Q1 Un courant i circule dans un fil de longueur L, comme le montre la figure 8.40. On veut calculer le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à une distance d au-dessus d'une extrémité du fil (*voir la figure 8.40*).

a. Écrivez une expression pour l'élément de longueur $d\vec{\ell}$.

b. Écrivez une expression pour le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$.

c. Calculez le produit vectoriel $d\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{u}}_r$.

d. Écrivez l'intégrale pour calculer le champ magnétique au point $\mathcal{P}$.

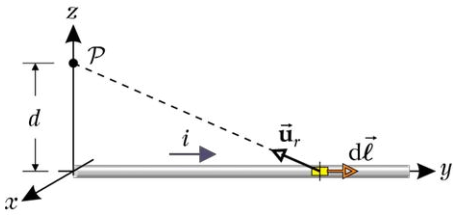


FIGURE 8.40 • Question 1

E2 Calculez $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ pour les vecteurs suivants :

a. $\vec{\mathbf{a}} = 3{,}0\vec{\imath} - 2{,}0\vec{\jmath}$ et $\vec{\mathbf{b}} = 2{,}0\vec{\imath} + 1{,}0\vec{\jmath}$;

b. $\vec{\mathbf{a}} = 2{,}0\vec{\imath} - 1{,}0\vec{\jmath} + 3{,}0\vec{k}$ et $\vec{\mathbf{b}} = -4{,}0\vec{\imath} + 5{,}0\vec{k}$;

c. $\vec{\mathbf{a}} = 2{,}0\vec{\imath} + 2{,}0\vec{\jmath} + 1{,}0\vec{k}$ et $\vec{\mathbf{b}} = -1{,}0\vec{\imath} + 2{,}0\vec{\jmath} + 2{,}0\vec{k}$;

d. $\vec{\mathbf{a}} = 1{,}0\vec{\imath} + 2{,}0\vec{\jmath} - 3{,}0\vec{k}$ et $\vec{\mathbf{b}} = 2{,}0\vec{\imath} + 4{,}0\vec{\jmath} - 6{,}0\vec{k}$.

P3 Un fil rectiligne ayant une longueur $L = 4{,}0$ m transporte un courant $i = 25{,}0$ A (*voir la figure 8.41*). Quel est le champ magnétique produit à une distance $d = 30$ cm au-dessus de l'extrémité du fil ?

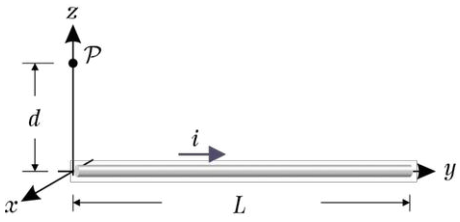


FIGURE 8.41 • Problème 3

P4 Quatre fils rectilignes forment un circuit en rectangle de 65,0 cm sur 45,0 cm, comme le montre la figure 8.42. Un courant $i = 3{,}00$ A y circule dans le sens horaire. Quel est le champ magnétique au centre du circuit ?

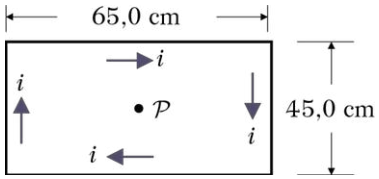


FIGURE 8.42 • Problème 4

P5 Le fil de la figure 8.43 est parcouru par un courant i. À l'aide de la loi de Biot-Savart, montrez que le champ magnétique au centre du demi-arc de cercle est donné par

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{4R}(-\vec{k}) .$$

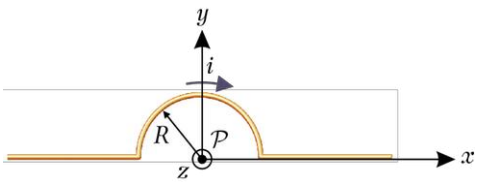


FIGURE 8.43 • Problème 5

P6 Un fil est courbé pour former un circuit, comme le montre la figure 8.44. Le circuit est constitué de deux demi-cercles et de deux segments. Un courant i circule en sens horaire. Calculez le champ magnétique au point $\mathcal{P}$.

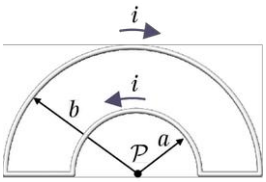


FIGURE 8.44 • Problème 6

P7 Un circuit est constitué de deux fils conducteurs rectilignes disposés à 90,0° et reliés à un demi-arc de cercle dont le rayon est R, comme le montre la figure 8.45. Le circuit est parcouru par un courant i dans le sens horaire. Calculez le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé au centre du demi-arc de cercle.

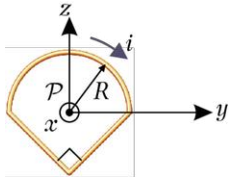


FIGURE 8.45 • Problèmes 7 et 8

P8 Un circuit est constitué de deux fils conducteurs rectilignes disposés à 90,0° et reliés à un demi-arc de cercle dont le rayon est $R = 20{,}0$ cm, comme le montre la figure 8.45. Le circuit est parcouru par un courant $i = 400$ mA dans le sens horaire. Calculez le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé au centre du demi-arc de cercle.

P9 Un très long fil forme un cercle de rayon $R = 15{,}0$ cm à son centre (*voir la figure 8.46*). Le champ magnétique au centre du cercle est $\vec{\mathbf{B}} = 4{,}50\ \mu\text{T}$ entrant dans la page. Quel est le courant dans le fil et quel est le sens du courant dans le cercle ?

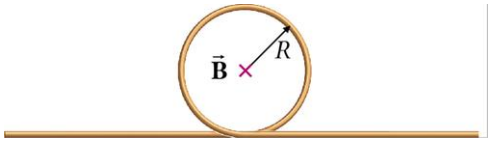


FIGURE 8.46 • Problème 9

Section 8.3 Le champ magnétique d'un fil infini

Q10 Deux très longs fils parallèles sont parcourus par un même courant i, comme le montre la figure 8.47. Classez par ordre croissant le module du champ magnétique des trois points illustrés.

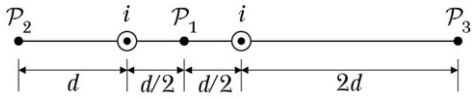


FIGURE 8.47 • Question 10

Q11 Deux très longs fils parallèles sont parcourus par des courants i de sens opposés, comme le montre la figure 8.48. Classez par ordre croissant le module du champ magnétique des trois points illustrés.

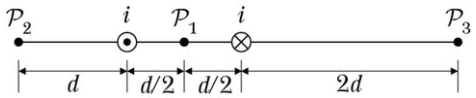


FIGURE 8.48 • Question 11

E12 Deux longs fils, parcourus par un courant $i_1 = 6{,}0$ A et $i_2 = 3{,}0$ A respectivement, sont séparés de 2,5 cm dans le plan des xy (*voir la figure 8.49*). Le fil 1 est à $y_1 = 3{,}0$ cm, et le fil 2 est au-dessus du premier fil. À quel endroit, autre que l'infini, le champ magnétique est-il nul ?

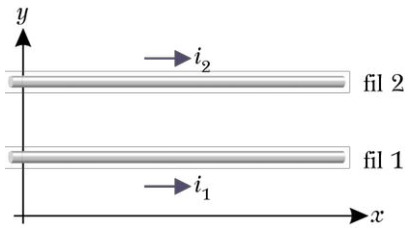


FIGURE 8.49 • Exercice 12

E13 Deux longs fils rectilignes parallèles sont distants de 3,0 cm (*voir la figure 8.50*). Ils sont traversés par les courants $i_1 = 3{,}0$ A et $i_2 = 5{,}0$ A, de sens opposés. À quel endroit, autre qu'à l'infini, le champ magnétique est-il nul ?

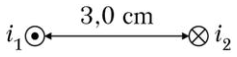


FIGURE 8.50 • Exercice 13

E14 Deux fils infinis parallèles sont séparés d'une distance d. Ils sont parcourus par un même courant i, circulant en sens opposé (*voir la figure 8.51*). Quel est le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à la position $y = R$?

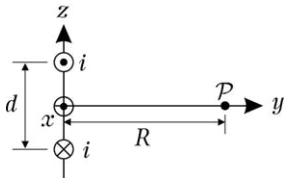


FIGURE 8.51 • Exercices 14 et 15

E15 Deux fils infinis parallèles sont séparés d'une distance $d = 4{,}00$ cm. Ils sont parcourus par un même courant $i = 7{,}50$ A, circulant en sens opposé (*voir la figure 8.51*). Quel est le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à la position $y = 6{,}00$ cm ?

P16 Deux deux longs fils sont parallèles à l'axe des x et sont placés à une distance d de chaque côté de l'origine, comme le montre la figure 8.52. Un point $\mathcal{P}$ est placé à la coordonnée y sur l'axe des y.

a. Quel est le champ magnétique au point $\mathcal{P}$?

b. Pour quelle position du point $\mathcal{P}$, sur l'axe des y, le champ magnétique a-t-il un module maximal ?

c. Quel est le module maximal du champ magnétique ?

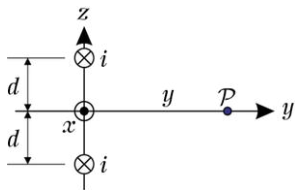


FIGURE 8.52 • Problème 16

P17 Un système est constitué de trois très longs fils, comme le montre la figure 8.53. Le premier fil transporte un courant $i_1 = 5{,}00$ A dans le même sens que l'axe des x, et il coupe le plan des yz à la coordonnée (0,00 ; –20,0 ; –15,0) cm. Le deuxième fil transporte un courant $i_2 = 4{,}00$ A dans le sens opposé à l'axe des x, et il coupe le plan des yz à la coordonnée (0,00 ; 20,0 ; –15,0) cm. Le troisième fil est parcouru par un courant $i_3 = 3{,}00$ A dans le même sens que l'axe des y, et il est situé à une distance de 15,0 cm au-dessus de

l'axe des y. Quel est le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à l'origine ?

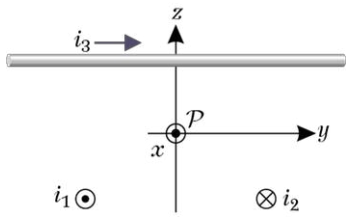


FIGURE 8.53 • Problème 17

Section 8.4 Les boucles de courant et les dipôles magnétiques

Q18 La figure 8.54 montre quatre situations où une boucle de courant est placée au-dessus d'un barreau aimanté. Dans chaque situation, déterminez le sens :

a. du moment magnétique de la boucle ;

b. de la force magnétique exercée sur la boucle par le barreau aimanté.

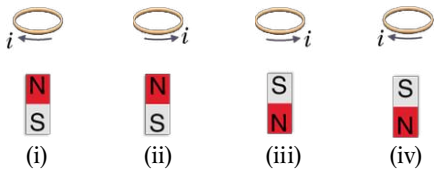


FIGURE 8.54 • Question 18

Q19 Deux boucles conductrices identiques, parcourues par un courant i, sont placées de façon parallèle. L'axe des x passe par le centre des deux boucles, et l'axe des y est à mi-chemin entre les deux boucles. Tracez qualitativement la composante B_x en fonction de la position sur l'axe des x si les courants circulent en sens opposés (*voir la figure 8.55*).

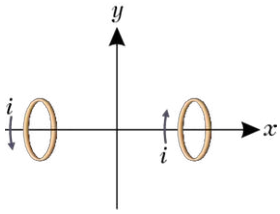


FIGURE 8.55 • Question 19

E20 Une bobine de 275 spires a un rayon de 4,2 cm, et elle est située dans le plan des xy. La bobine est parcourue par un courant de 2,7 A qui circule dans le sens horaire (*voir la figure 8.56*).

a. Quel est le moment magnétique de la bobine ?

b. Quel est le champ magnétique à une distance de 1,20 m au-dessus de la bobine sur son axe ?

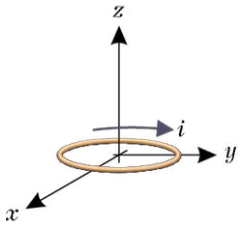


FIGURE 8.56 • Exercice 20

E21 Le module du champ magnétique à une distance de 20,0 cm d'un petit barreau aimanté est de 0,56 µT.

a. Quel est le module du moment magnétique du barreau ?

b. Quel serait le courant dans une boucle de courant ayant 1,00 cm de rayon qui aurait le même moment dipolaire ?

P22 Deux boucles de 26,0 mm de rayon sont parallèles au plan des yz et sont distantes de 54,0 mm. Les boucles sont toutes les deux parcourues par un courant de 1,60 A, circulant dans le même sens (*voir la figure 8.57*). L'axe des x passe par le centre des boucles. Quel est le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, dont la coordonnée est x = 13,3 cm ? (Indice : l'approximation du dipôle n'est pas valide.)

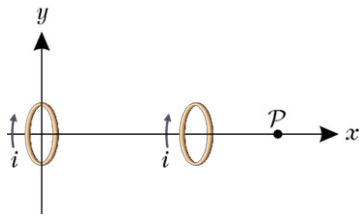


FIGURE 8.57 • Exercice 22

P23 Un agencement est constitué de deux bobines coaxiales, ayant chacune un rayon R et N spires. Elles sont séparées par une distance s, et un courant i circule dans le même sens. Ce dispositif a la particularité de produire un champ magnétique qui varie très peu pour les points près du point $\mathcal{P}$, situé à mi-chemin entre les bobines (*voir la figure 8.58*).

a. Calculez le champ magnétique au point $\mathcal{P}$, situé à la coordonnée y.

b. Montrez que la dérivée dB_y/dy est nulle pour $y = s/2$ (le point à mi-chemin entre les bobines).

c. Montrez que la dérivée seconde du champ magnétique ($d^2B_y/dy^2 = 0$) pour $y = R/2$ lorsque la distance entre les bobines est $s = R$.

Pour $s = R$, l'agencement est appelé une *bobine d'Helmholtz*. Le champ magnétique varie très peu au centre de la bobine d'Helmholtz.

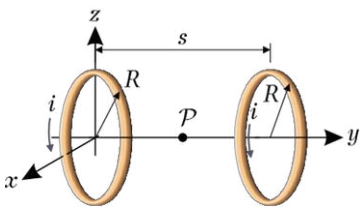


FIGURE 8.58 • Problème 23

Section 8.5 Le théorème d'Ampère

Q24 Le champ magnétique est uniforme dans une région. On veut calculer l'intégrale curviligne du champ magnétique pour trois parcours différents, ayant la même longueur et illustrés à la figure 8.59. Classez les parcours selon un ordre croissant de l'intégrale curviligne $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

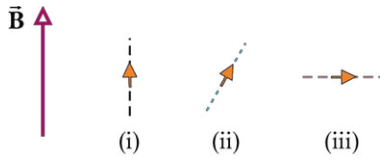


FIGURE 8.59 • Question 24

Q25 La figure 8.60 montre quatre très longs fils, dans lesquels circulent des courants i identiques, entrant dans la page ou sortant de la page. Classez les parcours d'intégration illustrés selon un ordre croissant (du plus négatif au plus positif) de la valeur de l'intégrale curviligne $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

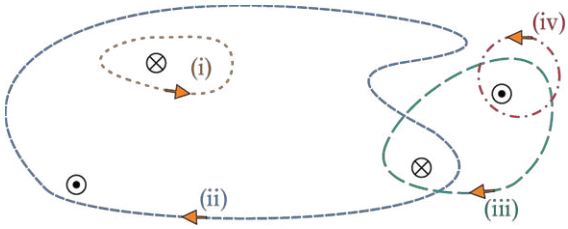


FIGURE 8.60 • Question 25

Q26 La figure 8.61 montre une coupe transversale d'un câble coaxial, constitué d'un cylindre central et d'une coquille cylindrique extérieure qui partagent le même axe. Un courant i sortant de la page est uniformément distribué sur la section du cylindre central ; un même courant i, entrant dans la page, est distribué uniformément dans la section de la coquille cylindrique extérieure. La figure montre aussi quatre parcours d'intégration circulaire, de rayons croissants. Classez par ordre croissant les parcours d'intégration selon le résultat de l'intégrale curviligne $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

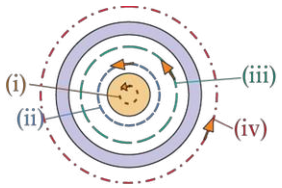


FIGURE 8.61 • Question 26

E27 Le champ magnétique dans une région est uniforme, et son module est $B = 0{,}45$ T. La figure 8.62 illustre un parcours d'intégration fermé, en forme de triangle rectangle isocèle. Calculez l'intégrale curviligne $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$ pour les parcours suivants :

a. de a à b ;

b. de b à c ;

c. de c à a ;

d. pour le parcours fermé $abca$.

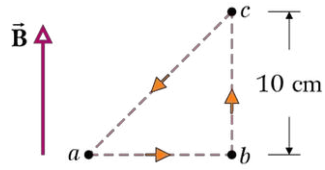


FIGURE 8.62 • Exercice 27

E28 Une bobine toroïdale comporte 300 spires. Son rayon intérieur est de 5,00 cm et son rayon extérieur, de 10,0 cm. Quel est le courant dans la bobine si le champ magnétique a un module de 2,50 mT à une distance de 6,00 cm du centre de la bobine ?

P29 Un cylindre creux, de 0,620 cm de rayon interne et de 1,84 cm de rayon externe, transporte un courant de 5,00 A, réparti uniformément dans sa section. Calculez le module du champ magnétique :

a. à une distance de 1,26 cm du centre du cylindre ;

b. à une distance de 2,00 cm du centre du cylindre.

P30 Un câble coaxial est constitué d'un cylindre intérieur, de rayon a, et d'une coquille cylindrique, de rayon intérieur b et de rayon extérieur c (*voir la figure 8.63 qui montre une section transversale*). Un courant i est uniformément distribué dans la section du cylindre intérieur. Le même courant i est distribué uniformément dans la section de la coquille cylindrique extérieure, mais ce courant circule en sens inverse du courant dans le cylindre intérieur. Calculez le module du champ magnétique pour les distances suivantes, par rapport à l'axe du câble :

a. $r < a$;

b. $a < r < b$;

c. $b < r < c$;

d. $r > c$.

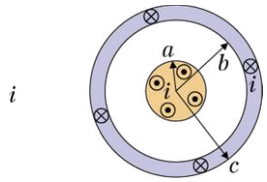


FIGURE 8.63 • Problèmes 30 et 31

P31 Un câble coaxial est constitué d'un cylindre intérieur, de rayon $a = 1{,}50$ mm, et d'une coquille cylindrique, de rayon intérieur $b = 3{,}00$ mm et de rayon extérieur $c = 3{,}60$ mm (*voir la figure 8.63 qui montre une section transversale*). Un courant $i = 0{,}600$ A est uniformément distribué dans la section du cylindre intérieur. Le même courant i est distribué uniformément dans la section de la coquille cylindrique extérieure, mais ce courant circule en sens inverse du courant dans le cylindre intérieur. Calculez le module du champ magnétique pour les distances r suivantes, par rapport à l'axe du câble :

a. $r = 1{,}00$ mm ;

b. $r = 2{,}00$ mm ;

c. $r = 3{,}50$ mm ;

d. $r = 4{,}00$ mm.

P32 Un système est composé d'un très grand nombre de longs fils parallèles juxtaposés dans un même plan (*voir la figure 8.64*). Il y a n fils par unité de largeur. Si chaque fil transporte un courant i, montrez, à l'aide du théorème d'Ampère, que le module du champ magnétique à une distance r du plan est

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 ni\ .$$

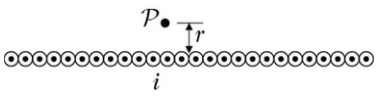


FIGURE 8.64 • Problème 32

P33 La figure 8.65 montre deux longs cylindres parallèles, de rayon $R = 3{,}00$ cm, séparés d'une distance $d = 10{,}0$ cm. Le courant circulant dans le premier cylindre est $i_1 = 8{,}00$ A, et le courant circulant dans le deuxième cylindre est $i_2 = 6{,}00$ A. Les courants circulent dans le même sens. Calculez le module du champ magnétique à une distance $r = 2{,}00$ cm par rapport au centre du premier cylindre.

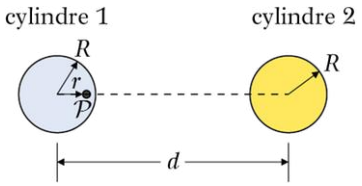


FIGURE 8.65 • Problème 33

P34 Un très long fil de rayon R est parcouru par un courant qui n'est pas uniformément distribué. Le module de la densité de courant est une fonction de la distance r à partir du centre du fil :

$$J = \frac{i_0 r}{R^3}\ .$$

a. Quel est le module du champ magnétique à une distance $r < R$?

b. Quel est le module du champ magnétique à une distance $r > R$?

Section 8.6 Le champ magnétique produit par les solénoïdes

Q35 Le tableau suivant donne la longueur, le nombre de spires et le courant circulant dans quatre solénoïdes. Classer les modules des champs magnétiques au centre des solénoïdes selon un ordre croissant.

solénoïde	longueur	spires	courant
1	L	N	i
2	$2L$	N	$2i$
3	L	$2N$	$2i$
4	L	N	$2i$

E36 Un solénoïde idéal a une longueur de 60,0 cm et un rayon de 3,00 cm. Il possède 700 spires. Quel est le courant dans le solénoïde si celui-ci produit un champ magnétique dont le module est de 12,0 mT ?

E37 Un solénoïde idéal a une longueur de 1,20 m et un diamètre de 10,0 cm. Il produit un champ magnétique de 24,0 mT lorsqu'il est parcouru par un courant de 12,0 A. Calculez la longueur du fil du solénoïde.

P38 Un solénoïde idéal de 4,40 cm de rayon comporte 360 spires jointives. Le solénoïde est fait d'un fil de cuivre de 1,02 mm de diamètre. On branche le solénoïde à une batterie de 9,00 V.

a. Quelle est la résistance du solénoïde ?

b. Quel est le module du champ magnétique au centre du solénoïde ?

P39 Un long solénoïde a un rayon de 10,0 cm et possède 650 spires/m. Il est parcouru par un courant de 0,450 A, qui circule en sens antihoraire, selon une vue en plongée. On insère un long fil rectiligne dans lequel circule un courant de 20,0 A vers le haut. Le fil coïncide avec l'axe du solénoïde. On suppose que l'axe des z a la même orientation que le courant dans le fil et que l'origine du système de coordonnées cartésiennes est placée au centre du solénoïde. Calculez le champ magnétique aux endroits suivants :

a. à la position $\vec{\mathbf{r}} = 1{,}00 \text{ cm}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$;

b. à la position $\vec{\mathbf{r}} = 15{,}0 \text{ cm}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$.

P40 Un solénoïde de 200 spires/cm a une longueur L = 35,0 cm et un diamètre de 42,0 mm (*voir la figure 8.66*). Il est parcouru par un courant de 2,50 A. Calculez le champ magnétique produit aux endroits suivants :

a. à $z = 17{,}5$ cm ;

b. à $z = 35{,}0$ cm ;

c. à $z = 52{,}5$ cm.

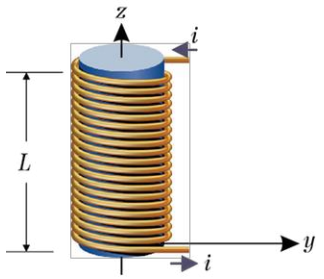


FIGURE 8.66 • Problème 40

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

8.1 Le champ est sortant.	Selon la règle de la main droite, on place le pouce selon le sens du courant. Les lignes de champ tournent selon le sens des doigts. Lorsqu'un point est situé sous le fil, les doigts sortent de la page.
8.2 **a.** i_2 est sortant.	Selon la règle de la main droite, le courant i_1 produit un champ $\vec{\mathbf{B}}_1$ vers le haut. Le champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ produit par le courant i_2 doit être vers le bas pour que le champ résultant soit nul au point $\mathcal{P}$. Ceci est possible si i_2 est sortant.
b. i_1	Pour que le champ résultant soit nul, il faut que $B_1 = B_2$. Le module du champ magnétique diminue lorsque la distance augmente. Comme le fil 1 est plus éloigné du point $\mathcal{P}$ que le fil 2, il faut que $i_1 > i_2$ pour que les deux modules soient égaux.
8.3 $B_{(i)} > B_{(iii)} > B_{(ii)}$	Selon la règle de la main droite pour les boucles de courant, les champs sont dans le même sens dans la situation (i), alors qu'ils sont de sens opposés dans la situation (ii). Donc, les modules vont s'additionner dans la situation (i) et se soustraire dans la situation (ii). La situation (iii) a un seul champ, dont le module se trouve entre les modules dans les autres situations.
8.4 (iii) < (i) < (ii)	Selon le théorème d'Ampère, la circulation est donnée par $\mu_0 i_{\text{inc}}$. D'après la règle de la main droite (on enroule les doigts selon le sens du parcours d'intégration, et le pouce donne le sens positif pour le courant), le courant entrant est positif et le courant sortant est négatif. Pour la boucle 1, $i_{\text{inc}} = -i + i = 0$. Pour la boucle 2, $i_{\text{inc}} = i$ et pour la boucle 3, $i_{\text{inc}} = -i$.

Chapitre 09

La force magnétique

Buts du chapitre

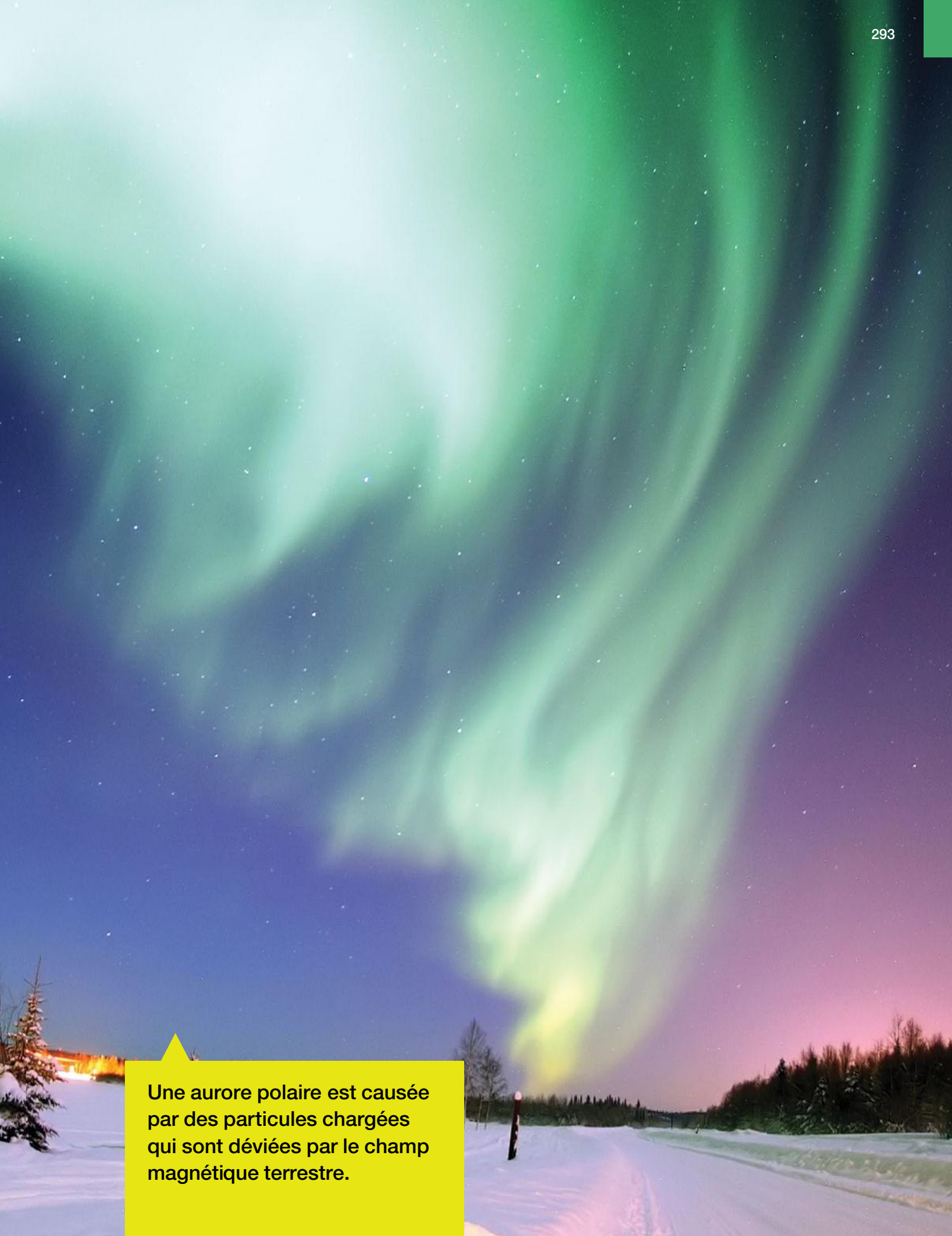
Ce chapitre traite de la force magnétique exercée sur les particules chargées et les fils. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de calculer la force magnétique sur une particule chargée et sur un courant électrique ;
- d'étudier la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique ;
- de calculer le moment de force exercé sur un dipôle magnétique ;
- de comprendre l'effet Hall ;
- de comprendre la façon dont se comporte un matériau dans un champ magnétique.

Préalables

Ce chapitre porte sur la force magnétique, qui a des points communs avec la force électrique. Revoyez :

- la force magnétique entre les aimants, présentée à la section 8.1 ;
- le mouvement de particules chargées dans un champ électrique, analysé à la section 2.7 et les dipôles électriques, étudiés à la section 2.8 ;
- la conduction, décrite à la section 6.2 ;
- la dynamique du mouvement circulaire, analysée à la section 7.1 du tome 1 ;
- le moment du force, expliqué à la section 12.1 du tome 1.



Une aurore polaire est causée par des particules chargées qui sont déviées par le champ magnétique terrestre.

Au chapitre précédent, nous avons vu qu'un courant électrique produit un champ magnétique. La prochaine étape consiste à calculer la force exercée par un champ magnétique. La force magnétique est exercée d'abord sur les particules chargées en mouvement. En effet, les protons et les électrons subissent une force magnétique lorsqu'ils se déplacent dans un champ magnétique. Le champ magnétique terrestre exerce une force magnétique sur les particules chargées qui viennent du Soleil (le vent solaire) et de l'espace (les rayons cosmiques). Sans le champ magnétique terrestre, notre planète serait bombardée par ces particules. Nous verrons dans le chapitre que le champ terrestre les fait dévier selon une trajectoire en spirale. Dans certaines situations, des particules entrent en collision avec les molécules de l'atmosphère près des pôles, ce qui produit les aurores polaires, comme celle qui apparaît sur la photographie en début de chapitre.

La force magnétique est très utile pour faire dévier des particules chargées. Dans les écrans à rayons cathodiques des anciens téléviseurs, un faisceau d'électrons est dévié pour produire une image. De même, dans des grands accélérateurs de particules, des protons se déplacent à très grande vitesse le long d'un large cercle grâce à la force magnétique.

Nous avons vu au chapitre 6 qu'un courant électrique est constitué de charges électriques en mouvement. Ces charges subissent une force magnétique lorsqu'un courant se trouve dans un champ magnétique, ce qui permet entre autres de connaître le signe et la densité des porteurs de charge, au moyen de ce qu'on appelle l'effet Hall.

De plus, on observe une force magnétique sur les fils parcourus par des courants. La force magnétique a plusieurs applications qui vont du moteur électrique au haut-parleur. Cette force est aussi utilisée pour définir l'ampère, l'unité de mesure du courant électrique.

9.1 La force magnétique sur une charge en mouvement

Prenons par exemple une particule, dont la charge est q, qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. Le champ magnétique peut être produit par un aimant ou un courant électrique. La particule subit une force magnétique qui dépend de la charge et du champ magnétique, mais aussi de la vitesse de la particule. La figure 9.1 présente trois situations pour une charge

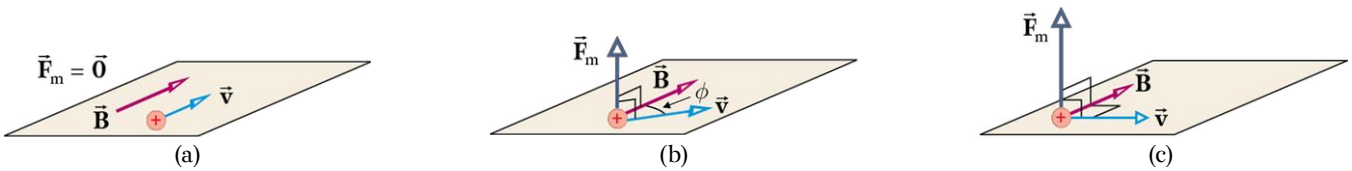


FIGURE 9.1

(a) La force magnétique est nulle lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont parallèles. (b) La force magnétique est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. (c) La force magnétique est maximale lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont perpendiculaires.

positive. En particulier, la force magnétique est nulle lorsque la vitesse et le champ ont la même direction. De plus, la force est toujours perpendiculaire à la vitesse et au champ. Dans la figure 9.2, on compare l'orientation dans le cas d'une charge positive et d'une charge négative ayant la même vitesse. La force magnétique sur la charge négative est opposée à la force magnétique sur la charge positive.

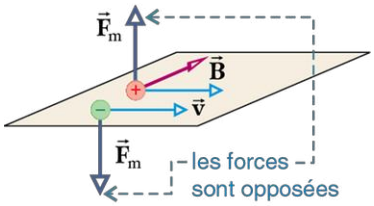


FIGURE 9.2
La force magnétique sur une charge négative est opposée à la force sur une charge positive.

Les expériences montrent que le module de la force est

$$F_m = |q| vB \sin \phi \,, \tag{9.1}$$

où $0 \leq \phi \leq 180°$ représente l'angle entre la vitesse et le champ magnétique. On voit que le module a la forme du module d'un produit vectoriel. De plus, la force est perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique. La force magnétique est obtenue au moyen d'un produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \,. \tag{9.2}$$

Force magnétique

Pour une charge positive, on obtient le sens de $\vec{\mathbf{F}}_m$ à l'aide de la règle de la main droite pour le produit vectoriel (*voir la figure 9.3*) : on place les doigts de la main droite dans le sens du vecteur $\vec{\mathbf{v}}$. On place la main pour pouvoir tourner les doigts vers le vecteur $\vec{\mathbf{B}}$. Le pouce donne le sens de $\vec{\mathbf{F}}_m$ dans le cas d'une charge positive. Si la charge est négative, selon l'équation 9.2, le sens de la force est opposé au sens du vecteur $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, donc opposé au sens du pouce.

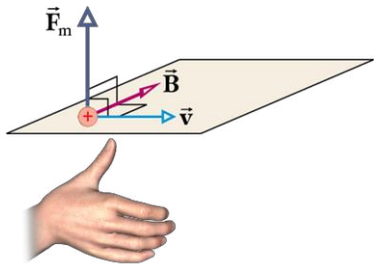


FIGURE 9.3
Le sens de la force magnétique sur une charge positive est donnée par la règle de la main droite.

En résumé, la force magnétique sur une particule chargée a les propriétés suivantes.

- La force magnétique est nulle si la vitesse est nulle ou si la vitesse a la même direction que le champ magnétique ($\phi = 0$ ou $\phi = 180°$).
- Le module de la force est $F_m = |q|vB \sin\phi$.
- La force est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$.
- Le sens de la force magnétique est obtenu par la règle de la main droite. Le sens de la force est le même que le pouce dans le cas d'une charge positive, et il est opposé au sens du pouce dans le cas d'une charge négative.

L'équation 9.1 permet d'exprimer le tesla en fonction des autres unités du Système international :

$$1\,\mathrm{T} \equiv \frac{1\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{C} \times 1\,\mathrm{m/s}} = \frac{1\,\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}} = 1\,\mathrm{N/(A \cdot m)} \,.$$

EXEMPLE 9.1 La force magnétique sur un électron

Un électron se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = (1{,}5\vec{\imath} - 5{,}4\vec{\jmath}) \times 10^5$ m/s dans une région où le champ magnétique est $\vec{\mathbf{B}} = 4{,}8 \times 10^{-2}$ T $\vec{\jmath}$. Quelle est l'accélération subie par l'électron ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.4 illustre la situation, avec le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ et le vecteur $\vec{\mathbf{B}}$.

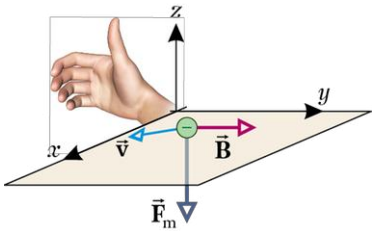


FIGURE 9.4
Le schéma de la situation pour l'exemple 9.1

Décortiquer le problème

La charge de l'électron est $q = -e$. La masse de l'électron est indiquée dans l'annexe B.

Connues	Inconnue
$q = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C	$\vec{\mathbf{a}}$
$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg	
$\vec{\mathbf{v}} = (1{,}5\vec{\imath} - 5{,}4\vec{\jmath}) \times 10^5$ m/s	
$\vec{\mathbf{B}} = 0{,}048$ T $\vec{\jmath}$	

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 9.2 qui permet de calculer la force magnétique :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est la deuxième loi de Newton :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = m\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}}}{m} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la force magnétique :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = -1{,}60 \times 10^{-19} \left[(1{,}5 \times 10^5 \vec{\imath} - 5{,}4 \times 10^5 \vec{\jmath}) \times (0{,}048\,0\,\vec{\jmath}) \right] .$$

Le produit $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, alors que $\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{\mathbf{0}}$. La force magnétique est donc en sens opposé à l'axe des z :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = -1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1{,}5 \times 10^5 \text{ m/s} \times 0{,}048 \text{ T } \vec{k} = -1{,}15 \times 10^{-15} \text{ N } \vec{k} \,. \qquad \text{(iii)}$$

La force magnétique est la seule force exercée sur l'électron (la force gravitationnelle est négligeable). Nous insérons le résultat de l'équation (iii) dans l'équation (ii) :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{-1{,}15 \times 10^{-15} \text{ N } \vec{k}}{9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = -1{,}3 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \, \vec{k} \,.$$

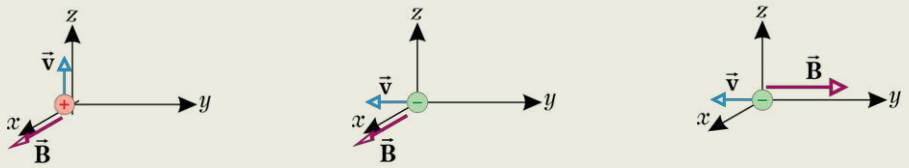
(réponse)

Valider la réponse

En se basant sur le schéma, nous pouvons vérifier, à l'aide de la règle de la main droite, que $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{k}$, ce qui implique que $\vec{\mathbf{F}}_m$ est orientée selon $-\vec{k}$, étant donné que la charge de l'électron est négative.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.1

La figure suivante montre trois situations où une particule chargée se déplace dans un champ magnétique. Pour chaque situation, indiquez l'orientation de la force magnétique.



9.2 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Les trajectoires circulaires

Prenons une particule ayant une charge q lancée à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans une région où il y a un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ uniforme (produit par exemple par un long solénoïde), perpendiculaire à la vitesse de la particule. La figure 9.5 montre une telle situation pour une charge positive et un champ entrant dans la page. Selon la règle de la main droite, la force est perpendiculaire à la vitesse (*voir la figure 9.5*). Cette force perpendiculaire est donc une force centripète, car l'accélération qui en résulte est perpendiculaire à la vitesse. Ceci est un résultat important.

> La force magnétique sur une particule chargée en mouvement est une force centripète, car elle est toujours perpendiculaire à la vitesse. La force magnétique ne change pas le module de la vitesse d'une particule chargée.

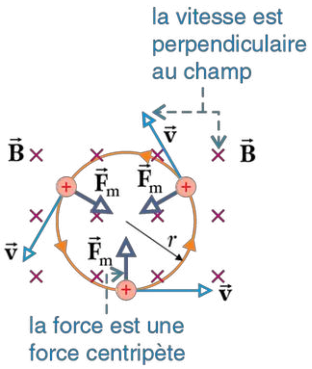


FIGURE 9.5
Une charge positive décrit un mouvement circulaire lorsqu'elle se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme.

Le travail d'une force magnétique sur une particule chargée est toujours nul, car cette force est toujours perpendiculaire à la vitesse, donc perpendiculaire au déplacement. Le champ magnétique ne peut pas changer l'énergie cinétique d'une particule.

L'orientation de la vitesse change à cause de l'accélération, ce qui fait changer l'orientation de la force. La particule décrit un cercle de rayon r. On peut appliquer la deuxième loi de Newton selon la direction centripète (*voir le chapitre 7 du tome 1*) pour trouver le rayon de la trajectoire :

$$\sum F_c = |q|\, vB \sin(90°) = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}, \tag{9.3}$$

où $p = mv$ est le module de la quantité de mouvement de la particule. Le rayon de la trajectoire est proportionnel à la quantité de mouvement de la particule. Cette configuration est utilisée dans les accélérateurs de particules pour mesurer la quantité de mouvement des particules produites lors d'une collision : on applique un champ magnétique uniforme et on mesure le rayon de la trajectoire (*voir la figure 9.6*). Dans le cas d'une particule de charge négative, la force est opposée, et la particule va tourner dans l'autre sens. De plus, il est possible d'utiliser un champ magnétique pour mesurer la masse d'une particule si on connaît déjà le module de la vitesse. Nous verrons bientôt le fonctionnement d'un spectromètre de masse basé sur cette configuration.

La fréquence du mouvement circulaire (l'inverse de la période) peut être calculée :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v|q|B}{2\pi mv}$$

$$f = \frac{|q|B}{2\pi m}. \tag{9.4}$$

Ceci est un résultat très intéressant : la fréquence ne dépend pas du module de la vitesse. Si la vitesse de la particule augmente, le rayon de la trajectoire augmente, mais le temps pour effectuer une révolution ne change pas.

FIGURE 9.6
Les traces de deux électrons (en vert) et d'un positron (en rouge) qui se déplacent dans un champ magnétique entrant dans la page.

EXEMPLE 9.2 Le résultat d'une désintégration

Un noyau radioactif se désintègre en émettant une particule alpha, ayant une énergie cinétique de 6,50 MeV. La particule alpha se déplace horizontalement. Elle entre dans un champ magnétique perpendiculaire à sa vitesse, orienté vers le haut, et dont le module est de 0,800 T.

a. Dans quel sens tourne la particule alpha, selon une vue en plongée ?

b. Quel est le rayon de la trajectoire ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La particule alpha est un noyau d'hélium ($^4_2$He) ayant une charge $q = +2e$. Dans une vue en plongée, un champ vers le haut correspond à un champ qui sort de la page. La figure 9.7 illustre la vitesse, le champ magnétique et la force obtenue à l'aide de la règle de la main droite.

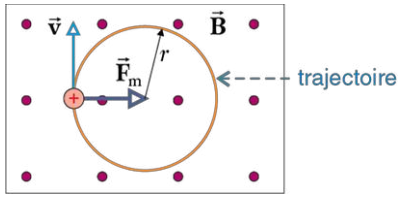


FIGURE 9.7
Le schéma de la situation pour l'exemple 9.2

Décortiquer le problème

Connues	
$m = 4,0015$ u	$q = 2e = 3,204 \times 10^{-19}$ C
$K = 6,50 \times 10^6$ eV	$B = 0,800$ T

Inconnues
sens de rotation
r

L'annexe B est utile pour obtenir les données de la particule alpha et les facteurs de conversion. Nous devons exprimer les paramètres dans le SI avant de faire les calculs. Ainsi,

$$\begin{aligned} m &= 4,0015\,\text{u} \times 1,661 \times 10^{-27}\ \text{kg/u} \\ &= 6,646 \times 10^{-27}\ \text{kg} \\ K &= 6,50 \times 10^6\ \text{eV} \times 1,602 \times 10^{-19}\ \text{J/eV} \\ &= 1,041 \times 10^{-12}\ \text{J} . \end{aligned}$$

L'énergie cinétique permet de calculer le module de la vitesse de la particule alpha :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1,041 \times 10^{-12}\ \text{J}}{6,646 \times 10^{-27}\ \text{kg}}} = 1,770 \times 10^7\ \text{m/s} .$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que la force magnétique est une force centripète, orientée vers le centre. Selon le schéma,

la particule tourne en sens horaire. (réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

Comme la vitesse est perpendiculaire au champ magnétique, la trajectoire est circulaire et le rayon est donné par l'équation 9.3 :

$$r = \frac{mv}{|q|B} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (i) :

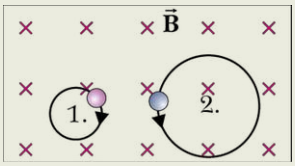
$$\begin{aligned} r &= \frac{6,646 \times 10^{-27}\ \text{kg} \times 1,770 \times 10^7\ \text{m/s}}{3,204 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 0,800\ \text{T}} \\ &= 0,459\ \text{m} . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La module de la vitesse de la particule alpha représente environ 6% de la vitesse de la lumière. Nous pouvons donc utiliser la mécanique newtonienne (avec $K = mv^2/2$) pour analyser son mouvement. Ceci est correct tant que le module de la vitesse de la particule ne dépasse pas environ 10 % de la vitesse de la lumière. Le rayon obtenu peut être mesuré facilement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.2

La figure ci-contre montre deux trajectoires circulaires de particules dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à la page. Les charges ont le même module de vitesse et des charges $|q_1| = |q_2|$.



a. Quelle particule a la plus petite masse ?

b. Quelle particule a une charge positive ?

Le mouvement hélicoïdal

De nouveau, on étudie le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Cette fois-ci, la vitesse n'est pas perpendiculaire au champ magnétique, mais elle forme un angle ϕ par rapport au champ (*voir la figure 9.8*). La composante de la vitesse parallèle au champ ne change pas, alors que la composante perpendiculaire de la vitesse va changer d'orientation, selon les résultats obtenus dans la dernière sous-section. La trajectoire est une hélice, c'est-à-dire la superposition d'un mouvement circulaire perpendiculairement au champ et un mouvement uniforme parallèlement au champ.

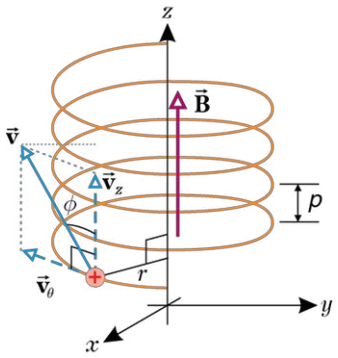


FIGURE 9.8
Le mouvement hélicoïdal d'une charge positive dans un champ magnétique, avec un rayon r et un pas p

Pour faire l'analyse, on trace un système de coordonnées cartésiennes avec l'axe des z parallèle au champ magnétique, de telle sorte que $\vec{\mathbf{B}} = B_z\vec{\boldsymbol{k}}$. On décompose ensuite la vitesse en une composante tangentielle (dans le plan des xy) et une composante z :

$$\vec{\mathbf{v}} = v_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta + v_z\vec{\boldsymbol{k}} = (v\sin\phi)\,\vec{\mathbf{u}}_\theta + (v\cos\phi)\,\vec{\boldsymbol{k}}\,. \tag{9.5}$$

La projection de l'hélice dans le plan des xy correspond à un mouvement circulaire. On obtient le rayon du cercle de la même façon que pour l'équation 9.3, en remplaçant v par $v_\theta = v\sin\phi$ dans l'accélération centripète :

$$\sum F_c = |q|\,vB\sin\phi = \frac{m\,(v\sin\phi)^2}{r} \tag{9.6}$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv\sin\phi}{|q|B} = \frac{mv_\theta}{|q|B}\,. \tag{9.7}$$

De nouveau, la fréquence du mouvement circulaire ne dépend pas du module de la vitesse :

$$f = \frac{v_\theta}{2\pi r} = \frac{|q|B}{2\pi m}\,.$$

La composante v_z est constante, car la force et l'accélération sont toujours perpendiculaires au champ magnétique. On définit le *pas de l'hélice* p comme la distance, perpendiculairement au cercle, lorsque la particule a effectué une révolution. La composante z du mouvement est un mouvement uniforme, et le temps pour effectuer une révolution correspond à la période $T = 1/f$. Alors,

$$p = v_z T = \frac{v\cos\phi}{f}\,. \tag{9.8}$$

EXEMPLE 9.3 Un proton dans une hélice

Un proton ayant une énergie cinétique de 10,5 keV se déplace dans un champ magnétique. Le module du champ magnétique est de 7,40 mT, et il forme un angle de 75,0° par rapport à la vitesse du proton. Quel est le pas de l'hélice du mouvement du proton dans le champ magnétique ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$K = 10{,}5$ keV	$m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg	p
$B = 7{,}40$ mT	$q = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C	
$\phi = 75{,}0°$		

L'énergie cinétique doit être convertie en joules pour effectuer les calculs :

$$K = 10{,}5 \times 10^{3}\ \text{eV} \times 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J/eV} = 1{,}682 \times 10^{-15}\ \text{J}\ .$$

L'énergie cinétique permet de calculer le module de la vitesse du proton :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}682 \times 10^{-15}\ \text{J}}{1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}}} = 1{,}418 \times 10^{6}\ \text{m/s}\ .$$

Identifier la clé

La clé pour trouver le pas est l'équation 9.8 :

$$p = \frac{v \cos\phi}{f}\ , \qquad \text{(i)}$$

où f est donnée par l'équation 9.4 :

$$f = \frac{|q|B}{2\pi m}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la fréquence :

$$f = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 7{,}40 \times 10^{-3}\ \text{T}}{2\pi \times 1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 1{,}128 \times 10^{5}\ \text{Hz}\ .$$

Nous trouvons ensuite le pas de l'hélice :

$$p = \frac{1{,}418 \times 10^{6}\ \text{m/s}\ \cos(75{,}0°)}{1{,}128 \times 10^{5}\ \text{Hz}} = 3{,}25\ \text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct.

Le mouvement dans un champ magnétique non uniforme

Lorsqu'une particule chargée se déplace dans un champ magnétique non uniforme, la trajectoire est complexe et très difficile à calculer. La force magnétique exercée sur la particule est perpendiculaire à la vitesse de cette dernière et au champ magnétique présent vis-à-vis de la position de la particule. Ceci produit une trajectoire qui forme des spirales autour des lignes de champ magnétique.

La figure 9.9 montre une configuration, appelée *bouteille magnétique*, utilisée pour confiner un plasma* à haute température. Dans cette configuration, on place deux bobines identiques, parcourues par un courant i. Le champ magnétique est intense près des bobines et plus faible à mi-chemin. Les particules chargées qui se déplacent dans l'espace autour des bobines ont des

* Un plasma est un état de la matière dans lequel une partie des atomes est ionisée.

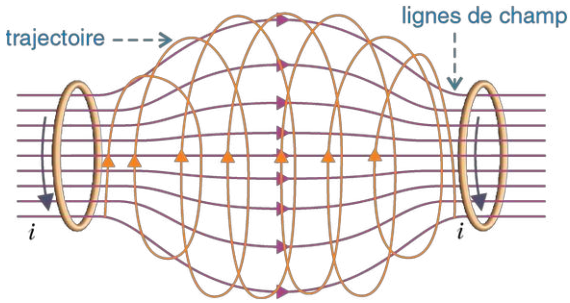


FIGURE 9.9
Une particule est confinée par le champ magnétique d'une bouteille magnétique. Les bobines aux deux extrémités sont des miroirs magnétiques.

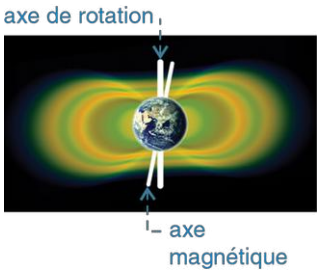


FIGURE 9.10
Les ceintures de radiation de Van Allen

trajectoires en spirale autour des lignes de champ. Aux extrémités, le champ plus intense produit une réflexion des particules. Les particules sont alors confinées dans un espace autour des bobines. Chaque bobine se comporte comme un *miroir magnétique* qui réfléchit les particules chargées par son champ magnétique.

Le champ magnétique terrestre se comporte un peu comme une bouteille magnétique. En effet, autour de la Terre, des particules chargées (surtout des protons et des électrons) se déplacent entre les deux pôles magnétiques, le long de spirales autour des lignes de champ magnétique terrestre. Elles forment les *ceintures de radiation de Van Allen* (*voir la figure 9.10*), de forme toroïdale. Elles ont été découvertes en 1958 par le physicien et astronome américain James Alfred Van Allen (1914-2006).

Au cours d'un *orage solaire*, le Soleil éjecte des particules chargées (surtout des protons), qui constituent le *vent solaire*. Un vent solaire important modifie la ceinture de Van Allen, et certaines des particules ne sont pas réfléchies par le champ magnétique terrestre. Ces particules entrent alors en collision avec les atomes de l'ionosphère (des atomes d'oxygène, d'azote et d'hydrogène). Les collisions excitent les atomes. En se désexcitant, les atomes émettent de la lumière, phénomène lumineux appelé *aurore polaire* (*voir la figure 9.11*).

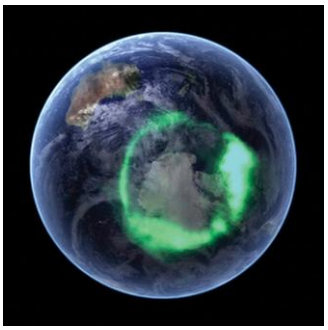


FIGURE 9.11
Une aurore australe captée par un satellite Image de la NASA, superposée à une image de la Terre

Voir la vidéo d'une aurore australe captée par la NASA.

9.3 Quelques applications liées à la force magnétique

Une particule chargée peut se déplacer dans une région où il y a à la fois un champ électrique et un champ magnétique. La force exercée sur la particule est

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \,. \tag{9.9}$$

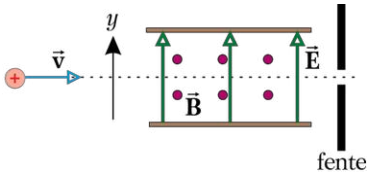
Force de Lorentz

Cette force est appelée *force de Lorentz*, en l'honneur du physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), qui a étudié en profondeur l'électromagnétisme, la lumière et la relativité.

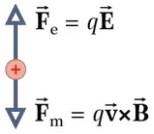
Une configuration intéressante consiste à établir un champ électrique uniforme et un champ magnétique uniforme perpendiculairement au champ électrique. C'est ce qu'on appelle des *champs croisés*. Le champ électrique uniforme peut être produit par deux grandes plaques parallèles, et le champ magnétique uniforme peut l'être par un long solénoïde. Les deux champs sont facilement modifiables.

Le sélecteur de vitesse

Un sélecteur *de vitesse* est un montage qui utilise des champs croisés. Comme son nom l'indique, il permet de sélectionner des particules chargées ayant une vitesse bien déterminée. La figure 9.12a illustre ces champs. On envoie une particule chargée avec une vitesse perpendiculaire aux champs.



(a)



(b)

FIGURE 9.12
(a) Une particule chargée se déplace vers un sélecteur de vitesse. (b) Les forces exercées sur la particule dans le sélecteur de vitesse.

Dans la situation de la figure 9.12, la particule subit une force électrique vers le haut et une force magnétique vers le bas (*voir la figure 9.12b*) :

$$\vec{\mathbf{F}} = qE\vec{\boldsymbol{\jmath}} - qvB\vec{\boldsymbol{\jmath}}\,.$$

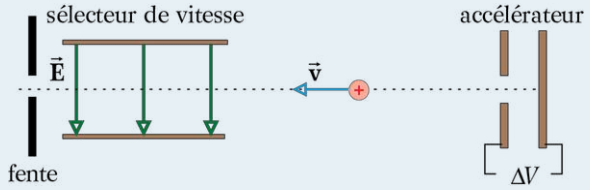
La force est nulle si la vitesse de la particule est

$$v = \frac{E}{B} \quad (\text{pour que } \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}})\,. \tag{9.10}$$

Avec une force résultante nulle, la particule continue en ligne droite et passe à travers la fente. Si le module de la vitesse est plus faible, la force magnétique est plus faible que la force électrique, et la particule aura une accélération vers le haut. Elle ne passera pas à travers la fente. Si le module de la vitesse est plus élevé, la force magnétique est plus grande que la force électrique, et la particule subit une accélération vers le bas. Elle ne passera pas non plus à travers la fente. Si la charge est négative, les deux forces sont inversées, mais la condition pour que la particule passe à travers la fente reste inchangée.

EXEMPLE 9.4 Un proton dans un sélecteur de vitesse

Des protons sont accélérés à partir du repos par une différence de potentiel $\Delta V = 5{,}00$ kV. Ils sont ensuite envoyés dans un sélecteur de vitesse en se déplaçant vers la gauche. Comme le montre la figure suivante, le champ électrique est orienté vers le bas, et son module est de 9,60 kV/m. Quel est le champ magnétique pour que les protons se déplacent en ligne droite dans le sélecteur de vitesse ?



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.13 montre le diagramme des forces d'un proton lorsque celui-ci est dans le sélecteur de vitesse. Pour que le proton se déplace en ligne droite, il faut que la force magnétique soit opposée à la force électrique, qui est vers le bas.

FIGURE 9.13
Le diagramme des forces pour le proton

Décortiquer le problème

Pour accélérer le proton, la plaque de gauche de l'accélérateur doit être chargée négativement, et la plaque de droite doit être chargée positivement. La différence de potentiel pour le parcours du proton est donc négative.

Connues	Inconnue
$\Delta V = -5{,}00\ \text{kV}$	$\vec{B}$
$\vec{E} = 9{,}60 \times 10^3\ \text{V/m}$ vers le bas	
$q = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}$	
$m = 1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}$	

Selon la règle de la main droite pour le produit vectoriel, le champ magnétique doit être sortant de la page pour que la force magnétique soit vers le haut.

Identifier les clés

La première **clé** est la conservation de l'énergie mécanique durant l'accélération (*voir l'équation 4.12 de la page 127*) :

$$\Delta K + q\,\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta K = -q\,\Delta V$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -q\,\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-2q\,\Delta V}{m}}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est que la force de Lorentz doit être nulle pour que les protons se déplacent en ligne droite :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$qE = qvB \Rightarrow B = \frac{E}{v}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le module de la vitesse des protons après l'accélération :

$$v = \sqrt{\frac{-2 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}\ (-5{,}00 \times 10^3\ \text{V})}{1{,}673 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$
$$= 9{,}786 \times 10^5\ \text{m/s}\,.$$

Ensuite, nous insérons ce résultat dans l'équation (ii) :

$$B = \frac{9{,}60 \times 10^3\ \text{V/m}}{9{,}786 \times 10^5\ \text{m/s}} = 9{,}81 \times 10^{-3}\ \text{T}\,.$$

Le champ magnétique est donc

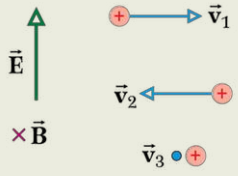
$$\vec{B} = 9{,}81\ \text{mT}\ \text{sortant de la page}\,. \text{ (réponse)}$$

Valider la réponse

Le champ magnétique nécessaire est de l'ordre de grandeur obtenu au chapitre 8. La vitesse du proton est beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière, ce qui nous permet d'utiliser la mécanique newtonienne.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.3

La figure suivante montre trois protons qui se déplacent dans une région où il y a un champ électrique et un champ magnétique croisés. Les trois protons ont des vitesses $v < E/B$, ayant le même module. Classez les protons selon un ordre décroissant du module de la force résultante qu'ils subissent.



Le spectromètre de masse

Un *spectromètre de masse* est un appareil qui permet de mesurer la masse des atomes et des molécules. Il en existe plusieurs types. La figure 9.14 montre le schéma d'un spectromètre de masse utilisant la déviation des particules chargées par un champ magnétique. Au départ, une source produit des ions à partir des atomes dont on veut connaître la masse. La charge q des ions est connue. Les ions passent à travers un sélecteur de vitesse (avec un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_{sv}$, l'indice sv désignant le sélecteur de vitesse), ce qui produit un faisceau d'ions ayant la même vitesse :

$$v = \frac{E}{B_{sv}} .$$

La troisième partie est une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}_0$ perpendiculaire à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ des ions. Les ions décrivent des demi-cercles de rayon r, donné par l'équation 9.3 :

$$r = \frac{mv}{|q|B_0} .$$

Les ions sont alors détectés, ce qui permet de mesurer le diamètre $2r$ des trajectoires. On peut alors isoler la masse des ions :

$$m = \frac{|q|B_0 r}{v} = \frac{|q|B_0 r B_{sv}}{E} .$$

Si l'atome possède plusieurs isotopes, la masse de chaque isotope est mesurée séparément. En effet, chaque isotope a une trajectoire différente, avec un rayon proportionnel à sa masse. Les isotopes arrivent donc sur le détecteur à des positions différentes.

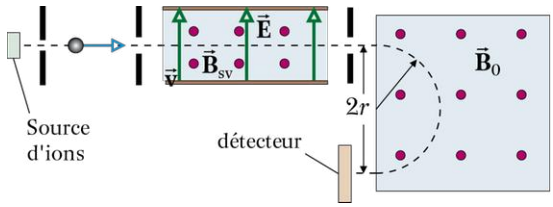


FIGURE 9.14
Un spectromètre de masse utilisant la déviation par un champ magnétique

Le cyclotron et le synchrotron

Pour connaître les interactions et les constituants de la matière à très petite échelle, les physiciens produisent des collisions de particules à très haute énergie. Ces particules doivent être accélérées dans des accélérateurs de particules. Un champ magnétique ne peut pas accélérer une particule chargée, car la force magnétique est toujours perpendiculaire à la vitesse. Le travail de la force magnétique est toujours nul. On a donc besoin d'une force électrique pour accélérer les particules.

Les accélérateurs de particules les plus simples sont des accélérateurs linéaires. Les particules chargées sont accélérées en ligne droite par une différence de potentiel d'accélération, comme c'est le cas dans l'exemple 9.4. Le cyclotron

est un accélérateur de particules qui utilise une déviation magnétique pour faire passer de nombreuses fois les particules chargées dans une région d'accélération.

La figure 9.15a illustre les éléments importants d'un cyclotron. D'abord, une source d'ions ou de protons émet les particules qu'on veut accélérer. Les particules entrent à l'intérieur de conducteurs creux en forme de demi-cylindres qu'on appelle les *dés* (ils ont la forme de la lettre D). Les électro-aimants produisent un champ magnétique uniforme, de telle sorte que la trajectoire est circulaire. On applique une différence de potentiel alternative ΔV entre les dés, de façon que chaque fois que la particule sort d'un dé, le champ électrique est orienté pour accélérer la particule. On ajuste la fréquence de la différence de potentiel pour qu'elle soit égale à la fréquence du mouvement circulaire, donnée par l'équation 9.4 :

$$f_{\text{osc}} = f = \frac{|q|B}{2\pi m} . \tag{9.11}$$

Selon la masse et la charge de la particule accélérée, on ajuste le champ magnétique produit par les électro-aimants pour que cette condition soit respectée. Comme la fréquence du mouvement circulaire ne dépend pas de la vitesse, la même fréquence d'oscillation est utilisée tout au long de l'accélération.

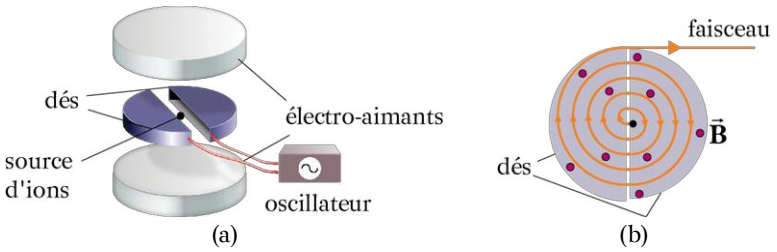


FIGURE 9.15
(a) Le schéma d'un cyclotron. (b) Une vue en plongée de la trajectoire d'une particule positive dans le cyclotron.

La particule se déplace en spirale. À chaque demi-tour, sa vitesse augmente lorsqu'elle se déplace entre les dés. À l'intérieur des dés, elle ne subit l'influence que du champ magnétique, car les dés sont des conducteurs, puisque $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ à l'intérieur d'un conducteur. Après un certain nombre de révolutions, la trajectoire a un rayon $r = R$ égal au rayon des dés. La particule sort du cyclotron. Selon l'équation 9.3,

$$R = \frac{mv}{|q|B} \Rightarrow v = \frac{|q|BR}{m} .$$

Les cyclotrons ont d'abord été utilisés dans des recherches en physique nucléaire. De nos jours, on les utilise dans les recherches en physique médicale pour produire des isotopes médicaux et dans certains traitements contre le cancer (la *hadronthérapie*). Ces accélérateurs peuvent augmenter la vitesse des protons jusqu'à une énergie cinétique d'environ 25 MeV. À partir de cette énergie, la vitesse est suffisante pour que des effets relativistes diminuent la fréquence du mouvement circulaire. La fréquence d'oscillation n'est alors plus synchronisée avec le mouvement des particules.

Pour obtenir des protons de plus grande énergie cinétique, il est possible de modifier la fréquence ou le champ magnétique lorsque les particules atteignent les bords du cyclotron, avec une vitesse relativiste, de telle sorte que l'énergie cinétique continue d'augmenter. Le second problème des cyclotrons est lié à la taille. En effet, pour générer une grande énergie cinétique, on a besoin de très gros cyclotrons. Ceci nécessite des électro-aimants de très grandes dimensions afin d'obtenir un champ magnétique sur une très grande surface. Le plus grand cyclotron est situé dans les laboratoires du TRIUMF (le Laboratoire national canadien pour la recherche en physique nucléaire et en physique des particules), à Vancouver. Ce cyclotron peut accélérer des protons jusqu'à une énergie cinétique de 500 MeV.

Les deux difficultés sont résolues lorsque le cyclotron est remplacé par un synchrotron. Dans un synchrotron, les particules se déplacent à l'intérieur d'un anneau, sur une trajectoire circulaire, plutôt que sur une trajectoire en spirale. On fait varier graduellement le champ magnétique et la fréquence de la différence de potentiel d'accélération. Le champ magnétique existe seulement dans l'anneau plutôt que dans une grande région circulaire.

Le plus grand accélérateur du monde est le LHC (Large Hadron Collider ou Grand collisionneur de hadrons). Il est constitué de deux synchrotrons qui accélèrent des protons (ou des ions lourds comme le plomb) en sens inverses. Les synchrotrons sont situés dans un tunnel de 26,659 km de circonférence, à environ 100 m de profondeur (*voir la figure 9.16*), entre la Suisse et la France. Les deux faisceaux se rencontrent à quatre endroits, où des grands détecteurs sont placés pour analyser les produits des collisions. À terme, le LHC devrait pouvoir accélérer les protons jusqu'à une énergie cinétique de 7 TeV dans chacun des synchrotrons.

FIGURE 9.16
L'intérieur du tunnel du LHC

9.4 L'effet Hall

Dans les sections précédentes, nous avons vu que les électrons et les autres particules chargées sont déviés lorsqu'ils se déplacent dans un champ magnétique. Que se passe-t-il dans le cas des électrons d'un courant électrique à l'intérieur d'un conducteur ? Le physicien américain Edwin Herbert Hall (1855–1938) a découvert que le champ magnétique produit une différence de potentiel perpendiculairement au sens du courant et au sens du champ magnétique. L'*effet Hall* permet de vérifier le signe des porteurs de charge dans un conducteur. Il est très utile dans différents capteurs électroniques, entre autres pour mesurer le module du champ magnétique.

Pour comprendre cet effet, on fait circuler un courant électrique dans un élément conducteur qui est placé dans un champ magnétique, comme le montre la figure 9.17. Le conducteur a une largeur h et une épaisseur d, ce qui fait que l'aire de sa section (perpendiculaire au courant) est $A = hd$. Le champ magnétique est perpendiculaire au sens du courant. Comme nous l'avons vu à la section 6.1, le courant électrique est produit lorsque des porteurs de charge se déplacent dans la même direction à une vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$.

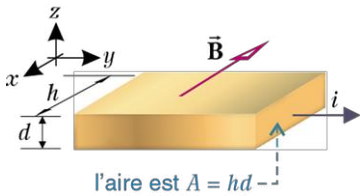


FIGURE 9.17
Le montage pour produire l'effet Hall

Pour commencer, supposons que les porteurs de charge sont des particules positives, qui se déplacent à une vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$ dans le même sens que le sens du courant (*voir la figure 9.18a, qui présente une vue de face*). Les particules subissent une force magnétique vers le haut. Les particules positives vont se déplacer vers le haut en s'accumulant sur la surface supérieure, comme le montre la figure 9.18b. L'accumulation de charges positives produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, orienté vers le bas. Ce champ génère une force électrique vers le bas sur les porteurs de charge. On obtient rapidement une situation d'équilibre, avec une force résultante nulle. Les porteurs de charge se déplacent alors en ligne droite. Il y a une différence de potentiel, qu'on appelle la *différence de potentiel de Hall* ΔV_H, entre la surface supérieure (à un potentiel plus élevé) et la surface inférieure.

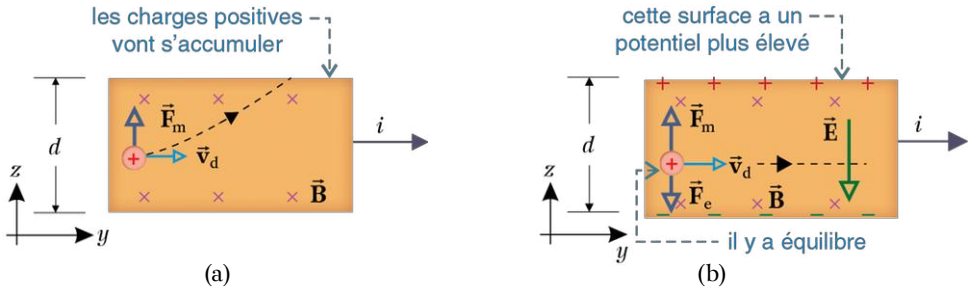


FIGURE 9.18
(a) Des porteurs de charge positive subissent une force magnétique vers le haut. (b) À l'équilibre, la surface du haut est à un potentiel plus élevé que la surface du bas.

Regardons ce qui se passe maintenant si les porteurs de charge sont des particules négatives. Dans ce cas, les porteurs de charge se déplacent à l'opposé du sens du courant, avec une vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$ (*voir la figure 9.19a à la page suivante*). Ils subissent une force magnétique orientée vers le haut, ce qui produit

une accumulation de charges négatives sur la surface supérieure. Cette accumulation de charges génère un champ électrique vers le haut. Contrairement à la situation précédente, la surface supérieure est à un potentiel plus faible que la surface inférieure, comme le montre la figure 9.19. Donc, on peut connaître le signe des porteurs de charge en mesurant quelle surface a le potentiel le plus élevé, à l'aide d'un voltmètre.

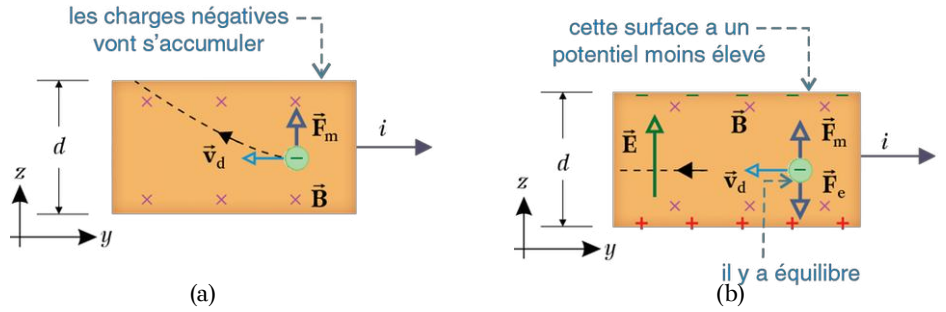


FIGURE 9.19

(a) Des porteurs de charge négative subissent une force magnétique vers le haut. (b) À l'équilibre, la surface du haut est à un potentiel plus faible que la surface du bas.

Lorsque l'élément conducteur est un bon conducteur, comme le cuivre, l'aluminium ou l'argent, on trouve que la surface du haut est à un potentiel plus faible. Ceci confirme que les porteurs de charge sont des électrons. Pour certains métaux, comme le béryllium ou le zinc, on trouve que la surface supérieure a un potentiel plus élevé que la surface inférieure. Les porteurs de charge ne sont donc pas des électrons pour ces métaux. Afin de comprendre la conduction dans ces métaux, on doit recourir à un modèle de la conduction plus complexe. Ce modèle est le modèle des bandes, qui tient aussi compte du mouvement des *trous*, qui correspondent à l'absence d'électrons. Dans le cas de semiconducteurs, le résultat est encore plus complexe, car l'effet Hall est produit par le mouvement d'électrons de conduction et de trous. Toutefois, cette analyse dépasse le cadre de cet ouvrage.

Nous supposons donc pour la suite que les porteurs de charge sont des électrons de conduction. Le champ électrique induit par l'accumulation de charges est uniforme si le champ magnétique l'est aussi. La différence de potentiel de Hall est alors (*voir par exemple l'équation 4.11 de la page 126*) :

$$\Delta V_H = Ed \,. \tag{9.12}$$

À l'équilibre, la force électrique et la force magnétique ont le même module. Comme le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse et que la charge de l'électron est $q = -e$, on obtient

$$|e|E = |e|v_d B \Rightarrow v_d = \frac{E}{B}$$

$$v_d = \frac{\Delta V_H}{dB} \,. \tag{9.13}$$

Cette équation permet d'obtenir une valeur expérimentale du module de la vitesse de dérive à partir d'une mesure du champ magnétique, de la hauteur du conducteur d et de la différence de potentiel de Hall ΔV_H.

Au chapitre 6, nous avons vu que le module de la vitesse de dérive est relié au courant i qui circule dans le conducteur. À partir de l'équation 6.5 de la page 193, on a

$$v_d = \frac{i}{neA} = \frac{i}{nehd}$$

où n est la densité de porteurs de charge. En insérant cette équation dans l'équation 9.13, on obtient

$$\frac{i}{nehd} = \frac{\Delta V_H}{dB}$$

$$n = \frac{Bi}{eh\ \Delta V_H}. \tag{9.14}$$

Donc, en mesurant la différence de potentiel de Hall lorsque le champ magnétique et l'épaisseur du conducteur sont connus, on peut obtenir une valeur expérimentale pour déterminer la densité de porteurs de charge. Au chapitre 6, nous avons supposé qu'un bon conducteur fournissait un électron de conduction par atome. On est maintenant en mesure d'obtenir une valeur plus exacte. Le tableau 9.1 donne les valeurs pour certains matériaux, qui ont été obtenues par effet Hall.

TABLEAU 9.1

Les mesures par effet Hall de la densité de porteurs de charge, de leur signe et du nombre de porteurs de charge par atome

Substance	n ($\times 10^{28}$ m^{-3})	Signe	Nombre par atome
Aluminium	21	–	3,5
Antimoine	0,31	–	0,09
Argent	7,4	–	1,3
Béryllium	2,6	+	2,2
Cuivre	11	–	1,3
Potassium	1,5	–	1,1
Sodium	2,5	–	0,99
Zinc	19	+	2,9

Dans le cas d'un matériau pour lequel n est connu, l'équation 9.14 permet d'obtenir le module d'un champ magnétique :

$$B = \frac{neh\ \Delta V_H}{i}.$$

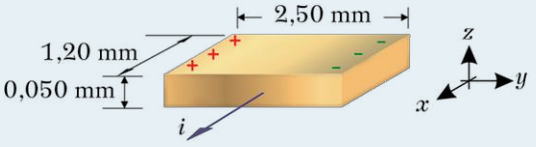
Les capteurs à effet Hall sont des appareils électroniques qui mesurent la différence de potentiel de Hall à travers un conducteur connu et qui donne la mesure d'une composante du champ magnétique.

MISE EN GARDE

Évitez de confondre les dimensions h et d. Pour calculer le module de la vitesse de dérive à l'aide de l'équation 9.13, on a besoin de la dimension d, qui est perpendiculaire au sens du courant et au champ magnétique. Pour calculer la densité de porteurs de charge, on a besoin de la dimension h, qui est parallèle au champ magnétique.

EXEMPLE 9.5 La détection d'un champ magnétique

Un capteur de champ magnétique utilise un circuit dans lequel un morceau de cuivre, illustré dans la figure ci-contre, est parcouru par un courant de 10,0 A, orienté dans le même sens que l'axe des x. La densité de porteurs de charge du cuivre est de $1{,}1 \times 10^{29}\ \text{m}^{-3}$. La différence de potentiel de Hall est de 5,8 µV. Le champ magnétique est orienté en direction de l'axe des z, et le champ électrique est orienté en direction de l'axe des y.



a. Quel est le champ électrique de Hall à l'intérieur du cuivre ?

b. Quel est le champ magnétique ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 9.20 montre le champ électrique de Hall, orienté des charges positives vers les charges négatives, donc dans le sens de l'axe des y.

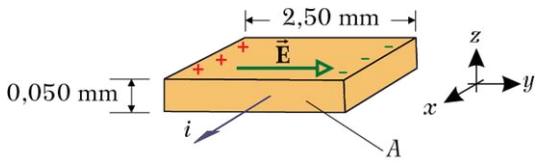


FIGURE 9.20
Le schéma de la situation pour l'exemple 9.5a

Décortiquer le problème

Selon la figure 9.20, $d = 2{,}50 \times 10^{-3}$ m, car c'est la distance entre les charges positives et les charges négatives.

Connues	Inconnue
$\Delta V_H = 5{,}80\ \mu\text{V}$	$\vec{E}$
$d = 2{,}50\ \text{mm}$	

Identifier la clé

La clé est l'équation 9.12, reliant le module du champ électrique et la différence de potentiel de Hall :

$$\Delta V_H = Ed \Rightarrow E = \frac{\Delta V_H}{d}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$E = \frac{5{,}8 \times 10^{-6}\ \text{V}}{2{,}50 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}32 \times 10^{-3}\ \text{V/m}.$$

Le champ électrique est donc

$$\vec{E} = 2{,}3\ \text{mV/m}\ \vec{j}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 9.21 montre une vue en plongée de la situation. La force électrique exercée sur un électron de conduction est vers la gauche (à l'opposé du champ électrique pour les électrons), ce qui implique qu'à l'équilibre, la force magnétique est vers la droite. Selon la règle de la main droite, le champ magnétique doit être entrant dans la page, donc il est orienté dans le sens opposé au sens de l'axe des z.

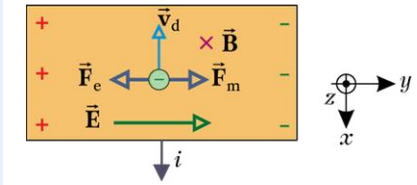


FIGURE 9.21
Une vue en plongée de la situation pour l'exemple 9.5b

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$n = 1{,}1 \times 10^{29}\ \text{m}^{-3}$	$\vec{B}$
$q = -e = -1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}$	
$i = 10{,}0\ \text{A}$	

À partir des données de la figure 9.20, nous déterminons l'aire de la section transversale (perpendiculaire au courant) :

$$A = 0{,}050 \times 10^{-3}\ \text{m} \times 2{,}50 \times 10^{-3}\ \text{m}$$
$$= 1{,}25 \times 10^{-7}\ \text{m}^2.$$

Identifier les clés

La première **clé** est qu'à l'équilibre, la force de Lorentz sur les électrons de conduction est nulle :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow v_d = \frac{E}{B} . \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième **clé** est que le mouvement des électrons produit le courant, selon l'équation 6.5 :

$$i = nev_dA . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (iii), puis nous isolons le module du champ magnétique :

$$i = neA\frac{E}{B} \Rightarrow B = \frac{neAE}{i}$$

$$B = \left[(1{,}1\times10^{29}\ \text{m}^{-3})(1{,}60\times10^{-19}\ \text{C}) \times(1{,}25\times10^{-7}\ \text{m}^2)(2{,}32\times10^{-3}\ \text{V/m})\right] / [10{,}0\ \text{A}]$$

$$B = 0{,}51\ \text{T} .$$

Le champ magnétique est donc

$$\vec{\mathbf{B}} = -0{,}51\ \text{T}\,\vec{\boldsymbol{k}} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur des résultats semble correct. En calculant le module de la vitesse de dérive, nous trouvons $v_d = E/B = 4{,}5$ mm/s, ce qui est semblable aux résultats obtenus dans le chapitre 6.

9.5 La force magnétique sur les fils

Nous avons vu dans la section 9.4 que les électrons de conduction subissent une force magnétique lorsque le conducteur parcouru par un courant électrique est placé dans un champ magnétique. Cette force doit être communiquée au conducteur en entier.

Dans la figure 9.22, une section de fil de longueur ℓ est placée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. Un courant i circule dans le fil. La force magnétique sur une charge est donnée par l'équation 9.2 :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}} .$$

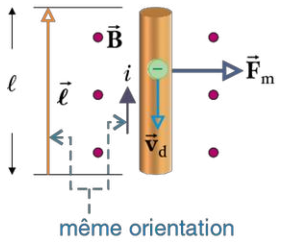


FIGURE 9.22
Une section de fil, parcourue par un courant, subit une force magnétique.

Un électron de conduction a besoin d'un temps $t = \ell/v_d$ pour se déplacer sur toute la section du fil. On considère le vecteur $\vec{\ell}$ comme un vecteur dont le module est ℓ, et dont l'orientation est celle du courant. On a alors $\vec{\ell}/t = -\vec{\mathbf{v}}_d$. La charge qui passe vis-à-vis d'un point durant ce temps est $q = -it$. La force magnétique sur le fil est

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = (-it)\left(\frac{-\vec{\ell}}{t}\right) \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_m = i\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}} . \qquad (9.15)$$

Force magnétique sur un courant

De nouveau, la force est perpendiculaire au champ magnétique et au vecteur $\vec{\ell}$, donc perpendiculaire à l'orientation du courant. Le module de la force magnétique est

$$F_m = i\ell B \sin\phi , \qquad (9.16)$$

où ϕ est l'angle entre le vecteur $\vec{\ell}$ et le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$.

Si le fil n'est pas rectiligne ou que le champ magnétique n'est pas uniforme, on doit diviser le fil en éléments de longueur infinitésimale $d\vec{\ell}$. Chaque élément de longueur subit une force magnétique $d\vec{F}_m = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$. On obtient la force résultante sur le fil en faisant la somme vectorielle, donc en calculant l'intégrale :

$$\vec{F}_m = i \int_{\text{fil}} d\vec{\ell} \times \vec{B} \,. \tag{9.17}$$

EXEMPLE 9.6 La force magnétique sur un fil

Un fil horizontal de 50,0 m est parcouru par un courant de 12,0 A. Le courant est orienté vers le nord. Le fil est placé dans un champ magnétique uniforme ayant une composante de 0,300 T vers le sud et une composante de 0,150 T orientée vers le bas. Calculez la force magnétique exercée sur le fil.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.23 montre une vue en plongée de la situation. Le champ magnétique est décomposé selon ses composantes horizontale $\vec{B}_h$ (vers le sud) et verticale $\vec{B}_v$ (vers le bas). Nous avons tracé un système de coordonnées cartésiennes, avec l'axe des x orienté vers l'est, l'axe des y orienté vers le nord et l'axe des z orienté vers le haut. L'orientation de $\vec{F}_m$ est obtenue à l'aide de la règle de la main droite du produit vectoriel $\vec{\ell} \times \vec{B}$.

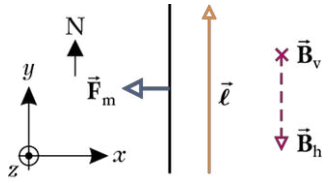


FIGURE 9.23
Une vue en plongée de la situation de l'exemple 9.6

Décortiquer le problème

Le vecteur $\vec{\ell}$ est orienté vers le nord (dans le sens de l'axe des y), car le courant est orienté vers le nord.

Connues	Inconnue
$\vec{\ell} = 50{,}0\ \text{m}\,\vec{j}$	$\vec{F}_m$
$i = 12{,}0\ \text{A}$	
$\vec{B} = (-0{,}300\vec{j} - 0{,}150\vec{k})\ \text{T}$	

Identifier la clé

La clé est l'équation 9.15 :

$$\vec{F}_m = i\vec{\ell} \times \vec{B} \,.$$

Résoudre le problème

Nous devons calculer le produit vectoriel à partir des composantes cartésiennes :

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= (12{,}0\ \text{A})(50{,}0\ \text{m}\,\vec{j}) \times (-0{,}300\vec{j} - 0{,}150\vec{k})\ \text{T} \\ &= (12{,}0\ \text{A} \times 50{,}0\ \text{m}) \\ &\quad \times (-0{,}300\ \text{T}\,\vec{j} \times \vec{j} - 0{,}150\ \text{T}\,\vec{j} \times \vec{k}) \,.\end{aligned}$$

Comme $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, nous obtenons

$$\vec{F}_m = -90{,}0\ \text{N}\,\vec{i} \,.$$

La force magnétique est orientée dans le sens opposé de l'axe des x, donc vers l'ouest :

$$\vec{F}_m = 90{,}0\ \text{N}\ \overrightarrow{\text{vers l'ouest}} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La force magnétique est bien orientée selon le résultat de la règle de la main droite, comme il est indiqué à la figure 9.23.

La force magnétique entre deux courants parallèles

Nous avons vu à la section 8.2 qu'un long fil parcouru par un conducteur produit un champ magnétique. Si on place un deuxième fil près du premier, le deuxième va subir une force magnétique, car il se trouve dans une région où un champ magnétique existe. Le premier fil va aussi subir une force magnétique, exercée par le deuxième fil.

Prenons la situation de la figure 9.24a, qui montre une vue de face de deux longs fils parallèles, d'une longueur ℓ et séparés par une distance r. Le fil 1 produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_1$, donné par l'équation 8.14 de la page 265 (si on considère en approximation un fil infini) :

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\vec{\mathbf{u}}_\ell \times \vec{\mathbf{u}}_\perp \ . \tag{9.18}$$

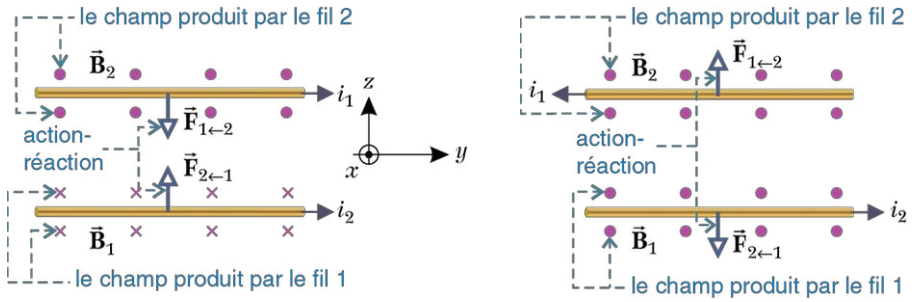


FIGURE 9.24

La force magnétique exercée par deux fils. (a) La force est attractive lorsque les courants sont dans le même sens. (b) La force est répulsive lorsque les courants sont de sens opposés.

Selon la règle de la main droite, le champ $\vec{\mathbf{B}}_1$ est orienté dans la page pour les points sous le fil 1, c'est-à-dire avec une composante x négative, selon le système de coordonnées cartésiennes illustré à la figure 9.24. Tous les points du fil 2 se trouvent à la même distance r du fil 1. Le champ $\vec{\mathbf{B}}_1$ est donc le même pour tous les points du fil 2. De plus, ce champ est perpendiculaire au sens du courant i_2. La force exercée sur le fil 2 est donnée par l'équation 9.15 :

$$\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1} = i_2 \vec{\ell}_2 \times \vec{\mathbf{B}}_1 \ . \tag{9.19}$$

Dans la situation de la figure 9.24a, la règle de la main droite veut que la force sur le fil 2 soit orientée vers le fil 1 (avec une composante z positive). Le fil 2 est attiré par le fil 1. Le module de cette force est

$$F_{2\leftarrow 1} = i_2 \ell \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\right) \sin(90°) = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2\pi r} \ . \tag{9.20}$$

De même, le fil 1 subit une force magnétique exercée par le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_2$ produit par le fil 2. Le champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ est sortant pour les points au-dessus du fil, et la force $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}$ est vers le bas, c'est-à-dire vers le fil 2. Les forces $\vec{\mathbf{F}}_{1\leftarrow 2}$et $\vec{\mathbf{F}}_{2\leftarrow 1}$ forment une paire action-réaction. Elles ont le même module et des orientations opposées.

La figure 9.24b montre la situation dans le cas de deux longs fils parallèles avec des courants opposés. Cette fois-ci, la force d'interaction est une force répulsive.

Deux longs fils parallèles parcourus par des courants continus exercent l'un sur l'autre une force magnétique. Cette force est attractive lorsque les courants sont dans le même sens, et elle est répulsive lorsque les courants sont en sens opposés.

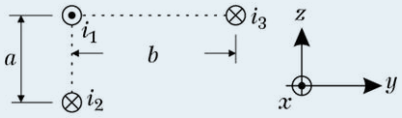
Lorsqu'il y a plusieurs longs fils parallèles dans une configuration, on calcule la force sur un fil particulier en calculant les champs magnétiques $\vec{\mathbf{B}}_1, \vec{\mathbf{B}}_2$, ..., produits par les autres fils à la position du fil sur lequel on veut calculer la force, à l'aide de l'équation 9.18. On établit ensuite le champ magnétique résultant $\vec{\mathbf{B}}$ en appliquant le principe de superposition (*voir l'équation 8.5 de la page 261*). Finalement, on calcule la force magnétique exercée par le champ résultant sur le fil à l'aide de l'équation 9.19.

La force entre deux longs fils parallèles est utilisée pour définir l'ampère. Selon la définition du SI, adoptée en 1946,

> Un courant de 1 A est le courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur.

EXEMPLE 9.7 La force magnétique résultante

La figure suivante montre trois longs fils parallèles ayant chacun une longueur de 2,00 m, où $a = 5{,}00$ cm et $b = 8{,}00$ cm. Calculez la force résultante sur le fil 3 si $i_1 = 5{,}00$ A, $i_2 = 8{,}40$ A et $i_3 = 3{,}80$ A.



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.25 montre les vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{u}}_\perp$ et les champs magnétiques produits par les fils 1 et 2.

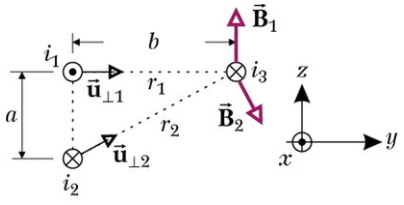


FIGURE 9.25
Le schéma de la situation pour l'exemple 9.7

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$i_1 = 5{,}00$ A	$i_2 = 8{,}40$ A	$\vec{\mathbf{F}}_3$
$i_3 = 3{,}80$ A	$\vec{\ell} = -2{,}00\ \text{m}\,\vec{\imath}$	
$a = 0{,}0500$ m	$b = 0{,}0800$ m	

Nous avons besoin des vecteurs unitaires pour calculer le champ magnétique de chaque fil :

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 1} = \vec{\imath} \qquad \vec{\mathbf{u}}_{\perp 1} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{\ell 2} = -\vec{\imath} \qquad \vec{\mathbf{u}}_{\perp 2} = \frac{b\vec{\jmath} + a\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r_1 = b \qquad r_2 = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 9.18 :

$$\vec{\mathbf{B}}_j = \frac{\mu_0 i_j}{2\pi r_j} \vec{\mathbf{u}}_{\ell j} \times \vec{\mathbf{u}}_{\perp j}\ , \qquad \text{(i)}$$

où $j = 1$ ou $j = 2$. La deuxième **clé** est le principe de superposition pour le champ magnétique :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2\ . \qquad \text{(ii)}$$

La troisième **clé** est l'équation 9.18 qui permet de calculer la force exercée par le champ magnétique résultant sur le fil :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = i\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}\ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons les champs magnétiques :

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi b}\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi b}\vec{k}$$
$$= \frac{4\pi\times10^{-7}\times5{,}00}{2\pi\times0{,}0800}\vec{k} = 1{,}25\times10^{-5}\ \text{T}\,\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{[-\vec{\imath}\times b\vec{\jmath}]-[\vec{\imath}\times a\vec{k}]}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\left(\frac{-b\vec{k}+a\vec{\jmath}}{a^2+b^2}\right)$$
$$= \frac{4\pi\times10^{-7}\times8{,}40}{2\pi}\left[\frac{0{,}0500\,\vec{\jmath}-0{,}0800\,\vec{k}}{(0{,}0500)^2+(0{,}0800)^2}\right]$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2 = (0{,}944\vec{\jmath}-1{,}51\vec{k})\times10^{-5}\ \text{T}\,.$$

Ensuite, le champ résultant est obtenu à l'aide de l'équation (ii) :

$$\vec{\mathbf{B}} = (1{,}25\vec{k}+0{,}944\vec{\jmath}-1{,}51\vec{k})\times10^{-5}\ \text{T}$$
$$= (9{,}44\vec{\jmath}-2{,}6\vec{k})\times10^{-6}\ \text{T}\,.$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (iii) :

$$\vec{\mathbf{F}}_\text{m} = (3{,}80\ \text{A})(2{,}00\ \text{m})(-\vec{\imath})$$
$$\times[9{,}44\vec{\jmath}-2{,}6\vec{k}]\times10^{-6}\ \text{T}$$
$$= (-2{,}0\vec{\jmath}-7{,}17\vec{k})\times10^{-5}\ \text{N}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les champs magnétiques calculés ont les orientations données à la figure 9.25, obtenues avec la règle de la main droite. La figure 9.26 montre les vecteurs $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\ell}$ et $\vec{\mathbf{F}}_\text{m}$ obtenus. L'orientation de $\vec{\mathbf{F}}_\text{m} = i\vec{\ell}\times\vec{\mathbf{B}}$ est aussi compatible avec la règle de la main droite. La composante y de la force a seulement deux chiffres significatifs, car un chiffre significatif a été perdu dans le calcul de la composante z du champ magnétique résultant.

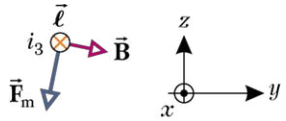


FIGURE 9.26
La validation de l'orientation de $\vec{\mathbf{F}}_\text{m}$

9.6 Les dipôles magnétiques dans un champ magnétique

Un champ magnétique uniforme

Nous avons vu à la section 8.4 qu'une boucle de courant se comporte comme un dipôle magnétique, tel un barreau aimanté. On sait par expérience qu'un barreau aimanté subit un moment de force lorsqu'il se trouve dans un champ magnétique, comme l'aiguille d'une boussole qui tourne selon le champ magnétique.

La figure 9.27a montre une boucle rectangulaire (de longueur a et de largeur b), parcourue par un courant i, dont l'orientation est indiquée dans la figure. La

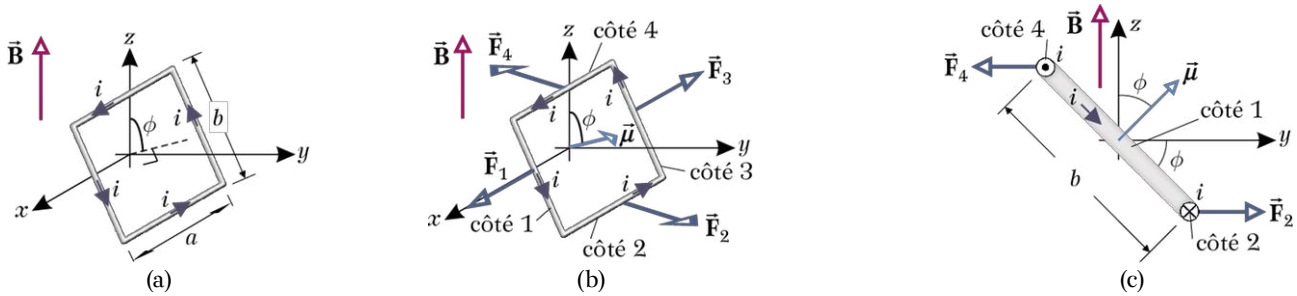


FIGURE 9.27
(a) Une boucle rectangulaire parcourue par un courant i est placée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. (b) Chaque côté subit une force magnétique. (c) Une vue de face de la boucle, pour calculer le moment de force.

boucle se trouve dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, orienté dans le sens de l'axe des z. La boucle est inclinée par rapport au système de coordonnées cartésiennes : la normale de la boucle forme un angle ϕ par rapport au champ magnétique.

On peut décomposer la boucle en quatre côtés. Les côtés 2 et 4 sont horizontaux, alors que les côtés 1 et 3 sont obliques. Chaque côté subit une force magnétique, perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$ et au sens du courant dans ce côté, comme le montre la figure 9.27b. La force résultante est nulle, car les forces sur les côtés opposés ont le même module et des orientations opposées. Par contre, les forces $\vec{\mathbf{F}}_2$ et $\vec{\mathbf{F}}_4$ produisent un moment de force qui tend à aligner la normale de la boucle sur le champ magnétique. Les forces $\vec{\mathbf{F}}_1$ et $\vec{\mathbf{F}}_3$ ne produisent pas de moment de force, car leurs lignes d'action passent par le centre de la boucle.

Les côtés 2 et 4 ont chacun une longueur a, et le sens du courant est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$ parce que ces côtés sont horizontaux. Le module des forces $\vec{\mathbf{F}}_2$ et $\vec{\mathbf{F}}_4$ est

$$F_2 = F_4 = iaB \sin(90°) = iaB \ .$$

Dans le chapitre 12 du tome 1, nous avons vu que pour une force $\vec{\mathbf{F}}$, dont le point d'application est à une position $\vec{\mathbf{r}}$ par rapport à un pivot, le moment de force est

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \ .$$

Le vecteur moment de force $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de rotation de l'objet qui tourne, donc selon l'axe des x ici. Dans le présent cas, le moment de force tend à faire tourner la boucle en sens antihoraire, ce qui implique que la composante x du moment de force est positive. On calcule le moment de force par rapport au centre de la boucle. La distance entre chaque point d'application des forces et le centre de la boucle est $b/2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{x,2} + \tau_{x,4} = F_2 \left(\frac{b}{2}\right) \sin\phi + F_4 \left(\frac{b}{2}\right) \sin\phi \\ &= iaB \left(\frac{b}{2}\right) \sin\phi + iaB \left(\frac{b}{2}\right) \sin\phi = iabB \sin\phi \ . \end{aligned} \tag{9.21}$$

Le moment de force dépend du champ magnétique et des propriétés de la boucle. À la section 8.4, nous avons défini le concept de moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ pour caractériser les boucles de courant et les dipôles magnétiques. Pour une boucle, ce vecteur est $\vec{\boldsymbol{\mu}} = i\vec{\mathbf{A}}$, où $\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur aire, dont le module est égal à l'aire de la boucle, la direction est perpendiculaire à la boucle et le sens est obtenu à l'aide de la règle de la main droite (on enroule les doigts selon le courant dans la boucle, et le pouce donne le sens de $\vec{\mathbf{A}}$ et de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$).

Dans le cas présent, l'aire de la boucle est $A = ab$, et le vecteur $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ forme un angle ϕ par rapport au champ magnétique. L'équation 9.21 est donc

$$\tau_x = iAB \sin\phi = \mu B \sin\phi \ .$$

Cette équation représente le module d'un produit vectoriel. De façon générale, le moment de force d'une boucle (ou d'un dipôle magnétique) dans un champ magnétique est

Moment de force sur un dipôle

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} \ . \tag{9.22}$$

Dans cette équation, la forme de la boucle n'a pas d'importance. On a fait le calcul avec une boucle rectangulaire car le calcul est plus simple. Dans le cas d'une bobine ayant N spires, le moment de force se calcule à l'aide de la même relation, avec le moment magnétique de la bobine donné par :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = Ni\vec{\mathbf{A}} \, . \tag{9.23}$$

Le comportement d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique est semblable au comportement d'un dipôle électrique dans un champ électrique (*voir la section 2.8*). Le moment de force tend à aligner le moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ sur le champ magnétique. Le moment de force est nul pour $\phi = 0$ (équilibre stable) et pour $\phi = 180°$ (équilibre instable).

Tout comme dans le cas du champ électrique, on peut définir l'énergie potentielle associée à l'orientation d'un dipôle dans un champ magnétique. En utilisant la même méthode que dans la section 4.10, on trouve

$$U = -\mu B \cos\phi = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \, . \tag{9.24}$$

Énergie potentielle associée à un dipôle magnétique

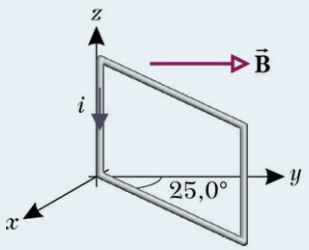
On peut faire tourner un dipôle magnétique en effectuant un travail extérieur. Selon le principe de conservation de l'énergie,

$$W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U \, , \tag{9.25}$$

où K est l'énergie cinétique de rotation du dipôle.

EXEMPLE 9.8 La rotation d'une bobine

Une bobine verticale rectangulaire possède 50,0 spires, et ses côtés mesurent 40,0 cm sur 30,0 cm. Elle forme un angle de 25,0° par rapport à l'axe des y, comme le montre la figure ci-contre, et elle peut pivoter autour de l'axe des z. Un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}600 \text{ T}\,\vec{\boldsymbol{j}}$ est présent, et un courant de 3,00 A circule dans la bobine.



a. Calculez le module du moment de force exercé sur la bobine.

b. Dans quel sens tournera la bobine si celle-ci est initialement immobile, pour un observateur qui regarde la bobine dans une vue en plongée ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.28 illustre une vue en plongée de la bobine et du champ magnétique. La convention de la main droite permet d'obtenir l'orientation du moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, qui est perpendiculaire au plan de la bobine.

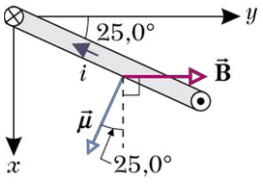


FIGURE 9.28
Une vue en plongée de la situation pour l'exemple 9.8

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\vec{\mathbf{B}} = 0{,}600 \text{ T}\,\vec{\boldsymbol{j}}$ $\quad i = 3{,}00$ A	τ
$N = 50{,}0$	sens de rotation

Selon la figure 9.28, l'angle ϕ entre $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ est

$$\phi = 90{,}0° + 25{,}0° = 115{,}0° \, .$$

L'aire de la boucle est

$$A = 0{,}400 \text{ m} \times 0{,}300 \text{ m} = 0{,}120 \text{ m}^2 \, .$$

Le module du moment magnétique de la bobine est

$$\mu = NiA = 50 \times 3{,}00 \text{ A} \times 0{,}120 \text{ m}^2 = 18{,}0 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \, . \quad \text{(i)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.22 :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}} .$$

Puisque c'est le module du moment de force qui est demandé, nous calculons le module du produit vectoriel :

$$\tau = \mu B \sin\phi , \qquad \text{(ii)}$$

où ϕ est l'angle entre $\vec{\mu}$ et $\vec{\mathbf{B}}$.

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs dans l'équation (ii) :

$$\tau = 18{,}0\ \text{A} \cdot \text{m}^2 \times 0{,}600\ \text{T} \sin(115{,}0°) = 9{,}79\ \text{N} \cdot \text{m} .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La boucle va tourner selon l'orientation du moment de force, qui tend à aligner le moment magnétique sur le champ magnétique.

Résoudre le problème

Selon la règle de la main droite pour le produit vectoriel, le moment de force est orienté dans le sens de l'axe des z, ce qui produit une rotation :

en sens antihoraire. (réponse)

Valider la réponse

L'ordre de grandeur a du sens. Nous pourrions aussi calculer le moment de force en utilisant la méthode des composantes, avec $\vec{\mu} = \mu \cos(25{,}0°)\,\vec{\imath} - \mu \sin(25{,}0°)\,\vec{\jmath}$. Le calcul du moment de force donne une composante z positive, car $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$.

Le moteur électrique

Le moment de force sur une boucle est le principe de fonctionnement d'un moteur électrique. La figure 9.29 montre le schéma d'un moteur simple. Une bobine (équivalente à plusieurs boucles superposées) est placée dans un champ magnétique produit par un aimant permanent. Une source de f.é.m. alimente la bobine, et un courant continu i circule dans la bobine. Le champ magnétique produit un moment de force qui fait tourner la bobine.

Si la bobine était branchée directement à la source de f.é.m., le moment de force alignerait la boucle sur le champ magnétique. Pour obtenir une rotation continue, on ajoute un commutateur qui inverse le courant dans la bobine à chaque demi-tour qu'elle effectue. Le commutateur est composé de deux anneaux reliés à la source.

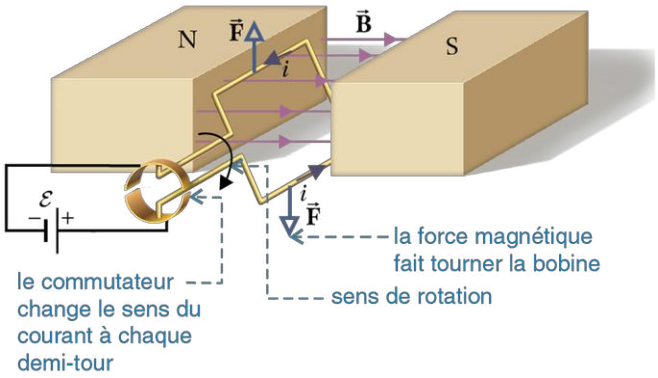


FIGURE 9.29
Le schéma d'un moteur simple

Un champ magnétique non uniforme

Lorsqu'une boucle de courant est dans un champ uniforme (qui ne varie pas d'un point à l'autre de l'espace), la boucle subit une force magnétique résultante nulle. Dans le cas où le champ magnétique n'est pas uniforme, la boucle subit une force. C'est ce qu'on peut voir à la figure 9.30, où une boucle de courant se trouve près d'un barreau aimanté.

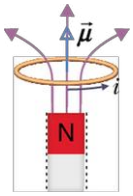


FIGURE 9.30
Une boucle de courant est dans le champ magnétique produit par un barreau aimanté.

Supposons que la boucle est orientée de telle sorte que son moment magnétique est orienté parallèlement à l'axe des z. Selon l'équation 9.24, l'énergie potentielle magnétique du système est

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -\mu_z B_z \ . \tag{9.26}$$

Nous avons vu dans le tome 1 que l'énergie potentielle est associée à une force conservative. À la section 9.5 de ce tome, nous avons appris que les composantes de la force magnétique sont obtenues en calculant l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle. Dans le cas présent, la force magnétique sur la boucle de courant a seulement une composante z :

$$F_z = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = \mu_z \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} \ . \tag{9.27}$$

Regardons les différentes possibilités. Dans la figure 9.31, le moment magnétique a la même orientation que le champ magnétique. Selon l'orientation de l'axe des z, $\mu_z > 0$. De plus, B_z diminue lorsqu'on se déplace dans le sens de l'axe des z, ce qui fait que $\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}z < 0$. La composante z de la force magnétique est donc négative, c'est-à-dire que la boucle est attirée par l'aimant. De façon équivalente, on peut placer le pôle nord et le pôle sud de la boucle de telle sorte que le vecteur moment magnétique soit orienté du pôle sud au pôle nord, comme dans la figure 9.31a. On remarque alors que le pôle sud de la boucle est près du pôle nord de l'aimant, ce qui produit une attraction.

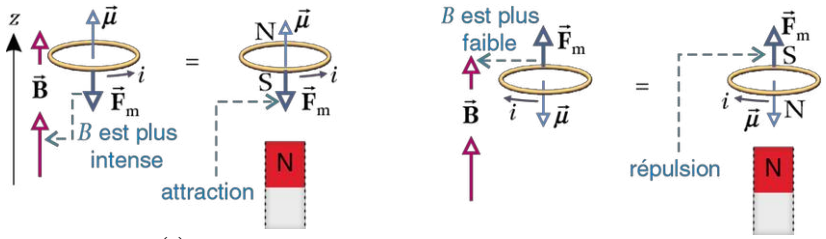


FIGURE 9.31
La force magnétique sur un dipôle magnétique lorsque : (a) le moment magnétique a le même sens que le champ magnétique ; (b) le moment magnétique est opposé au champ magnétique.

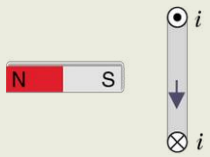
Dans la figure 9.31b, le sens du courant dans la boucle a été inversé, ce qui inverse le sens du moment magnétique, qui est maintenant opposé au champ magnétique. Dans ce cas, $\mu_z < 0$, le champ magnétique de l'aimant n'a pas changé ($\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}z < 0$), ce qui produit une force dont la composante z est $F_z > 0$. La force magnétique est vers le haut, c'est-à-dire qu'elle est répulsive. On peut dire cette fois que le pôle nord de la boucle est près du pôle nord du barreau aimanté (*voir la figure 9.31b*).

En résumé, pour un dipôle magnétique ayant un moment dipolaire $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ parallèle au champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, on peut énoncer ce qui suit.

- Lorsque $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ a le même sens que $\vec{\mathbf{B}}$, la force est orientée vers la région où le module du champ magnétique augmente.
- Lorsque $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ est de sens opposé à $\vec{\mathbf{B}}$, la force est orientée vers la région où le module de $\vec{\mathbf{B}}$ diminue.
- La force est nulle dans le cas d'un champ magnétique uniforme.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.4

La figure suivante montre une vue de face d'une boucle de courant rectangulaire placée à côté d'un barreau aimanté. Dans quel sens est la force magnétique exercée sur la boucle de courant ?



9.7 Le magnétisme des atomes

Le mouvement orbital des électrons

Les champs magnétiques étudiés jusqu'à présent sont des champs macroscopiques, produits par des fils parcourus par des courants ou des aimants permanents. Le magnétisme est aussi important au niveau de l'atome, étant donné que les électrons sont des particules chargées en mouvement. Bien que l'étude approfondie de ce sujet dépasse le niveau de cet ouvrage, il est quand même possible de comprendre certains résultats intéressants.

On commence d'abord par modéliser un atome à l'aide d'un électron qui tourne sur une orbite circulaire, de rayon r autour d'un noyau positif (*voir la figure 9.32*). Ceci est équivalent à une boucle de courant, qui se comporte comme un dipôle magnétique. Le moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ d'une boucle de courant est donné par l'équation 8.17 :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = i\vec{\mathbf{A}} \, .$$

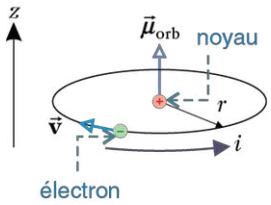


FIGURE 9.32
Le modèle de la boucle de courant pour l'électron

À la figure 9.32, l'électron tourne en sens horaire, ce qui est équivalent à un courant en sens antihoraire, car la charge de l'électron est négative. Le *moment magnétique orbital* $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{orb}$ dû au mouvement orbital de l'électron est donc orienté vers le haut, c'est-à-dire selon l'axe des z. On peut considérer l'électron en mouvement comme une boucle à une spire. Le courant dans la boucle est obtenu à partir de la période T du mouvement circulaire de l'électron ($T = 2\pi r/v$) :

$$i = \frac{|q|}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} \, .$$

Donc, dans ce modèle, le moment magnétique orbital de l'électron est

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_{orb} = iA\vec{\boldsymbol{k}} = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2)\vec{\boldsymbol{k}} = \frac{evr}{2}\vec{\boldsymbol{k}} \, . \qquad (9.28)$$

Nous avons vu à la section 12.6 du tome 1 que le moment cinétique de l'électron est une quantité importante dans l'atome. Pour l'électron qui tourne autour d'un noyau, le moment cinétique est donné par l'équation 12.21 du tome 1 :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m\,(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}})\,, \tag{9.29}$$

où $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ est la quantité de mouvement de l'électron et $\vec{\mathbf{r}}$, le vecteur rayon de l'orbite. Pour une orbite circulaire, les vecteurs $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\mathbf{p}}$ sont perpendiculaires. De plus, selon la règle de la main droite pour le produit vectoriel, $\vec{\mathbf{L}}$ est orienté à l'opposé de l'axe des z, dans le cas de l'électron illustré à figure 9.32. On obtient

$$\vec{\mathbf{L}} = -mrv\,\sin(90°)\,\vec{\boldsymbol{k}}\,. \tag{9.30}$$

La figure 9.33 montre les vecteurs $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{orb}}$ et $\vec{\mathbf{L}}$ pour l'électron tournant sur une orbite circulaire. On remarque que les deux vecteurs sont opposés. Ceci est la conséquence de la charge négative de l'électron. En comparant les équations 9.28 et 9.30, on exprime le moment magnétique orbital de l'électron en fonction de son moment cinétique :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}}\,. \tag{9.31}$$

Le modèle utilisé est un *modèle classique* qui suppose que l'électron se déplace sur une orbite bien déterminée. La réalité est plus complexe : l'électron se comporte à la fois comme une particule et comme une onde. L'électron n'est pas une petite sphère, mais il forme un nuage électronique qu'on appelle une *orbitale*. On doit utiliser la *mécanique quantique* pour analyser le mouvement des électrons dans l'atome. Ce sujet sera traité dans le tome 3.

Pour l'instant, on peut améliorer le modèle de la boucle de courant en considérant un résultat de la mécanique quantique : le moment cinétique de l'électron dans l'atome est quantifié. Comme nous l'avons vu à la section 12.6 du tome 1, le module du moment cinétique de l'électron dans l'atome est donné par :

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\;\hbar\;, \tag{9.32}$$

où ℓ est le nombre quantique orbital (qui correspond aux orbitales que vous avez utilisées dans les cours de chimie, voir le tableau 9.2), et $\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck réduite. Selon la mécanique quantique, on ne peut pas mesurer complètement le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$: on peut mesurer son module et sa composante selon un axe, comme l'axe des z. La composante z du moment cinétique est aussi quantifiée :

$$L_z = m_\ell \hbar\;, \tag{9.33}$$

où m_ℓ est un entier ($-\ell \leq m_\ell \leq \ell$), appelé le *nombre quantique magnétique*.

En combinant l'équation 9.31 et l'équation 9.33, on trouve qu'un électron dans un atome se comporte comme un dipôle magnétique, avec un moment magnétique ayant une composante z qui dépend du nombre quantique magnétique :

$$\mu_{\text{orb},z} = -\frac{e}{2m}L_z = -m_\ell \frac{e\hbar}{2m} = -m_\ell \mu_{\text{B}}\,. \tag{9.34}$$

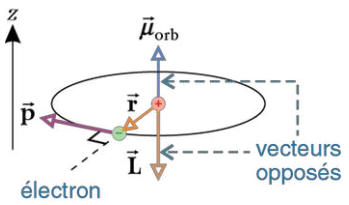


FIGURE 9.33
Les vecteurs $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ et $\vec{\mathbf{L}}$ dans le modèle de la boucle de courant

TABLEAU 9.2
Le nombre quantique orbital associé aux orbitales

orbitale	ℓ
s	0
p	1
d	2
f	3
g	4
⋮	⋮

La constante $\mu_B = e\hbar/(2m) = 9{,}27 \times 10^{-24}$ A · m^2 est appelée le *magnéton de Bohr*, d'après le physicien danois Niels Bohr (1885-1962) qui a élaboré le premier modèle quantique de l'atome d'hydrogène. Cette constante est aussi présentée dans l'annexe B. L'équation 9.34 montre que la composante z du moment magnétique est quantifiée.

Le spin de l'électron

L'électron, tout comme les autres particules subatomiques, possède un moment cinétique intrinsèque, qu'on appelle le *spin* $\vec{\mathbf{S}}$. Ce dernier engendre un moment magnétique intrinsèque $\vec{\boldsymbol{\mu}}_s$. Le spin est une propriété quantique, qui ne peut pas être expliquée à partir de la mécanique classique. Par exemple, on ne peut pas dire que l'électron tourne sur lui-même et que le spin correspond au moment cinétique de rotation. En effet, selon les connaissances actuelles, l'électron est une particule ponctuelle. On doit considérer le spin et le moment magnétique intrinsèque comme une propriété de l'électron, comme sa masse et sa charge.

L'électron est une particule de spin $s = 1/2$, car son vecteur spin a un module :

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \sqrt{3/4}\,\hbar\,.$$

De plus, comme le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$, le spin a une composante S_z qui est quantifiée :

$$S_z = m_s\hbar\ .$$

Pour l'électron, m_s peut prendre les valeurs $m_s = +\dfrac{1}{2}$ (aussi désigné ↑) et $m_s = -\dfrac{1}{2}$ (aussi désigné ↓).

Une particule chargée ayant un spin est un dipôle magnétique de façon intrinsèque. Le moment magnétique intrinsèque $\vec{\boldsymbol{\mu}}_s$, pour une particule dont la charge est q et la masse est m, est relié au spin par l'expression :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_s = g\frac{|q|}{2m}\vec{\mathbf{S}}\,, \tag{9.35}$$

où g est un nombre sans unité qu'on appelle simplement le *facteur g* de la particule. Une valeur positive de g (comme pour le proton) indique que le moment magnétique intrinsèque a le même sens que le spin, alors qu'une valeur négative de g (comme pour l'électron ou le neutron) indique que le moment magnétique intrinsèque est de sens opposé au spin. Ce facteur a été mesuré et calculé très précisément pour l'électron. Il s'agit de l'une des mesures les plus précises définies jusqu'à maintenant :

$$g_e = -2{,}002\,319\,304\,361\,53 \pm 0{,}000\,000\,000\,000\,53\,.$$

La composante z du moment magnétique intrinsèque de l'électron est

$$\mu_{s,z} = g_e m_s\frac{e\hbar}{2m} = \pm\frac{1}{2}g_e\mu_B \approx \mp\mu_B\ . \tag{9.36}$$

Comme le facteur g de l'électron est très près de –2, le moment magnétique intrinsèque de l'électron est presque égal au magnéton de Bohr. On peut considérer le magnéton de Bohr comme une bonne approximation de la valeur absolue de la composante z du moment magnétique intrinsèque de l'électron.

Pour un électron dans un atome, on doit combiner l'effet orbital et l'effet de spin afin d'obtenir le moment magnétique résultant. Pour un atome ayant plusieurs

électrons, le moment magnétique résultant est la somme vectorielle des moments magnétiques de chaque électron (les protons ont des moments magnétiques beaucoup plus faibles que les électrons à cause de leur plus grande masse). Ces moments magnétiques ont tendance à s'annuler. Le moment magnétique de l'atome est souvent le résultat du moment magnétique d'un seul électron de valence. Nous verrons à la section 9.8 que les propriétés magnétiques des objets, y compris les aimants permanents, sont causées par le moment magnétique des électrons.

Un atome dans un champ magnétique

Un atome possède un moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, causé par le mouvement orbital et le spin des électrons. Supposons qu'un atome est placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}} = B_z\vec{\boldsymbol{k}}$. Selon le résultat obtenu à la section 9.6, le champ magnétique exerce un moment de force qui tend à aligner le moment magnétique dans le même sens que le champ magnétique. L'énergie de l'atome sera modifiée selon l'orientation du moment magnétique par rapport au champ magnétique. Selon l'équation 9.24, l'énergie potentielle est

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -\mu_z B_z \,.$$

Pour une particule négative comme l'électron, l'énergie potentielle est minimale lorsque le moment cinétique est opposé au champ magnétique, ce qui produit un moment magnétique dans le même sens que le champ magnétique.

Comme le moment magnétique est quantifié, l'énergie potentielle de l'atome sera quantifiée. En utilisant les équations 9.34 et 9.36, on trouve que l'énergie potentielle magnétique dépend des nombres quantiques magnétiques ou de spin :

$$U_{\text{orb}} = -\mu_{\text{orb},z} B_z = -m_\ell \mu_\text{B} B_z \tag{9.37}$$

$$U_{\text{spin}} = -\mu_{\text{s},z} B_z = -2m_s \mu_\text{B} B_z = \mp \mu_\text{B} B_z \,. \tag{9.38}$$

L'équation 9.38 indique que dans le cas d'un électron sans mouvement orbital, il y a deux valeurs possibles de l'énergie potentielle, selon les deux états possibles de la composante du spin.

Nous reparlerons des propriétés magnétiques des atomes dans le tome 3. Nous verrons entre autres que ces effets magnétiques associés au spin sont à la base de l'imagerie par résonance magnétique.

REMARQUE

Le signe négatif dans les équations 9.37 et 9.38 est présent, car la charge de l'électron est négative. Pour une particule positive, comme le proton, le signe négatif est remplacé par un signe positif.

EXEMPLE 9.9 Un basculement du spin

Un atome est placé dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}800\ \text{T}\,\vec{\boldsymbol{k}}$. Dans le cas d'un électron pour lequel $\ell = 0$ et le spin est opposé au champ magnétique, quel est le travail nécessaire afin d'inverser le spin de l'électron, de sorte qu'il soit dans le même sens que le champ magnétique ? Exprimez votre réponse en électron-volts.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.34 montre la situation initiale et la situation finale. Le moment magnétique est opposé au spin, car l'électron a une charge négative.

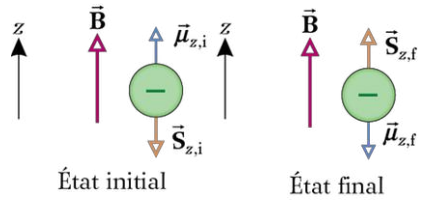


FIGURE 9.34
Le schéma de la situation pour l'exemple 9.9

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$B_z = 0{,}800\ \text{T}$	$\ell = 0$	W
$m_{s,i} = -\frac{1}{2}$	$m_{s,f} = \frac{1}{2}$	
$\mu_B = 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$		

Identifier la clé

La **clé** est le principe de conservation de l'énergie ; le travail correspond à la variation de l'énergie potentielle :

$$W = U_f - U_i \ , \qquad \text{(i)}$$

où U est l'énergie potentielle magnétique associée au spin, donnée par l'équation 9.38 :

$$U_{\text{spin}} = -2m_s\mu_B B_z \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (i) :

$$\begin{aligned} W &= (-2m_{s,f}\ \mu_B B_z) - (-2m_{s,i}\ \mu_B B_z) \\ &= -2\mu_B B_z\ (m_{s,f} - m_{s,i}) \ . \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons ensuite les valeurs :

$$\begin{aligned} W &= -2 \times 9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 \times 0{,}800\ \text{T} \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1{,}48 \times 10^{-23}\ \text{J} \ . \end{aligned}$$

Il reste à convertir les joules en électron-volts. Nous utilisons le facteur de conversion donné à l'équation 4.13 de la page 127, et à l'annexe B :

$$\begin{aligned} W &= 1{,}48 \times 10^{-23}\ \text{J} \times \frac{1\ \text{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J}} \\ &= 9{,}26 \times 10^{-5}\ \text{eV} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le travail est positif, car il faut fournir de l'énergie pour briser l'alignement du moment magnétique sur le champ magnétique. Cette énergie est emmagasinée sous forme d'énergie potentielle magnétique.

9.8 Les propriétés magnétiques des matériaux

Nous avons vu à la section 9.7 que les électrons dans les atomes produisent un champ magnétique. Les électrons ont un moment magnétique intrinsèque, lié à leur spin, et ils ont un moment magnétique orbital selon leur mouvement dans l'atome. À l'intérieur d'un atome à plusieurs électrons, les moments magnétiques des électrons tendent à s'annuler, de telle sorte que le moment magnétique de l'atome est soit nul, soit produit uniquement par quelques électrons. En effet, les électrons ont tendance à former des paires de spins opposés, ce qui produit un moment magnétique nul. Dans le cas d'atomes ayant un nombre impair d'électrons, il y a au moins un électron seul et l'atome aura un moment magnétique.

Lorsque les atomes se combinent dans un réseau cristallin, l'interaction entre les atomes produit un moment magnétique résultant pour l'objet entier. Lorsqu'on place l'objet dans un champ magnétique extérieur, on observe principalement trois comportements, selon le moment magnétique des atomes et l'interaction entre ces moments magnétiques.

Le paramagnétisme

Un matériau *paramagnétique* est constitué d'atomes dont les moments magnétiques des électrons ne s'annulent pas entre eux. Les atomes ont un moment magnétique permanent. En l'absence de champ magnétique extérieur, l'orientation des moments magnétiques atomiques est aléatoire, ce qui produit un moment magnétique nul pour l'objet entier. Si on place un objet paramagnétique dans un champ extérieur, ce dernier produit un moment de force sur les moments magnétiques atomiques, qui tend à les aligner sur le champ. L'alignement n'est pas parfait, car l'agitation thermique provoque des collisions entre les atomes. L'effet est donc faible.

Le moment magnétique résultant de l'objet est faible, et il est orienté dans le même sens que le champ magnétique extérieur. Comme nous l'avons vu à la section 9.6, l'objet va subir une force orientée vers la région où le module du champ est plus intense.

Le tungstène, le césium et l'aluminium sont des éléments qui sont paramagnétiques. La figure 9.35 montre de l'oxygène liquide qui est attiré par les pôles d'un aimant puissant, puisque l'oxygène est paramagnétique.

FIGURE 9.35
L'oxygène liquide est attiré par le champ magnétique d'un aimant, et forme un pont entre les pôles.

Le ferromagnétisme

Dans un objet composé d'une substance *ferromagnétique*, les effets magnétiques sont intenses. Le fer, le nickel, le cobalt, le gadolinium et les alliages composés de ces éléments sont des matériaux ferromagnétiques. Les atomes de ces éléments ont un moment magnétique permanent. De plus, un effet quantique, appelé l'*interaction d'échange*, tend à aligner les moments magnétiques des atomes adjacents. Le résultat est un très grand alignement des moments dipolaires magnétiques, malgré l'agitation thermique et en l'absence d'un champ magnétique extérieur.

Un clou de fer ne se comporte pas comme un aimant permanent lorsqu'il est isolé. Les moments dipolaires magnétiques alignés forment des *domaines magnétiques*, des régions où tous les moments dipolaires magnétiques sont alignés (*voir la figure 9.36*). En l'absence de champ magnétique extérieur, les domaines sont alignés de façon aléatoire, et le clou n'attire pas d'autres clous. Si on place le clou dans un champ magnétique, par exemple en l'approchant d'un aimant, les domaines alignés dans le même sens vont augmenter de grandeur, et le clou acquiert un moment magnétique, dans le même sens que le champ extérieur. On dit qu'il est devenu *aimanté*. Il y a alors une attraction entre le clou et l'aimant, car le moment magnétique du clou est dans le même sens que le champ magnétique extérieur. Lorsqu'on enlève le champ magnétique extérieur, le fer perd son aimantation ; on dit qu'il est un matériau *magnétique doux*. Le fer est utilisé pour des applications tels les transformateurs, qui nécessitent des changements rapides de l'aimantation.

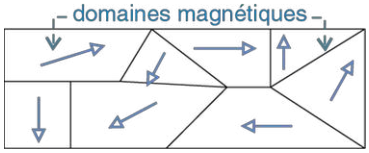


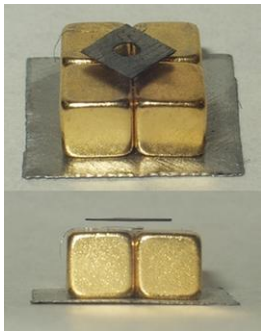
FIGURE 9.36
Les domaines magnétiques dans un matériau ferromagnétique. Le moment magnétique est nul.

Pour obtenir un aimant permanent, il faut que les domaines soient alignés de telle sorte que l'objet ait un moment magnétique non nul. Ceci se présente dans des matériaux *magnétiques durs*. C'est le cas pour certains oxydes de fer, comme le Fe_2O_3. On fabrique aussi des aimants permanents puissants à partir d'un alliage de néodyme-fer-bore. Ces aimants sont utilisés pour plusieurs applications modernes ayant besoin d'aimants compacts et puissants, par exemple dans les disques durs, les écouteurs et les moteurs d'appareils sans fil.

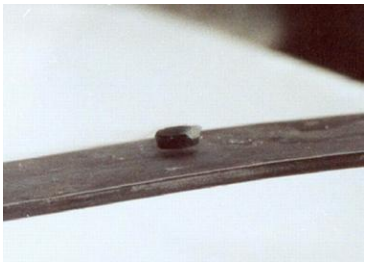
TABLEAU 9.3

La température de Curie pour certains matériaux ferromagnétiques

Matériau	T_C (°C)
Fer	770
Cobalt	1 115
Nickel	354
Gadolilium	19
Fe_2O_3	575
$Nd_2Fe_{14}B$	300



(a)



(b)

FIGURE 9.37

Deux exemples de lévitation magnétique : (a) un morceau de graphite diamagnétique flotte au-dessus d'aimants ; (b) un petit aimant flotte au-dessus d'un supraconducteur.

Lorsque la température atteint un seuil critique, appelé la *température de Curie*, le matériau perd ses propriétés ferromagnétiques et devient un matériau paramagnétique. À partir de cette température, l'agitation thermique devient plus intense que l'interaction d'échange. Le tableau 9.3 présente la température de Curie pour quelques matériaux ferromagnétiques.

Le diamagnétisme

Certains éléments, comme le bismuth, le plomb et le cuivre, ont des atomes qui n'ont pas de moment magnétique permanent. Lorsqu'on place ces matériaux dans un champ magnétique extérieur, ils acquièrent un très faible moment magnétique opposé au champ magnétique extérieur. Nous verrons au chapitre 10 un modèle simple qui permet d'expliquer ce phénomène.

Comme le moment magnétique est opposé au champ magnétique, un objet constitué d'un matériau diamagnétique subit une force orientée vers la région où le champ est moins intense, donc il subit une répulsion par les pôles d'un aimant. La figure 9.37a montre un morceau de graphite qui flotte au-dessus de quatre aimants de néodyme.

Le diamagnétisme se retrouve dans tous les matériaux, mais son effet est beaucoup plus faible que les effets paramagnétiques et ferromagnétiques. Pour cette raison, on l'observe seulement dans les matériaux qui ne sont ni paramagnétiques ni ferromagnétiques.

Nous avons vu au chapitre 6 que certains matériaux deviennent supraconducteurs lorsque la température est plus basse qu'une température critique. Lorsqu'on place un supraconducteur dans un champ magnétique, le supraconducteur se comporte comme un matériau diamagnétique parfait. De la même façon que le champ électrique ne pénètre pas dans un conducteur, le champ magnétique ne pénètre pas dans un supraconducteur. C'est l'*effet Messner*. La figure 9.37b montre un petit aimant qui flotte au-dessus d'un supraconducteur.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.5

La figure suivante montre un aimant et deux objets paramagnétiques ou diamagnétiques avec l'orientation de la force magnétique. Quel objet est diamagnétique ?

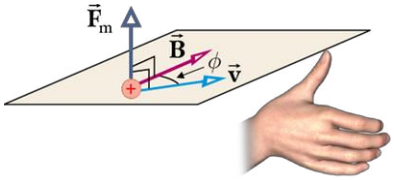
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la force magnétique exercée par le champ magnétique sur les particules chargées en mouvement et sur les conducteurs parcourus par un courant.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Une **particule chargée** subit une force magnétique lorsqu'elle se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\vec{\mathbf{F}}_m = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} .$$



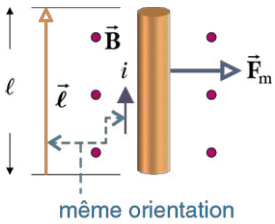
- Une **particule chargée** qui se déplace dans une région où il y a un champ électrique et un champ magnétique subit une force de Lorentz :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} .$$

- Un **fil parcouru par un courant *i***, qui se trouve dans un champ magnétique, subit une force magnétique :

$$\vec{\mathbf{F}}_m = i\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}} ,$$

où $\vec{\ell}$ est dans le même sens que le courant.



- Un **dipôle magnétique** subit un moment de force lorsqu'il est dans un champ uniforme :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}} .$$

Le moment de force tend à aligner $\vec{\mu}$ sur le champ $\vec{\mathbf{B}}$.

- L'**énergie potentielle** associée à un dipôle est

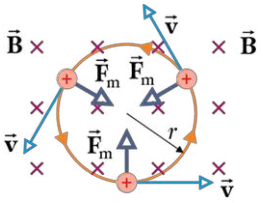
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}} .$$

LES RÉSULTATS

Le mouvement d'une particule chargée

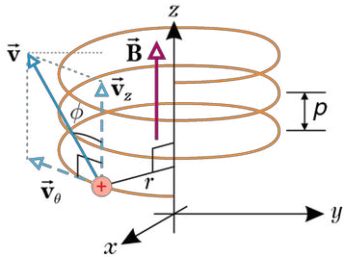
- Lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont perpendiculaires, la charge décrit un mouvement circulaire.

$$r = \frac{mv}{|q|B} \qquad f = \frac{|q|B}{2\pi m}$$



- Lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$, la particule décrit un mouvement hélicoïdal.

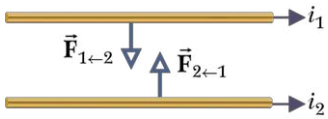
$$r = \frac{mv \sin\phi}{|q|B} \qquad p = \frac{v\cos\phi}{f}$$



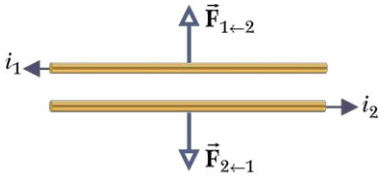
- Les **fils parallèles** exercent l'un sur l'autre une force magnétique dont le module est

$$F_{1\leftarrow 2} = F_{2\leftarrow 1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2\pi r} .$$

– La force est attractive pour des courants orientés dans le même sens.

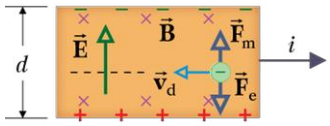


– La force est répulsive pour des courants orientés en sens opposés.



- Lorsque des électrons de conduction se déplacent dans un conducteur qui se trouve dans un champ magnétique, on mesure une différence de potentiel ΔV_H perpendiculairement à $\vec{\mathbf{B}}$ et au sens du courant. C'est l'**effet Hall**.

$$\Delta V_H = \frac{E}{d} \qquad v_d = \frac{E}{B}$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 9.1 La force magnétique sur une charge en mouvement

Q1 Classez les situations suivantes par ordre croissant du module de la force magnétique exercée sur les particules. Le module de la vitesse et le module du champ magnétique sont les mêmes dans chaque situation.

(i) Un électron se déplace sur l'axe des x dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des x.

(ii) Un électron se déplace sur l'axe des x dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le sens opposé de l'axe des y.

(iii) Un proton se déplace sur l'axe des x dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des y.

(iv) Un proton se déplace sur l'axe des y dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le sens opposé de l'axe des y.

(v) Une particule alpha (charge $+2e$) se déplace sur l'axe des x dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des y.

Q2 La figure 9.38 montre une vue en plongée pour trois situations où une particule chargée subit une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}$ causée par un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. Indiquez si l'orientation de la force magnétique est correcte.

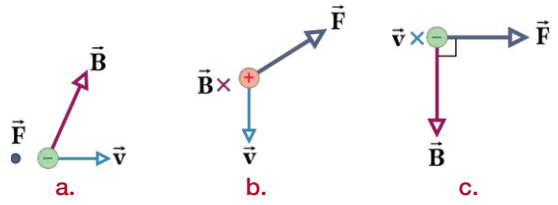


FIGURE 9.38 • Question 2

Q3 La figure 9.39 montre une région où il y a un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ perpendiculaire à la feuille. Deux particules chargées se déplacent dans cette région. Indiquez le signe de la charge de chaque particule.

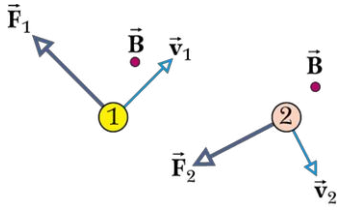


FIGURE 9.39 • Question 3

E4 Une particule alpha, dont la charge est de $2e$, se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 6{,}23 \times 10^5 \vec{k}$ m/s dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = (4{,}35\vec{\imath} - 9{,}18\vec{\jmath})$ mT. Quelle est la force magnétique exercée sur cette particule ?

E5 La vitesse d'un électron se déplaçant dans un champ magnétique, uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ est $\vec{\mathbf{v}} = (4{,}0\vec{\imath} + 7{,}1\vec{\jmath}) \times 10^5$ m/s. L'électron est soumis à une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_m = (-2{,}61\vec{\imath} + 1{,}47\vec{\jmath}) \times 10^{-13}$ N. Déterminez le champ magnétique si sa composante x est nulle.

E6 Un proton se déplace à une vitesse de $2{,}96 \times 10^6$ m/s, orientée directement vers le bas dans une région où il y a un champ magnétique de 4,50 mT orienté à 20,0° à l'est du sud.

a. Quelle est la force magnétique ?

b. Quelle est l'accélération subie par le proton ?

E7 Un faisceau est formé d'électrons qui ont une énergie de 40,0 keV et qui se déplacent à 30° au sud de l'est. Le faisceau traverse une région où le champ magnétique est de 0,128 T, orienté à 20,0° à l'est du nord.

a. Quel est le module de la vitesse des électrons ?

b. Quelle est l'accélération subie par les électrons ?

P8 Une particule alpha (de charge $2e$) se déplace à une distance de 45,0 cm au-dessus d'un très long fil de cuivre rectiligne. Un courant de 7,50 kA circule vers l'est dans le fil. La particule alpha subit une force de $6{,}65 \times 10^{-16}$ N vers le haut.

a. Quel est le module de la vitesse de la particule alpha ?

b. Dans quel sens se déplace la particule alpha ?

P9 Un proton se déplaçant à vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 3{,}00 \times 10^6 \text{ m/s}\,\vec{k}$ passe par le point A, près d'un très long fil parcouru par un courant i continu (*voir la figure 9.40*). Le courant dans le fil est de 2,00 A, et il circule dans le sens opposé à l'axe des x.

a. Quel est le champ magnétique généré par le fil au point A ?

b. Quelle est la force magnétique subie par le proton au point A ?

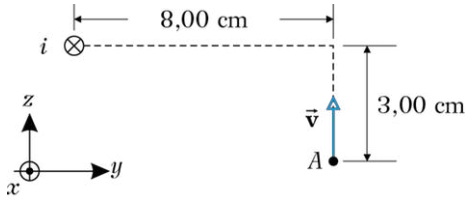


FIGURE 9.40 • Problème 9

Section 9.2 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Q10 La figure 9.41 montre un électron qui se déplace dans deux régions différentes où il y a un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse de l'électron.

a. Donnez le sens de chaque champ magnétique.

b. Dans quelle région le champ magnétique est-il le plus intense ?

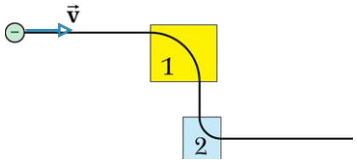


FIGURE 9.41 • Question 10

Q11 Des ions se déplacent dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à leur vitesse, comme le montre la figure 9.42. Les ions ont une charge $+e$ ou $-e$, et ils ont la même vitesse avant d'entrer dans le champ magnétique.

a. Quels sont les ions positifs ?

b. Classez les ions par ordre croissant de leur masse.

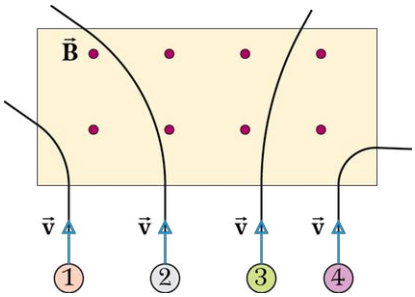


FIGURE 9.42 • Question 11

E12 Un électron de 850 eV est en rotation dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique uniforme. Le rayon de son orbite est de 20,0 cm. Quel est le module du champ magnétique dans lequel l'électron se trouve ?

E13 Un proton dont l'énergie cinétique est de 12,5 keV est en rotation dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique uniforme. Le rayon de son orbite est de 7,20 cm.

a. Quelle est la période du mouvement de ce proton ?

b. Quel est le module de la force magnétique qui s'exerce sur ce proton ?

c. Quel est le module du champ magnétique ?

E14 Un tube à vide est placé dans une région où il y a un champ magnétique uniforme de 1,0 mT. On désire qu'un faisceau d'électrons y décrive une trajectoire circulaire de 5,0 cm de rayon, perpendiculaire au champ.

a. Quel module de vitesse doit-on donner aux électrons ?

b. À la place d'une trajectoire perpendiculaire, supposez que la vitesse est à 30° par rapport au champ magnétique. Déterminez le module de la vitesse qui permet d'obtenir une hélice ayant un rayon de 5,0 cm.

E15 Le tube à rayons cathodiques d'un vieux téléviseur contient un faisceau d'électrons dont l'énergie cinétique est de 12 keV qui se déplace sur un plan horizontal, du sud vers le nord. À cet endroit, le champ magnétique terrestre a une composante verticale de $5{,}50 \times 10^{-4}$ T, orientée vers le bas.

a. Dans quel sens le faisceau d'électrons est-il dévié ?

b. Quel est le module de l'accélération des électrons ?

c. Quel est le rayon de la trajectoire ?

P16 Le positron est l'antiparticule associée à l'électron ; il a la même masse que l'électron et une charge électrique opposée. Un positron ayant une énergie cinétique de 2,50 keV est lancé dans un champ magnétique uniforme de 0,150 T et selon une vitesse formant un angle de 75,0° par rapport au champ magnétique.

a. Quelle est la période de révolution du positron ?

b. Quel est le pas de l'hélice ?

c. Quel est le rayon de l'hélice ?

P17 Un dispositif servant au traitement des tumeurs cancéreuses est équipé d'un électro-aimant générant un champ magnétique uniforme de 0,030 T pour faire dévier de 90,0° des particules alpha utilisées dans les traitements. La masse d'une particule alpha est de 4,00 u et sa charge, de $2e$. Quelle est la durée de la déviation ? La vitesse des particules est perpendiculaire au champ magnétique.

P18 Un proton se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = (1{,}5\vec{\imath} + 2{,}4\vec{\jmath} - 0{,}70\vec{k}) \times 10^5$ m/s dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = (7{,}5\vec{\imath} - 2{,}5\vec{\jmath} - 7{,}3\vec{k})$ mT.

a. Quel est l'angle entre la vitesse du proton et le champ magnétique ?

b. Quel est le pas de l'hélice ?

c. Quel est le rayon de l'hélice ?

Section 9.3 Quelques applications liées à la force magnétique

Q19 Déterminez l'orientation du champ magnétique pour les situations suivantes dans lesquelles les particules se déplacent en ligne droite à l'intérieur d'un sélecteur de vitesse.

a. Le champ électrique est $\vec{\mathbf{E}} = E\vec{\jmath}$, et un électron se déplace avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\imath}$.

b. Le champ électrique est $\vec{\mathbf{E}} = E\vec{k}$, et un proton se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{i}$.

c. Le champ électrique est $\vec{\mathbf{E}} = -E\vec{k}$, et un électron se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = -v\vec{j}$.

Q20 Une particule chargée positivement se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans une région où il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, comme le montre la figure 9.43. Quelle sera la trajectoire de la particule dans les situations suivantes ?

a. $v = E/B$

b. $v > E/B$

c. $v < E/B$

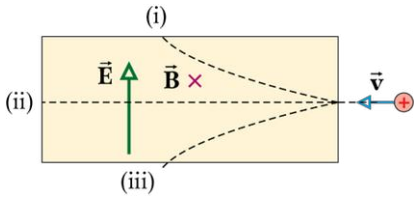


FIGURE 9.43 • Question 20

E21 Un faisceau d'électrons entre dans un sélecteur de vitesse dont les plaques, séparées de 34,0 mm, sont soumises à une différence de potentiel de 120 V. Les plaques sont placées dans un champ magnétique de 6,70 mT. Quel est le module de la vitesse des électrons qui se déplacent en ligne droite ?

E22 Un cyclotron est utilisé pour accélérer des protons à l'aide d'un champ magnétique de 0,14 T. Les dés du cyclotron ont un rayon de 0,25 m.

a. Quelle est la fréquence à laquelle on doit faire osciller la différence de potentiel appliquée aux dés ?

b. Quel est le module de la vitesse des protons à la sortie du cyclotron ?

P23 Dans un spectromètre de masse, un ion de masse M et de charge $+q$ est accéléré sous une différence de potentiel ΔV. L'ion entre dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ perpendiculaire à sa vitesse. La particule se déplace alors sur un demi-cercle et frappe un détecteur à une distance x de son point d'entrée (*voir la figure 9.44*). Montrez que la relation entre la masse de la particule et la distance x est donnée par :

$$M = \frac{qB^2}{8\,\Delta V}x^2 .$$

P24 Dans une expérience de laboratoire, on obtient deux isotopes du soufre dont le premier est le ^{32}S, dont la masse est de 31,97 u. Un spectromètre est utilisé pour trouver la masse de l'autre isotope. Dans le spectromètre utilisé, les ions traversent d'abord un sélecteur de vitesse où le module du champ électrique est de $1{,}600 \times 10^5$ V/m et le module du champ magnétique est de 0,300 0 T. Les ions sont ensuite déviés dans une zone où est présent un champ magnétique de 0,700 0 T. En utilisant le spectromètre, on observe que l'isotope inconnu a frappé le détecteur d'ions 15,79 mm plus loin que l'isotope connu. Sachant que les isotopes sont ionisés deux fois ($q = -2e$), calculez la masse de l'isotope inconnu.

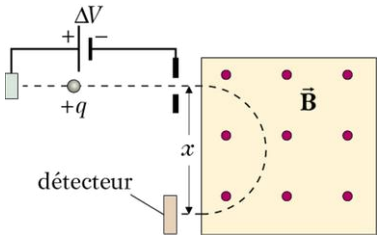
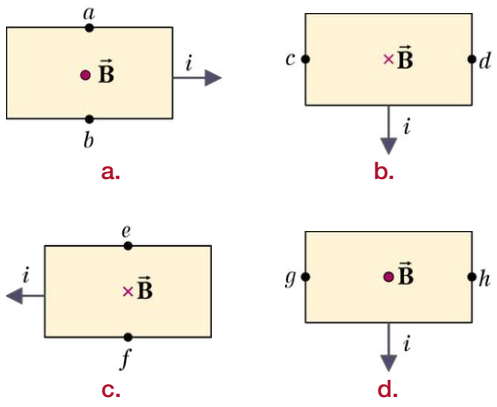


FIGURE 9.44 • Problème 23

Section 9.4 L'effet Hall

Q25 Un courant i circule dans une plaque de cuivre plongée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. Pour chacune des situations suivantes, indiquez le point qui est au potentiel le plus élevé (les porteurs de charge sont des électrons).



Q26 Une plaque de cuivre, dans laquelle circule un courant, est placée dans un champ magnétique uniforme, comme le montre la figure 9.45. Entre quels points doit-on brancher un voltmètre pour mesurer une différence de potentiel de Hall ?

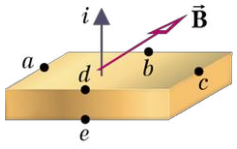


FIGURE 9.45 • Question 26

E27 Une sonde à effet Hall est utilisée pour mesurer un champ magnétique. La sonde consiste en une bande de cuivre ($n = 11 \times 10^{28}$ m^{-3}) ayant une épaisseur de 2,50 mm. Lorsqu'un courant de 2,50 A circule dans la bande, la différence de potentiel de Hall est de 43,4 nV. Quel est le module du champ magnétique ?

E28 Une tige conductrice est plongée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}760\ \text{T}\,\vec{\imath}$. La tige est faite d'argent ($n = 7{,}4 \times 10^{28}$ m^{-3}), et un courant de 5,00 A circule dans le même sens que l'axe des z (*voir la figure 9.46*).

a. Quelle est la différence de potentiel de Hall ?

b. Quelle est la vitesse de dérive des porteurs de charge ?

c. Quel est le module du champ électrique de Hall ?

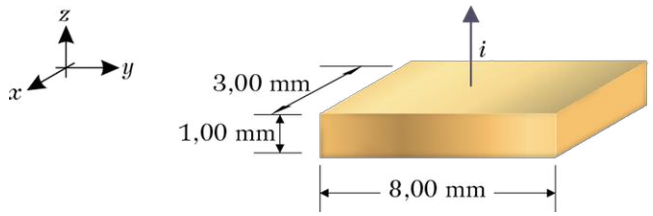


FIGURE 9.46 • Exercice 28

P29 Une tige conductrice dont la longueur est $L = 73{,}0$ mm, la largeur est $\ell = 6{,}4$ mm et l'épaisseur, $h = 3{,}60$ mm, se déplace à vitesse constante dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 3{,}40\ \text{mT}\,\vec{k}$ (*voir la figure 9.47*). Le champ magnétique est perpendiculaire au déplacement de la tige, et les porteurs de charge sont des électrons. Si une sonde à effet Hall mesure une différence de potentiel $V_b - V_a = 2{,}65 \times 10^{-5}$ V, quelle est la vitesse de la tige ?

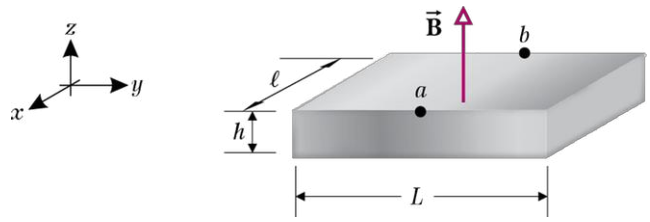


FIGURE 9.47 • Problème 29

P30 Pour étalonner un capteur à effet Hall, on le place dans une région où il y a un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Des électrons se déplacent à une vitesse dont le module est de $5{,}50 \times 10^6$ m/s, sur une trajectoire circulaire, dont le plan est perpendiculaire au champ magnétique. Lorsque le rayon de la trajectoire est de 3,50 mm, la différence de potentiel de Hall mesurée par le capteur est de 0,650 µV.

a. Quel est le module du champ magnétique ?

b. On place le même capteur dans un champ magnétique différent. La différence de potentiel de Hall obtenue est de 1,50 µV. Quel est le module du champ magnétique ?

Section 9.5 La force magnétique sur les fils

Q31 Un courant continu circule vers le haut dans un fil orienté verticalement. Un électron, situé à droite du fil, se déplace verticalement vers le bas. Quelle est l'orientation de la force magnétique exercée sur l'électron par le fil ?

Q32 La figure 9.48 montre deux très longs fils horizontaux. Le fil du haut est parcouru par un courant i orienté vers la droite. Quel est le sens du courant dans le fil du bas pour que la force gravitationnelle exercée sur le fil du bas soit équilibrée par la force magnétique ?

FIGURE 9.48 • Question 32

Q33 La figure 9.49 montre quatre situations où de très longs fils sont parcourus par un même courant i. Les fils sont équidistants. Classez les situations suivantes selon un ordre croissant (de la plus négative à la plus positive) de la composante horizontale de la force magnétique exercée sur le fil de gauche.

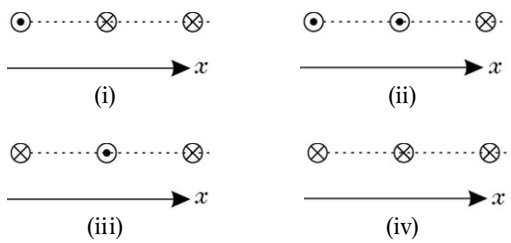


FIGURE 9.49 • Question 33

E34 Deux très longs fils rectilignes, parcourus par un courant de 2,50 A chacun, sont parallèles et séparés par une distance de 15,0 cm. Quel est le module de la force magnétique par unité de longueur exercée sur un fil par l'autre fil ?

E35 Deux fils, ayant chacun une longueur de 50,0 cm, sont parcourus par des courants identiques. Ils exercent l'un sur l'autre une force répulsive de $5{,}625 \times 10^{-4}$ N et sont séparés par une distance de 10,0 mm.

a. Quel est le courant dans chaque fil ?

b. Quelle est la relation entre les sens des courants ?

E36 La figure 9.50 montre un circuit dont une partie passe à travers un champ magnétique uniforme, sortant de la page, dont le module est de 0,350 T. Quelle est la force magnétique exercée sur le circuit ?

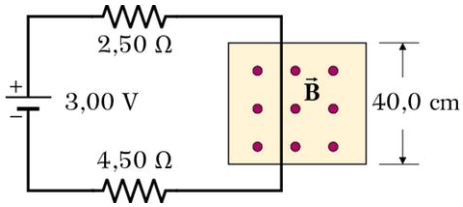


FIGURE 9.50 • Exercice 36

E37 Une balance de courant est un appareil formé de deux tiges métalliques parallèles dans lesquelles on fait passer un même courant, en sens opposé. La tige du bas est fixe, tandis que la tige du haut est mobile. Une masse est déposée sur la tige du haut pour garder les tiges en équilibre à une certaine distance l'une de l'autre. Pour une balance en particulier, la longueur des tiges est de 30,0 cm et celles-ci sont séparées par une distance de 6,00 mm. Calculez la masse qu'on doit déposer sur la tige du haut lorsqu'on fait circuler un courant de 10,0 A.

E38 Dans la figure 9.51, une tige conductrice est attachée à un ressort ayant une constante de rappel de 30,0 N/m. La tige a une longueur de 2,50 m, et elle se trouve dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à la tige. Un courant de 7,90 A circule dans la tige. Quel est le champ magnétique si le ressort est comprimé de 2,00 cm et que la tige est à l'équilibre ?

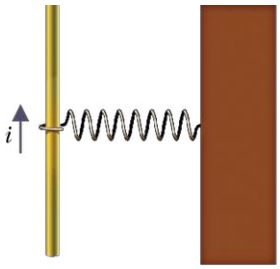


FIGURE 9.51 • Exercice 38

P39 Un conducteur de 80,0 cm de longueur forme un angle de 30,0° par rapport à l'axe des x. Il est parcouru par un courant de 3,50 A (*voir la figure 9.52*). Dans cette région, un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = (2{,}50\vec{\imath} - 7{,}00\vec{\jmath} + 1{,}80\vec{k})$ mT est présent. Quelle est la force magnétique exercée sur le fil ?

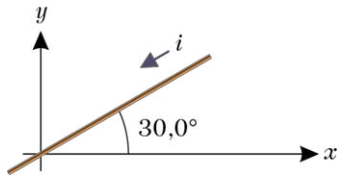


FIGURE 9.52 • Problème 39

P40 Deux longs fils conducteurs parallèles sont placés aux sommets d'un triangle équilatéral, où L = 50,0 cm de côté (*voir la figure 9.53*). On place un troisième fil à l'autre sommet. Le courant i_1 est de 5,00 A, le courant i_2 est de 7,00 A et le courant i_3, de 9,00 A. Quelle est la force magnétique exercée sur le troisième conducteur si sa longueur est de 1,20 m ?

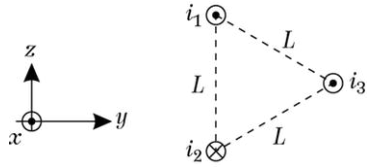


FIGURE 9.53 • Problème 40

P41 Une boucle rectangulaire, dans laquelle circule un courant i_1, est placée près d'un très long fil rectiligne, parcouru par un courant i_2 (*voir la figure 9.54*). Calculez la force résultante exercée sur la boucle par le fil.

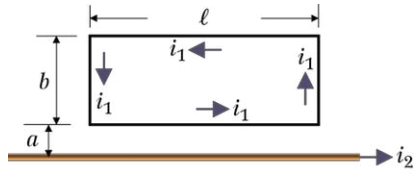


FIGURE 9.54 • Problème 41

P42 Un fil rectiligne ayant une masse de 0,483 g et une longueur de 65,0 cm est placé sur un plan incliné de 12,0° (*voir la figure 9.55*). Un courant de 4,20 A circule dans le fil, dans le même sens que l'axe des x. Un champ magnétique, perpendiculaire au fil, produit une force magnétique horizontale. Calculez le champ magnétique en supposant que le fil est à l'équilibre.

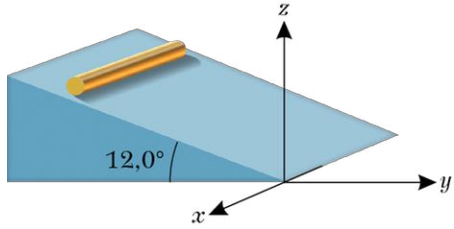


FIGURE 9.55 • Problème 42

Section 9.6 Les dipôles magnétiques dans un champ magnétique

Q43 La figure 9.56 illustre deux situations où une bobine est placée dans un champ magnétique. Initialement, le plan des bobines est horizontal, et ces dernières sont immobiles. Les champs magnétiques ont une composante verticale et une composante horizontale. Les bobines sont libres de tourner.

a. Pour chaque situation, indiquez dans quel sens va tourner la bobine.

b. Dans chaque situation, quelle est la variation de l'énergie potentielle du système lorsque la bobine se met à tourner ?

FIGURE 9.56 • Question 43

E44 Un cadre carré, de 10,0 cm de côté, est parcouru par un courant de 2,0 A. Le plan du cadre forme un angle $\theta = 50°$ par rapport à l'axe des x, comme le montre la figure 9.57. Le cadre est dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 1{,}0\ \text{T}\,\vec{\boldsymbol{j}}$.

a. Dessinez l'orientation des forces sur chacun des quatre côtés du cadre.

b. Quelle est la force magnétique agissant sur chacun des côtés du cadre ?

c. Dans quel sens les forces peuvent-elles faire tourner le cadre ?

d. Quel est le module du moment de force exercé sur le cadre ?

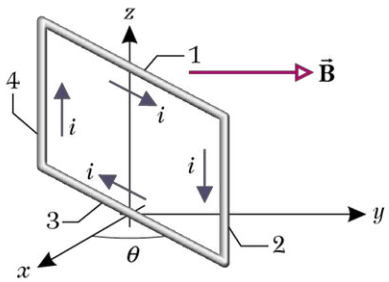


FIGURE 9.57 • Exercice 44

E45 La bobine carrée illustrée à la figure 9.58, dont les côtés ont 20 cm de longueur, comporte 5,0 spires. Elle est parcourue par un courant de 2,0 A, et elle forme un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'axe des x. La bobine est dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}50\ \text{T}\,\vec{\boldsymbol{j}}$.

a. Quel le moment magnétique du cadre ?

b. Quel est le moment de force exercé sur le cadre ?

c. Dans quel sens va tourner le cadre si celui-ci est libre de pivoter ?

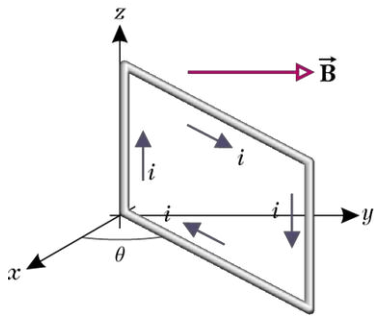


FIGURE 9.58 • Exercices 45 et 46

E46 La bobine carrée illustrée à la figure 9.58, dont les côtés ont 20 cm de longueur, comporte 5,0 spires. Elle est parcourue par un courant de 2,0 A, et elle est libre de pivoter. Initialement, elle forme un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'axe des x, et elle est immobile. La bobine est dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}50\ \text{T}\,\vec{\boldsymbol{j}}$. Quelle est l'énergie cinétique maximale de la bobine ?

P47 Un barreau aimanté, dont le moment magnétique initial est $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\text{i} = (0{,}150\vec{\boldsymbol{\imath}} + 0{,}300\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 0{,}500\vec{\boldsymbol{k}})\ \text{A} \cdot \text{m}^2$, est situé dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (-3{,}20\vec{\boldsymbol{\imath}} + 7{,}30\vec{\boldsymbol{k}}) \times 10^{-5}\ \text{T}$. On applique un moment de force pour faire tourner le barreau aimanté, de telle sorte que son moment magnétique final est $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\text{f} = (0{,}380\vec{\boldsymbol{\imath}} + 0{,}300\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 0{,}358\vec{\boldsymbol{k}})\ \text{A} \cdot \text{m}^2$. Quel est le travail du moment de force extérieur si le barreau est immobile au début et à la fin de la rotation ?

P48 Une petite bobine de courant a 10,0 spires et elle est circulaire. Elle est placée près d'un très long fil parcouru par un courant $i_1 = 9{,}00$ A (*voir la figure 9.59*). La bobine a un rayon de 1,50 mm, et elle est parcourue par un courant $i_2 = 3{,}4$ A. Quel est le moment de force exercé sur la bobine ?

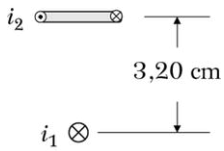


FIGURE 9.59 • Problème 48

P49 On place un dipôle magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}_1$ à une distance z directement au-dessus d'un dipôle magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}_2$. Les deux moments magnétiques ont la même orientation.

Calculez la force exercée sur le premier dipôle par le second dipôle.

P50 Une bobine de courant de 32,0 spires et de 25,0 cm de rayon est parcourue par un courant de 4,00 A. La bobine est placée dans un champ magnétique non uniforme, dont le module est

$$B = \left(\frac{4{,}58}{z^2} + \frac{3{,}26}{z} - 2{,}49 \right) \times 10^{-5}\ \text{T}\ .$$

Le moment magnétique de la bobine et le champ magnétique sont orientés dans le même sens que l'axe des z. Quelle est la force magnétique exercée sur la bobine de courant si cette dernière se trouve à la position $z = 3{,}00$ m ?

Section 9.7 Le magnétisme des atomes

E51 Un électron est dans l'état $\ell = 3$, $m_\ell = 3$.

a. Quel est le module du moment cinétique ?

b. Quelle est la composante z du moment cinétique ?

c. Quelle est la composante z du moment magnétique orbital ?

E52 Un électron est dans l'état $m_\ell = -2$ et $m_s = +1/2$.

a. Quelle est la composante z de son moment magnétique orbital ?

b. Quelle est la composante z de son moment magnétique intrinsèque ?

E53 Comme l'électron a un spin, il possède les propriétés d'un dipôle magnétique. Quel est le module du champ magnétique produit à une distance de $2{,}40 \times 10^{-12}$ m ?

E54 Le nombre quantique orbital d'un électron dans un atome est $\ell = 2$. Un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 1{,}2\ \text{T}\,\vec{k}$ est présent. Exprimez l'énergie en électron-volts.

a. Pour quelle valeur de m_ℓ l'énergie magnétique orbitale est-elle maximale ?

b. Quelle est l'énergie magnétique orbitale maximale ?

c. Pour quelle valeur de m_ℓ l'énergie magnétique orbitale est-elle minimale ?

d. Quelle est l'énergie magnétique orbitale minimale ?

e. Quelle énergie doit absorber l'atome pour que l'électron passe de l'état $m_\ell = +2$ à l'état $m_\ell = +1$?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

9.1 **a.** Dans le sens de l'axe des y

Selon la règle de la main droite, on place les doigts vers le haut (selon $\vec{\mathbf{v}}$), et on les tourne pour qu'ils sortent de la page. Le pouce est vers la droite. Comme $q > 0$, c'est le sens de $\vec{\mathbf{F}}_m$.

b. Dans le sens opposé de l'axe des z

Selon la règle de la main droite, on place les doigts vers la gauche, et on les tourne pour qu'ils sortent de la page. Le pouce est vers le haut. Comme $q < 0$, la force est opposée, donc vers le bas.

c. La force est nulle.

L'angle entre $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ est $\phi = 180°$. Le module de la force est $F_m = |q|vB \sin(180°) = 0$ N.

9.2 **a.** La particule 1

Le rayon de la trajectoire est

$$r = \frac{mv}{|q|B}.$$

La particule avec la plus petite masse a moins d'inertie, donc elle tourne sur un plus petit cercle, sachant que les autres paramètres sont les mêmes pour les deux particules.

b. La particule 2

Pour la particule 2, le produit $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ donne un vecteur vers le centre du cercle, donc $\vec{\mathbf{F}}_m$ est vers le centre du cercle lorsque $q_2 > 0$.

9.3 $F_1 > F_3 > F_2$

La force électrique est vers le haut pour chaque proton. Le module de la force magnétique est plus faible que le module de la force électrique, car $E > vB$. On trouve l'orientation de la force magnétique à l'aide de la règle de la main droite : $\vec{\mathbf{F}}_{m1}$ est vers le haut, $\vec{\mathbf{F}}_{m2}$ est vers le bas et $\vec{\mathbf{F}}_{m3}$ est nulle parce que la vitesse est parallèle à $\vec{\mathbf{B}}$. La force résultante est la somme de la force électrique et de la force magnétique.

9.4 Vers la droite

Selon la règle de la main droite, $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ de la boucle est orienté vers la droite. Le champ magnétique de l'aimant est vers la gauche, donc opposé à $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. La force magnétique sur la boucle est orientée vers la région où le champ est moins intense, donc à l'opposé de l'aimant.

9.5 L'objet 2

Un objet diamagnétique acquiert un moment magnétique induit opposé au champ magnétique de l'aimant, ce qui produit une force répulsive.

Chapitre 10

L'induction électromagnétique

Buts du chapitre

Ce chapitre traite de l'induction électromagnétique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de comprendre le phénomène d'induction électromagnétique ;
- de calculer la f.é.m. induite dans une bobine à l'aide de la loi de Faraday et de la loi de Lenz ;
- de comprendre la façon dont un champ magnétique variable induit un champ électrique ;
- d'expliquer de quelle manière un champ électrique variable induit un champ magnétique.

Préalables

Ce chapitre permet d'établir le lien entre le champ électrique et le champ magnétique. Revoyez :

- les sources de différence de potentiel, expliquées à la section 4.9 ;
- le champ magnétique des boucles de courant et des solénoïdes, analysé aux sections 8.4 et 8.6 ;
- le théorème d'Ampère, étudié à la section 8.5 ;
- la force magnétique sur un fil, examinée à la section 9.5 ;
- le condensateur plan, présenté à la section 5.2.

L'intérieur de la centrale de Beauharnois

UN PEU D'HISTOIRE

Le chercheur solitaire qui charmait les foules

« À quoi ça sert ? » Cette question revient souvent lorsqu'une nouveauté scientifique est annoncée. En 1816, Michael Faraday, âgé de 25 ans, est chargé de parler devant une société savante londonienne de l'oxygène et des autres éléments récemment identifiés par des chimistes tels qu'Antoine Lavoisier et Humphry Davy. Faraday répond à cette interrogation de la salle en reprenant les propos attribués à Benjamin Franklin au sujet de l'utilité des premiers ballons : « Eh ! à quoi bon l'enfant qui vient de naître ? » Et Faraday d'ajouter que c'est la tâche du chercheur de s'efforcer de rendre utiles les trouvailles de la science.

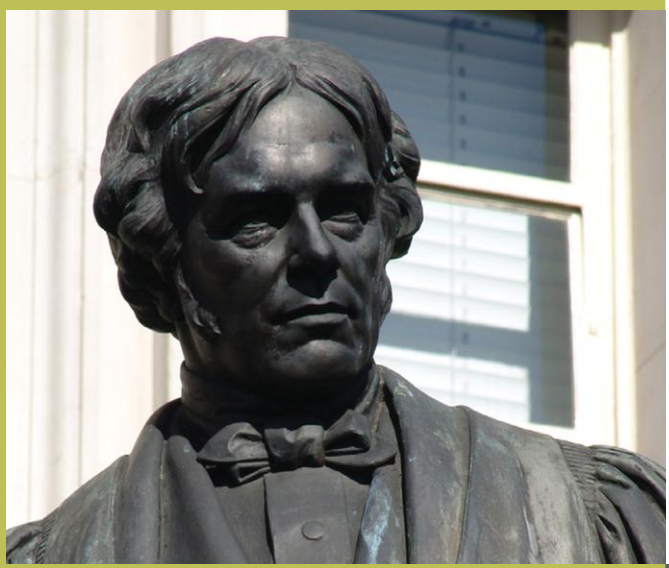
Cette préoccupation domine la carrière de Faraday. Fils de forgeron, il travaille d'abord pour un relieur. Il développe sa curiosité en lisant, et sa dextérité dans l'atelier où il peut appliquer jusqu'à mille coups de maillet sans se reposer. En 1812, un client du relieur lui offre des places pour assister à des conférences de Davy. Faraday prend des notes abondantes et les relie sous la forme d'un volume qu'il présente au conférencier. Blessé par une explosion de laboratoire qui l'empêche de prendre des notes, Davy l'embauche à titre de secrétaire. Engagé ensuite comme assistant à l'Institution royale de Londres, Faraday aide Davy à isoler l'iode et liquéfier le chlore.

À cette époque au Royaume-Uni, la science est un passe-temps pour amateurs. La plupart des savants sont des militaires, des pasteurs protestants ou des médecins. Le poste modeste de Faraday lui permet néanmoins de réaliser ses propres expériences et de se dédier à la science. Il augmente ses revenus en exécutant des analyses chimiques pour des entreprises et le gouvernement anglais, pour lequel il travaille aussi comme conseiller scientifique sur des sujets aussi variés que l'amélioration des phares, la qualité de l'avoine fournie aux bagnards et l'utilisation de paratonnerres sur les navires.

En 1820, Ørsted annonce qu'un courant électrique affecte une aiguille aimantée et plusieurs physiciens français examinent ce nouveau phénomène. En rédigeant un compte rendu des événements, Faraday invente en 1821 un dispositif capable d'engendrer la rotation continue d'un conducteur sous l'action d'un aimant et, symétriquement, celle d'un aimant sous l'action d'un conducteur. C'est le principe du moteur électrique, mais le sujet ne passionne pas l'Institution royale. Faraday ne poursuivra son investigation de l'électromagnétisme qu'après la mort de Davy, en 1829.

En 1831, Faraday découvre l'induction en montrant qu'un électroaimant crée un courant dans un conducteur approprié. Il apporte la preuve que ce nouveau courant électrique est de même nature que l'électricité issue du frottement ou d'une pile. Ces recherches préparent l'unification de l'électricité et du magnétisme. Afin de démontrer cette unité de tous les phénomènes électriques, Faraday se penche sur leurs effets chimiques. En 1833, après avoir consulté des collègues, il propose une réforme du vocabulaire de l'électricité et introduit de nouveaux termes, dont anode, cathode, électrode, électrolyse, anion, cation, ion et diélectrique, qui sont encore employés aujourd'hui.

Vulgarisateur habile, il donne des conférences qui attirent jusqu'à 1 000 personnes. Pourtant Faraday préfère travailler seul dans son laboratoire. Des heures ou des jours peuvent s'écouler sans qu'il adresse plus de quelques mots à son assistant. Reconnu comme un des meilleurs expérimentateurs de son temps, c'est un des derniers grands physiciens à procéder de manière souvent empirique, sans se référer à des équations chiffrées. À partir de 1855, James Clerk Maxwell traduit sa théorie à base de champs et de lignes de force en termes mathématiques, à la grande satisfaction du vieux savant. S'il ne vit pas assez longtemps pour assister au triomphe de l'électricité utile, Faraday n'aura jamais cessé de travailler pour améliorer la connaissance des phénomènes électriques, la clé de leur utilité.



↘ Michael Faraday, 1791-1867

Jusqu'à présent, nous avons étudié séparément l'électricité et le magnétisme. Nous avons vu que les charges électriques produisent un champ électrique et que les charges électriques en mouvement produisent un champ magnétique. Dans ce chapitre, nous allons voir que le champ électrique et le champ magnétique sont liés par le phénomène de l'induction électromagnétique. En effet, un champ magnétique variable induit un champ électrique, et un champ électrique variable induit un champ magnétique.

Le principe de l'induction électromagnétique est à la base du fonctionnement de nombreux dispositifs électriques. C'est par l'induction qu'il est possible de convertir de l'énergie cinétique en énergie électrique dans les centrales électriques comme celle de Beauharnois. De même, les détecteurs de métal, les téléphones cellulaires, les guitares électriques et les transformateurs utilisent l'induction électromagnétique. En outre, dans une voiture électrique ou hybride, l'induction électromagnétique permet à l'automobile de freiner en récupérant l'énergie pour charger ses batteries.

Le lien entre le champ électrique et le champ magnétique est fondamental dans la théorie de l'électromagnétisme. Les équations reliant les champs entre eux et avec la charge et le courant sont appelées les équations de Maxwell. Ces équations impliquent que la lumière est un phénomène électromagnétique, un sujet qui sera étudié dans le tome 3.

10.1 La découverte de Faraday

La découverte d'Ørsted a montré que le mouvement des charges électriques, qui se déplacent sous l'influence d'un champ électrique, produit un champ magnétique. Les physiciens du 19e siècle ont ensuite cherché à savoir si le contraire était possible, si un champ magnétique pouvait produire un courant électrique. C'est dans ce but que le physicien anglais Michael Faraday (qui a introduit la notion de champ, présentée dans le chapitre 2) a réalisé l'expérience illustrée à la figure 10.1. Il a enroulé un fil sur un anneau de fer pour former une bobine, qu'il a reliée à une pile. Sur le même anneau, il a enroulé une deuxième bobine, branchée à un ampèremètre. Son hypothèse était la suivante : le courant dans la première bobine produirait un champ magnétique qui aimanterait l'anneau de fer, et le champ magnétique du fer pourrait générer un courant électrique dans la deuxième bobine.

Le résultat de l'expérience n'est pas celui auquel Faraday s'attendait. Lorsqu'un courant circule dans le circuit de gauche (la bobine primaire), cela ne produit

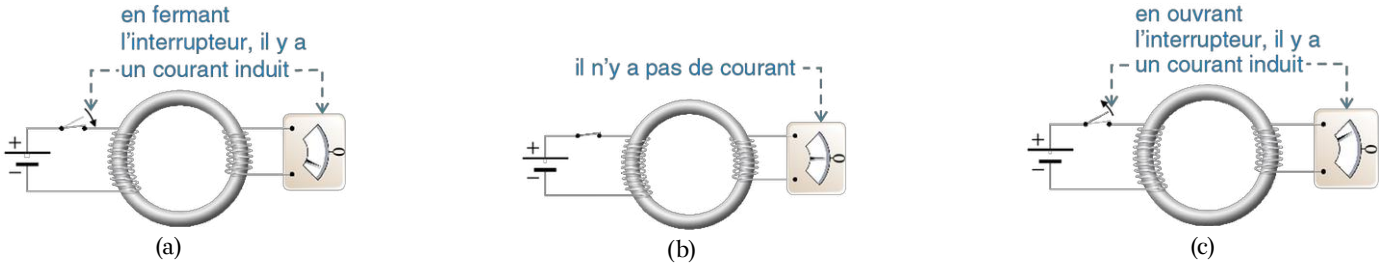


FIGURE 10.1

(a) Lorsqu'on ferme l'interrupteur, un courant est induit dans la bobine secondaire. (b) Il n'y a pas de courant induit lorsqu'un courant continu circule dans le circuit primaire. (c) Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, un courant induit apparaît dans la bobine secondaire.

pas de courant dans le circuit de droite (la bobine secondaire), comme le montre la figure 10.1b. Par contre, Faraday a observé la présence d'un courant pendant un bref moment, à l'instant où il a fermé l'interrupteur (*voir la figure 10.1a*). De même, à l'instant où il a ouvert l'interrupteur, il a observé un bref courant dans le sens opposé (*voir la figure 10.1c*). Faraday venait de découvrir l'induction électromagnétique. Le physicien américain Joseph Henry (1797-1878) a aussi découvert l'induction électromagnétique de façon indépendante.

Pour comprendre le résultat de son expérience, Faraday a fait appel à sa notion de champ. Le courant dans la première bobine produit un champ magnétique dans le morceau de fer, ce qui aimante ce dernier. Le champ magnétique du fer traverse la deuxième bobine. Un courant est induit dans la deuxième bobine seulement lorsqu'il y a un changement dans les lignes de champ magnétique qui traversent la deuxième bobine.

Faraday a vérifié son hypothèse en réalisant d'autres expériences dans lesquelles une variation des lignes de champ traversent une bobine. Dans la figure 10.2a, une première bobine est branchée à une pile. Une seconde bobine est placée près de la première. Lorsqu'on ouvre ou qu'on ferme l'interrupteur du premier circuit, un courant apparaît dans la deuxième bobine. De même, à la figure 10.2b, on observe un courant dans une bobine lorsqu'on approche ou qu'on éloigne un aimant de celle-ci ; il n'y a pas de courant si l'aimant est immobile. On observe aussi un courant dans la bobine si l'aimant est immobile et que c'est la bobine qui se déplace, comme dans la figure 10.2c.

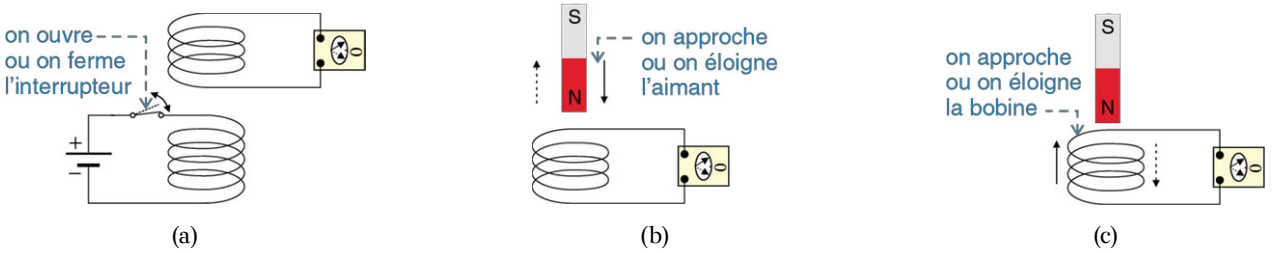


FIGURE 10.2
Trois façons d'obtenir un courant induit : (a) on ouvre ou on ferme un circuit près de la bobine ; (b) on approche ou on éloigne un aimant de la bobine ; (c) on éloigne ou on approche la bobine d'un aimant.

Dans toutes ces expériences, ce n'est pas le champ magnétique qui produit un courant. Il y a un courant lorsque le nombre de lignes de champ magnétique qui traversent une bobine varie. On appelle *courant induit* le courant qui apparaît dans la bobine. Ce courant n'est pas produit par une pile, mais par une nouvelle façon de générer le courant, appelée l'*induction électromagnétique*. Selon Faraday :

> Lorsque le nombre de lignes de champ magnétique à travers une bobine varie, il y a une f.é.m. induite $\mathcal{E}$, ce qui produit un courant induit dans la bobine.

10.2 Le flux magnétique

Au chapitre 3, nous avons utilisé le flux électrique pour quantifier le nombre de lignes de champ électrique qui traversent une surface. Nous devons procéder de la même manière ici en recourant au flux magnétique Φ_B pour quantifier le nombre de lignes de champ magnétique qui traversent une surface.

La figure 10.3 montre une surface, dont l'aire est A, qui se trouve dans un champ magnétique uniforme. On définit le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ comme un vecteur perpendiculaire à la surface et dont le module donne l'aire de la surface. Le flux magnétique à travers la surface est

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = BA \cos\theta \,, \tag{10.1}$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

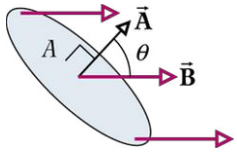


FIGURE 10.3
Une surface est traversée par un champ magnétique.

L'équation 10.1 est valable lorsque le champ magnétique est uniforme et que la surface est plane. Dans les cas où ce n'est pas le cas, il faut diviser la surface en éléments de surface infinitésimaux $d\vec{\mathbf{A}}$, comme à la figure 10.4. Le flux à travers un élément infinitésimal est $d\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$. On obtient le flux net en calculant la somme sur tous les flux infinitésimaux, c'est-à-dire en calculant une intégrale :

$$\Phi_B = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \,. \tag{10.2}$$

Flux magnétique

L'équation 10.2 est l'équation générale du flux magnétique à travers une surface.

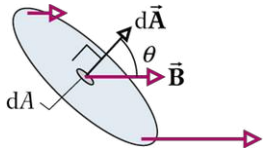
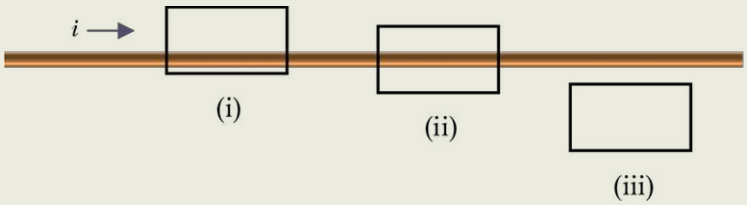


FIGURE 10.4
Lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme, on divise la surface en éléments infinitésimaux $d\vec{\mathbf{A}}$ pour calculer le flux magnétique.

Dans le Système international, le flux est mesuré en $\mathrm{T \cdot m^2}$, qu'on appelle aussi le weber (Wb), en l'honneur du physicien allemand Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.1

La figure suivante illustre trois boucles identiques près d'un long fil parcouru par un courant i. Classez les boucles selon un ordre croissant du flux magnétique à travers les boucles.



EXEMPLE 10.1 Le flux par les composantes

Une boucle circulaire a un rayon de 20,0 cm, et son plan est parallèle au plan des xy. Elle se trouve dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (12\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 18\vec{k})$ mT. Calculez le flux magnétique à travers la boucle.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$R = 0{,}20$ m	Φ_B
$\vec{\mathbf{B}} = (12\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 18\vec{k})$ mT	

Comme le plan de la boucle est parallèle au plan des xy, la normale au plan de la boucle est parallèle à l'axe des z :

$$\vec{\mathbf{A}} = \pi R^2 \vec{k} \,. \tag{i}$$

Identifier la clé

La clé est l'équation 10.1, car le champ magnétique est uniforme et la surface de la boucle est une surface plane. Ainsi,

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \,. \tag{ii}$$

Résoudre le problème

Nous utilisons la méthode des composantes pour calculer le produit scalaire :

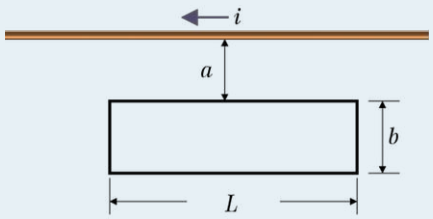
$$\Phi_B = 0 + 0 + B_z A_z = 18 \times 10^{-3}\ \text{T} \times \pi \times (0{,}20\ \text{m})^2$$
$$= 2{,}3 \times 10^{-3}\ \text{Wb}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Seule la composante z du champ magnétique est importante dans le calcul du flux. Les composantes x et y ne produisent pas de flux magnétique, car le plan de la boucle est dans le plan des xy.

EXEMPLE 10.2 Le flux causé par un fil

Une boucle rectangulaire est placée près d'un fil, comme il est indiqué dans la figure suivante. Le fil est très long, et il est parcouru par un courant de 12,0 A. Calculez le flux magnétique à travers la boucle si $a = 4{,}00$ cm, $b = 5{,}00$ cm et $L = 20{,}0$ cm.



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 10.5 montre la boucle et le champ magnétique qui est sortant, selon la règle de la main droite pour le champ magnétique produit par un fil. Ce champ n'est pas uniforme. Pour calculer le flux, on divise l'aire en petites bandes. Une bande est située à une distance r du fil ; elle a une longueur L et une largeur dr. Le champ ne varie pas le long d'une petite bande.

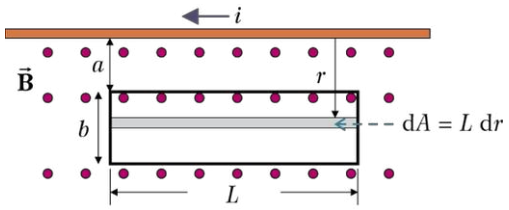


FIGURE 10.5
Le schéma de la situation pour l'exemple 10.2

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$i = 12{,}0$ A	$L = 0{,}200$ m	Φ_B
$a = 4{,}00$ cm	$b = 5{,}00$ cm	

Le champ $\vec{\mathbf{B}}$ et l'aire $\vec{\mathbf{A}}$ de la boucle sont des vecteurs perpendiculaires à la page. Alors, $\theta = 0{,}00°$.

Identifier les clés

La première **clé** est qu'un long fil (un fil infini) produit un champ magnétique, donné par l'équation 8.14. Le module du champ magnétique est

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\ , \qquad \text{(i)}$$

où r est la distance entre la bande et le fil. La deuxième **clé** est la définition du flux magnétique. Comme le champ n'est pas uniforme, nous calculons d'abord le flux dΦ_B à travers une bande de largeur infinitésimale dr. Cette bande est très étroite, de telle sorte que le champ ne varie pas :

$$d\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L\, dr \cos(0°)\ . \qquad \text{(ii)}$$

Le flux magnétique à travers la boucle complète est obtenu en calculant l'intégrale :

$$\Phi_B = \int_a^{a+b} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) L\, dr\ . \qquad \text{(iii)}$$

Les bornes d'intégration correspondent à la plus petite distance et à la plus grande distance entre le fil et la boucle.

Résoudre le problème

Nous intégrons en commençant par sortir les constantes :

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\left[\ln r\right]\Big|_a^{a+b}\\ &= \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\left[\ln(a+b)-\ln(a)\right]\\ &= \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right), \qquad \text{(iv)}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$.

Nous remplaçons les valeurs :

$$\Phi_B = \frac{4\pi\times10^{-7}\times12{,}0\times0{,}200}{2\pi}\times\ln\left(\frac{0{,}040\,0+0{,}050\,0}{0{,}040\,0}\right)$$

$$\Phi_B = 3{,}89\times10^{-7}\ \text{Wb}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons à la question. Il est important d'utiliser l'équation générale du flux magnétique, car le champ magnétique produit par un fil n'est pas uniforme.

10.3 La loi de Faraday

En se basant sur la définition du flux magnétique, on peut maintenant exprimer la f.é.m. induite dans une boucle d'aire A. La f.é.m. induite est proportionnelle au taux de variation du flux magnétique :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (10.3)$$

Loi de Faraday

Nous verrons la signification du signe négatif à la section 10.4, qui est reliée au sens de la f.é.m. Lorsqu'on n'est pas intéressé au sens de la f.é.m. induite, on calcule la valeur absolue :

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|. \qquad (10.4)$$

Lorsqu'une bobine est un enroulement compact de N spires, chaque spire est traversée par le même flux magnétique. Dans chaque spire, il y a une f.é.m. induite. La f.é.m. induite nette pour la bobine est

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (10.5)$$

Selon la définition du flux magnétique, donnée par l'équation 10.1, on peut faire changer le flux et obtenir une f.é.m. induite de trois façons :

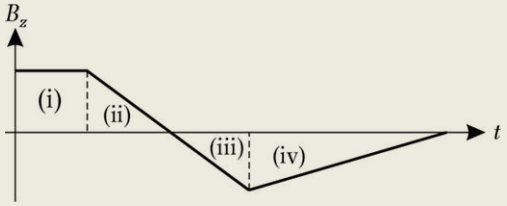
- Le module du champ magnétique à travers la boucle varie. C'est le cas lorsqu'un aimant s'approche ou s'éloigne d'une boucle.
- L'aire de la boucle qui se trouve dans le champ magnétique change. Cela se produit par exemple lorsqu'une boucle entre graduellement dans une région où il y a un champ magnétique.
- L'angle entre l'aire de la boucle et le champ est modifié. Cela se produit lorsque la boucle change d'orientation, par exemple si on la fait tourner.

On calcule le courant induit dans une bobine si on connaît sa résistance R. Dans ce cas,

$$i_{\text{ind}} = \frac{|\mathcal{E}|}{R}\,. \qquad (10.6)$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.2

Une boucle est soumise à un champ magnétique variable, dont la composante perpendiculaire à la boucle est donnée par le graphique suivant. Classez les quatre intervalles de temps selon un ordre croissant du courant induit dans la boucle.

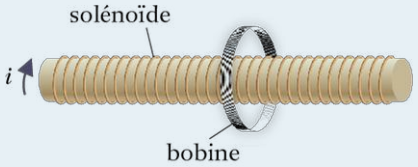


EXEMPLE 10.3 Le courant autour d'un solénoïde

Une bobine circulaire, ayant un rayon de 20,0 cm et composée de 50,0 spires, est placée autour d'un long solénoïde, qui a 3 500 spires par mètre et un rayon de 12,0 cm (*voir la figure suivante*). Le solénoïde est parcouru par un courant variable $i = 10{,}00 - 35{,}0t$, où t est exprimé en secondes et i, en ampères. La bobine a une résistance de 0,500 Ω.

a. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine ?

b. Quel est le courant induit dans la bobine ?



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 10.6 présente une vue en coupe de la bobine. Le champ magnétique est confiné à l'intérieur du solénoïde, dans un cercle de rayon r_s. La bobine a un rayon r_b. Selon la règle de la main droite, le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la page, et il entre dans la page.

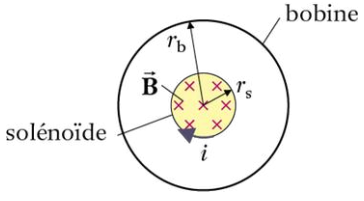


FIGURE 10.6
Une vue en coupe pour illustrer la situation de l'exemple 10.3

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$N = 50{,}0$	$r_b = 0{,}200$ m	$\lvert\mathcal{E}\rvert$
$n = 3500\ \text{m}^{-1}$	$r_s = 0{,}120$ cm	i_{ind}
$i = 10{,}00 - 35{,}0t$	$R = 0{,}500\ \Omega$	

Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est perpendiculaire à la page, donc $\theta = 0{,}00°$.

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est qu'il y a un champ magnétique uniquement à l'intérieur du solénoïde. Le module du champ est donné par l'équation 8.26 :

$$B = \mu_0 n i \,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est la loi de Faraday, donnée par l'équation 10.5 dans le cas d'une bobine,

$$|\mathcal{E}| = N \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| , \qquad \text{(ii)}$$

où le flux magnétique à travers une spire est donné par l'équation 10.1 dans le cas d'un champ uniforme :

$$\Phi_B = BA\cos\theta = (\mu_0 ni)(\pi r_s^2)\cos(0°) = \mu_0 n\pi r_s^2 i\ . \qquad \text{(iii)}$$

MISE EN GARDE

Dans le calcul du flux, l'aire correspond à l'aire où il y a un champ magnétique, ce qui n'est pas nécessairement l'aire de la bobine. Ici, le champ est confiné à la région à l'intérieur du solénoïde. C'est pour cette raison que l'aire est celle du solénoïde. Si la bobine était complètement dans le solénoïde, A serait l'aire de la bobine.

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (iii) dans l'équation (ii), puis nous calculons la dérivée :

$$|\mathcal{E}| = N\left|\frac{\mathrm{d}(\mu_0 n\pi r_s^2 i)}{\mathrm{d}t}\right| = N\mu_0 n\pi r_s^2\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|.$$

La valeur absolue de la dérivée par rapport au temps du courant est $|\mathrm{d}i/\mathrm{d}t| = 35\ \mathrm{A/s}$.

$$|\mathcal{E}| = 50\times 4\pi\times 10^{-7}\times 3\,500\pi\,(0{,}120)^2\times 35{,}0$$
$$= 0{,}348\ \mathrm{V}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.6 :

$$i_{\mathrm{ind}} = \frac{|\mathcal{E}|}{R}\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$i_{\mathrm{ind}} = \frac{0{,}348\ \mathrm{V}}{0{,}500\ \Omega} = 0{,}696\ \mathrm{A}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Le rayon de la bobine n'est pas un paramètre important lorsque la bobine entoure le solénoïde. Il peut vous sembler bizarre qu'il y ait un courant dans la bobine, même si aucun champ magnétique n'est présent vis-à-vis de la bobine. Pour avoir un courant, il faut qu'une force s'exerce sur les électrons de conduction à l'intérieur de la bobine. Ceci sera expliqué à la section 10.7.

10.4 La loi de Lenz

Peu après la découverte de Faraday, le physicien allemand Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) a trouvé une façon simple d'obtenir le sens de la f.é.m. et du courant induit dans une boucle.

Loi de Lenz

La f.é.m. produit un courant induit qui génère un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ind}}$ qui s'oppose à la variation du flux magnétique.

C'est la loi de Lenz. De façon algébrique, la loi de Lenz est incluse dans la loi de Faraday* par le signe négatif entre la f.é.m. et le taux de variation du flux magnétique. Ce signe indique que le sens de la f.é.m. est opposé au sens du taux de variation du flux magnétique.

Pour bien comprendre cette loi, examinons quelques situations. Prenons d'abord la situation de la figure 10.7 à la page suivante, où le pôle nord d'un aimant s'approche d'une boucle. Le champ magnétique est orienté vers le haut, et le flux magnétique augmente lorsque l'aimant s'approche, car le nombre de lignes de champ qui traversent la boucle augmente (*voir la figure 10.7a à la page suivante*). Le courant induit dans la boucle s'oppose à l'augmentation du flux, en produisant un champ magnétique induit $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ind}}$

Défi animé 10.1
La polarité de la f.é.m. induite demeure-t-elle inchangée lorsqu'un aimant traverse à vitesse constante une bobine reliée à un voltmètre ?

* Pour cette raison, la loi de Faraday (*voir l'équation 10.3*) est parfois appelée la loi de Lenz-Faraday.

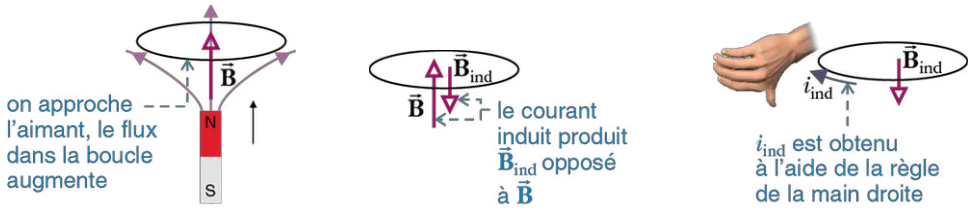


FIGURE 10.7
(a) On approche un aimant d'une boucle. Le champ de l'aimant est orienté vers le haut, et le flux magnétique augmente. (b) Le courant induit dans la boucle produit un champ $\vec{B}_{ind}$ qui s'oppose à la variation, donc il est en sens opposé à $\vec{B}$. (c) Pour produire $\vec{B}_{ind}$ vers le bas, le courant doit circuler en sens horaire, selon la règle de la main droite.

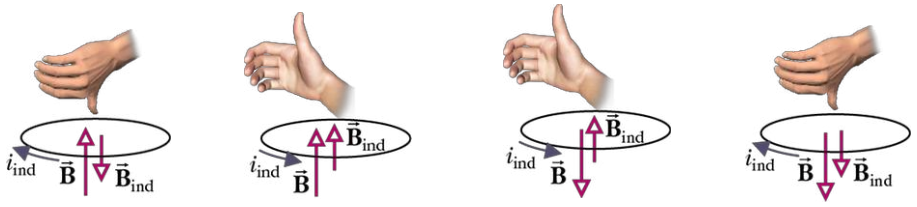
vers le bas (*voir la figure 10.7b*). On utilise alors la règle de la main droite pour les boucles de courant (*voir l'énoncé de la page 269*) : on place le pouce vers le bas (selon l'orientation de $\vec{B}_{ind}$), et le sens du courant induit correspond au sens des doigts (*voir la figure 10.7c*).

Défi animé 10.2
Un aimant qui se déplace perpendiculairement à l'axe d'une bobine reliée à un voltmètre génère-t-il une f.é.m. induite ? Si oui, la polarité de la f.é.m. demeure-t-elle inchangée ?

La figure 10.8 montre les quatre situations possibles lorsque le flux magnétique traversant une boucle change. La technique 10.1 indique les étapes à suivre pour déterminer le sens du courant induit.

TECHNIQUE 10.1 Le sens du courant induit dans une boucle

1. Trouver le sens du champ magnétique $\vec{B}$ qui traverse la boucle.
2. Déterminer si le flux magnétique augmente ou s'il diminue.
3. Trouver le sens du champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$:
   - si le flux magnétique augmente, $\vec{B}_{ind}$ est en sens opposé à $\vec{B}$;
   - si le flux magnétique diminue, $\vec{B}_{ind}$ est dans le même sens que $\vec{B}$.
4. Trouver le sens du courant induit à l'aide de la règle de la main droite : on place le pouce selon $\vec{B}_{ind}$. Les doigts tournent selon le sens du courant i_{ind}.

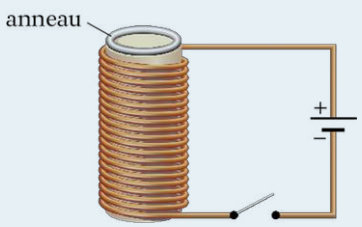


(a)	(b)	(c)	(d)
1. $\vec{B}\uparrow$ et augmente ;	1. $\vec{B}\uparrow$ et diminue ;	1. $\vec{B}\downarrow$ et augmente ;	1. $\vec{B}\downarrow$ et diminue ;
2. Φ_B augmente ;	2. Φ_B diminue ;	2. Φ_B augmente ;	2. Φ_B diminue ;
3. $B_{ind}\downarrow$;	3. $B_{ind}\uparrow$;	3. $B_{ind}\uparrow$;	3. $B_{ind}\downarrow$;
4. i_{ind} horaire.	4. i_{ind} antihoraire.	4. i_{ind} antihoraire.	4. i_{ind} horaire.

FIGURE 10.8
L'utilisation de la loi de Lenz

EXEMPLE 10.4 Un canon électromagnétique

On place un anneau conducteur sur un solénoïde, avec un isolant pour les séparer (*voir la figure ci-contre*). On branche le solénoïde à une source de f.é.m. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, l'anneau subit une force magnétique. Quel est le sens de cette force ?



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 10.9 présente un schéma de la situation, avec les champs magnétiques.

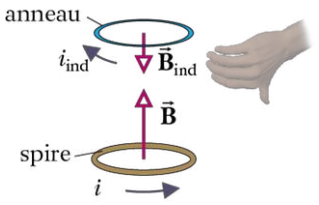


FIGURE 10.9
Le schéma de la situation pour l'exemple 10.4

Décortiquer le problème

1. Le champ magnétique est nul au départ. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant circule en sens antihoraire dans le solénoïde, et il produit un champ magnétique vers le haut (selon la règle de la main droite), qui augmente rapidement.

2. Le flux à travers l'anneau augmente.

3. Le champ magnétique induit $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ dans l'anneau doit être opposé au champ magnétique produit par le solénoïde, donc il est orienté vers le bas.

4. Selon la règle de la main droite, le courant induit i_{ind} dans l'anneau doit être en sens horaire.

Identifier la clé

La **clé** est que les courants opposés se repoussent. Donc, la force sur l'anneau est répulsive :

la force sur l'anneau est vers le haut. (réponse)

Valider la réponse

Cet exercice est une démonstration populaire. En fermant le circuit, l'anneau est propulsé vers le haut.

EXEMPLE 10.5 Le sens du courant induit

Une bobine de 100 spires est placée dans un champ magnétique variable, comme le montre la figure ci-contre. Chaque spire a une aire de 120 cm^2, et le plan de la bobine est perpendiculaire au champ magnétique. La résistance de la bobine est de 4,50 Ω. Le module du champ magnétique en fonction du temps est $B = 0{,}500 + 0{,}500t - 0{,}125t^2$, où t est exprimé en secondes et B, en teslas. À $t = 1{,}10$ s :

a. Quel est le courant induit ?

b. Quel est le sens de ce courant induit ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

L'aire doit être exprimée en mètres carrés :

$$A = 120\ \text{cm}^2 \times \left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)^2 = 0{,}0120\ \text{m}^2\ .$$

Connues	Inconnues
$B = 0{,}500 + 0{,}500t - 0{,}125t^2$	i
$N = 100$	sens de i
$t = 1{,}10$ s	
$R = 4{,}50\ \Omega$	
$\theta = 90{,}0°$	

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est la loi de Faraday pour calculer la f.é.m. :

$$|\mathcal{E}| = N\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = N\left|\frac{d\left[B\,A\cos(0°)\right]}{dt}\right|$$
$$= N\,A\left|\frac{dB}{dt}\right|. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation 10.6 pour calculer le courant induit :

$$i_{ind} = \frac{|\mathcal{E}|}{R}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la dérivée du champ magnétique à $t = 1{,}10$ s :

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{1{,}10} = (0{,}500 - 0{,}250t)\big|_{1{,}10} = 0{,}225\ \text{T/s}\,. \quad \text{(iii)}$$

Nous insérons ensuite l'équation (i) dans l'équation (ii), puis nous remplaçons les valeurs :

$$i_{ind} = \frac{N\,A}{R}\frac{dB}{dt} = \frac{100\times 0{,}012\,0\ \text{m}^2}{4{,}50\ \Omega}(0{,}225\ \text{T/s})$$
$$= 0{,}060\,0\ \text{A} = 60{,}0\ \text{mA}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la loi de Lenz. Selon l'équation (iii), le champ magnétique augmente à $t = 1{,}10$ s. Le champ magnétique induit $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ par la bobine doit être en sens opposé au champ $\vec{\mathbf{B}}$.

Résoudre le problème

Le champ magnétique induit est donc entrant dans la page (*voir la figure 10.10*).

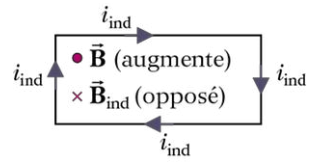


FIGURE 10.10
La loi de Lenz est utilisée pour obtenir le sens du courant induit.

Selon la règle de la main droite, le sens du courant induit est

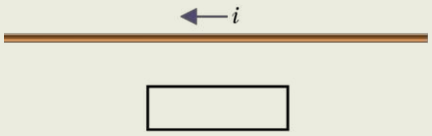
en sens horaire. (réponse)

Valider la réponse

Nous répondons à la question. Le courant est exprimé en ampères.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.3

Une boucle est placée près d'un fil (*voir la figure suivante*). Le courant dans le fil augmente graduellement. Dans quel sens circule le courant induit à l'intérieur de la boucle ?



10.5 La f.é.m. induite dans un conducteur en mouvement

Nous étudions maintenant une autre façon de produire une f.é.m. induite, soit lorsqu'un conducteur est en mouvement dans un champ magnétique. La figure 10.11a montre une tige conductrice, de longueur ℓ, qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique perpendiculaire à la page. Les électrons de conduction subissent une force magnétique orientée vers le bas. Des électrons vont se déplacer vers le bas et s'accumuler sur la surface inférieure de la tige, en laissant des ions positifs sur la surface supérieure.

L'accumulation de charge produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, orienté vers le bas (*voir la figure 10.11b*). Les électrons se déplacent jusqu'à ce qu'il y ait équilibre entre la force magnétique (vers le bas) et la force électrique (vers le haut), comme à la figure 10.11c :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow E = vB \ .$$

On mesure alors une différence de potentiel entre les extrémités de la tige :

$$\mathcal{E} = V_{\text{haut}} - V_{\text{bas}} = E\ell = v\ell B \ .$$

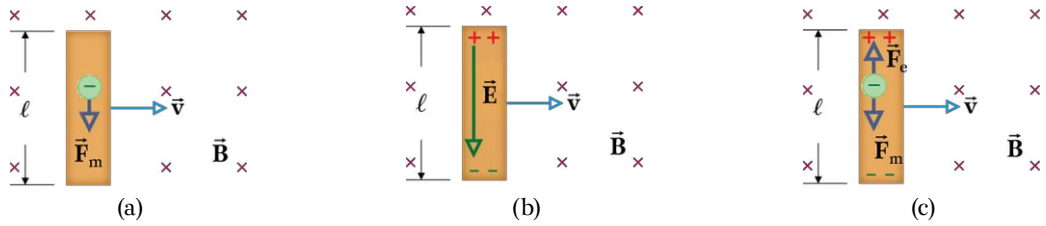


FIGURE 10.11

Un conducteur se déplace dans un champ magnétique. (a) Les électrons subissent une force magnétique vers le bas. (b) Les charges négatives s'accumulent sur la surface inférieure, ce qui produit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. (c) Les électrons de conduction se déplacent jusqu'à ce que la force électrique et la force magnétique s'équilibrent.

Le mouvement de la tige dans un champ magnétique est une source de différence de potentiel. La différence de potentiel entre les extrémités de la tige dépend du module du champ magnétique, du module de la vitesse et de la longueur de la tige. Le champ magnétique produit une séparation de la charge positive et de la charge négative. Le conducteur en mouvement est une source de f.é.m., semblable à une pile.

Supposons maintenant que la tige est placée sur un rail conducteur fixe pour former un circuit fermé (*voir la figure 10.12a*). La résistance totale de la tige et du rail est R. La f.é.m. induite dans la tige génère un courant i dans le circuit. On peut représenter le circuit par le circuit équivalent de la figure 10.12b, constitué d'une source de f.é.m. et d'une résistance. Selon la loi des mailles de Kirchhoff,

$$|\mathcal{E}| - Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{v\ell B}{R} \ . \qquad (10.7)$$

Le courant circule en sens antihoraire dans le circuit.

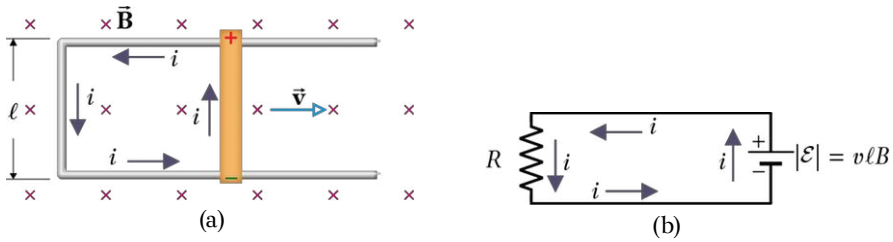


FIGURE 10.12

(a) La tige en mouvement est placée sur un rail conducteur, et un courant est généré. (b) Le circuit équivalent.

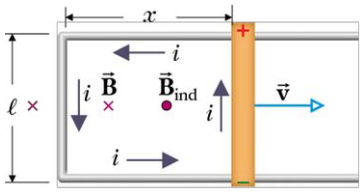


FIGURE 10.13
Lorsque la tige se déplace vers la droite, le flux magnétique à travers la boucle change, ce qui produit un courant induit antihoraire.

On peut aussi analyser la situation en appliquant la loi de Faraday. Lorsque la tige se déplace vers la droite, le flux magnétique à travers la maille augmente. Le courant induit doit produire un champ magnétique opposé au champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, donc un champ sortant de la page (*voir la figure 10.13*). Ce résultat est possible si le courant circule dans le sens antihoraire, ce qui est bien le cas.

L'aire de la maille est $A = \ell x$. Selon l'équation 10.3, la f.é.m. induite est

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}(B\ell x)}{\mathrm{d}t} = -\ell B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v\ell B\,, \tag{10.8}$$

car $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ représente le module de la vitesse de la tige. Le signe négatif est présent pour indiquer le sens de la f.é.m., selon la loi de Lenz. Le courant induit est alors

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{v\ell B}{R}\,,$$

ce qui correspond au courant obtenu dans l'équation 10.7.

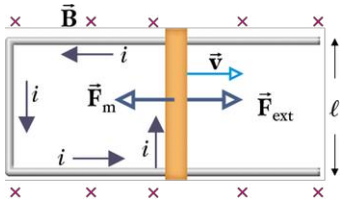


FIGURE 10.14
Il faut une force $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ pour que la tige se déplace à vitesse constante.

Le courant induit circule dans la tige en mouvement. Comme il y a un champ magnétique, la tige subit une force magnétique. Selon la règle de la main droite, cette force est orientée vers la gauche, comme il est indiqué à la figure 10.14. S'il n'y a pas d'autre force, la tige va ralentir ; son énergie cinétique se transforme en énergie électrique. Pour que la tige se déplace à vitesse constante, on doit appliquer une force extérieure $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, orientée vers la droite. Selon l'équation 9.16 de la page 311, le module de la force extérieure est

$$F_{\text{ext}} = F_{\text{m}} = i\ell B\sin(90°) = \frac{v\ell^2B^2}{R}\,. \tag{10.9}$$

La force extérieure accomplit un travail sur le circuit, car elle est dans le même sens que le déplacement de la tige. Le montage de la figure 10.14 est un *générateur* simple. Pour vérifier qu'il y a bien un transfert d'énergie entre l'agent extérieur et le circuit, on calcule la puissance fournie par l'agent extérieur. Selon le résultat obtenu dans le chapitre 8 du tome 1, la puissance fournie par l'agent extérieur est

$$P_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}v\cos(0°) = \frac{v^2\ell^2B^2}{R}\,.$$

Dans le circuit, la puissance électrique est dissipée en énergie thermique à cause de la résistance du circuit. Selon l'équation 6.30 de la page 212,

$$P_{\text{circuit}} = Ri^2 = R\left(\frac{v\ell B}{R}\right)^2 = \frac{v^2\ell^2B^2}{R}\,.$$

Il y a bien conservation de l'énergie : l'énergie fournie au circuit par l'agent extérieur est égale à l'énergie dissipée par le circuit.

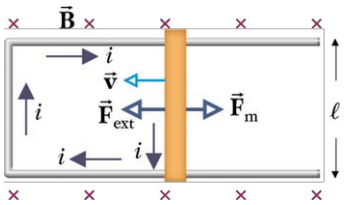


FIGURE 10.15
La tige se déplace vers la gauche. Le courant induit est en sens horaire, et la force magnétique est vers la droite, opposée à $\vec{\mathbf{v}}$.

Si on inverse la vitesse de la tige, comme le montre la figure 10.15, le flux magnétique dans la maille diminue, et le courant induit doit alors être en sens horaire. La force magnétique sur la tige est maintenant orientée vers la droite. La force extérieure doit être orientée vers la gauche, pour pousser la tige à vitesse constante. La force magnétique sur la tige est toujours orientée dans le sens opposé de la vitesse.

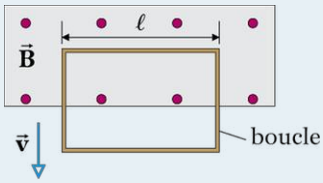
EXEMPLE 10.6 La chute d'une bobine

Une bobine rectangulaire, dont le plan est vertical, est en partie dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ (*voir la figure suivante*). La largeur de la bobine est ℓ, sa résistance est R et sa masse, m. On laisse tomber la bobine vers le bas. Sa vitesse augmente graduellement, jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse constante v_f.

a. Dans quel sens circule le courant induit dans la bobine ?

b. Quel est le courant dans la bobine lorsque celle-ci se déplace à vitesse $\vec{\mathbf{v}}$?

c. Quel est le module de la vitesse v_f ?



SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
ℓ R	sens du courant
m B	i v_f

Identifier la clé

Pour trouver le sens du courant induit, la **clé** est la loi de Lenz.

Résoudre le problème

1. Le champ $\vec{\mathbf{B}}$ est sortant.
2. Lorsque la boucle tombe, l'aire de la boucle dans le champ diminue. Le flux magnétique à travers la boucle diminue.
3. Le courant induit doit produire un champ magnétique dans le même sens que $\vec{\mathbf{B}}$.
4. Selon la règle de la main droite,

le courant est en sens antihoraire. (réponse)

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 10.16 montre la boucle dans le champ magnétique.

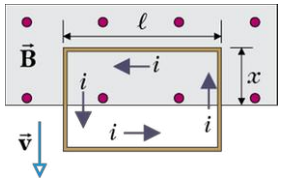


FIGURE 10.16
Le calcul de l'aire de la boucle dans le champ magnétique

Décortiquer le problème

À un instant donné, l'aire de la boucle traversée par le champ est $A = \ell x$. Lorsque la bobine tombe, le flux magnétique diminue, car l'aire de la boucle traversée par le champ diminue.

Identifier les clés

La première **clé** est la loi de Faraday, qui permet de trouver la f.é.m. induite lorsque la vitesse de la bobine est $\vec{\mathbf{v}}$:

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|, \qquad \text{(i)}$$

où le flux magnétique est

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = BA = B\ell x .$$

La deuxième **clé** est l'équation 10.6, qui permet de calculer le courant induit :

$$i_{ind} = \frac{|\mathcal{E}|}{R} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la f.é.m. induite (en valeur absolue) :

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{d}{dt}(B\ell x)\right| = \ell B \frac{dx}{dt} = v\ell B ,$$

car la dérivée de x par rapport au temps représente le module de la vitesse de la bobine. Le courant induit est alors

$$i_{ind} = \frac{v\ell B}{R} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Illustrer la situation

La figure 10.17 montre la force magnétique (vers le haut) et la force gravitationnelle vers le bas.

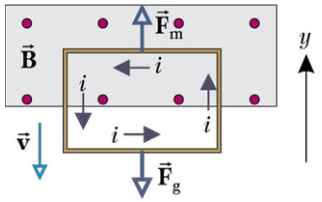


FIGURE 10.17
Le diagramme des forces de la boucle qui tombe

Décortiquer le problème

La vitesse est constante lorsque la bobine est à l'équilibre.

Identifier la clé

La **clé** est la première loi de Newton, pour la composante y :

$$F_{\text{rés},y} = \sum F_y = F_m - mg = 0 \,, \qquad \text{(iii)}$$

où F_m est donnée par l'équation 9.16 :

$$F_m = i\ell B \,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (iv) ainsi que le résultat de la partie **b.** dans l'équation (iii) :

$$\left(\frac{v\ell B}{R}\right)\ell B - mg = 0 \,.$$

En isolant v, nous obtenons

$$v = \frac{mgR}{\ell^2 B^2} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le résultat a du sens. Pour une certaine vitesse, si nous augmentons la résistance de la boucle, le courant sera plus faible, ce qui diminue la force magnétique. De même, si nous diminuons le champ magnétique ou la largeur de la boucle, nous réduisons la force magnétique.

Les courants de Foucault

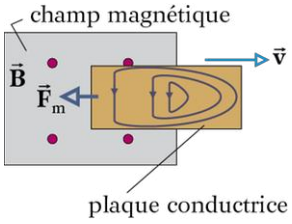


FIGURE 10.18
Une plaque conductrice se déplace vers l'extérieur d'un champ magnétique. Ce mouvement induit des courants de Foucault, ce qui produit une force $\vec{F}_m$ opposée à la vitesse.

Dans l'exemple 10.6, une force magnétique est opposée à la vitesse lorsqu'une boucle est en train de sortir d'une région où est présent un champ magnétique. La même chose se produit si on veut faire entrer une boucle dans un champ magnétique. La force magnétique est toujours opposée au mouvement de la boucle.

La même chose se produit lorsqu'on fait entrer ou sortir une plaque conductrice (en cuivre, par exemple) dans un champ magnétique, comme le montre la figure 10.18. Le déplacement de la plaque dans le champ magnétique induit des boucles de courants à l'intérieur du conducteur. Ces courants sont appelés les *courants de Foucault*, car le phénomène a été découvert par le physicien français Léon Foucault* en 1851. Ces courants génèrent une force magnétique $\vec{F}_m$, opposée à la vitesse de la plaque. De plus, comme le conducteur a une résistance, il y a dissipation de l'énergie en énergie thermique par l'effet Joule. La plaque va donc se réchauffer.

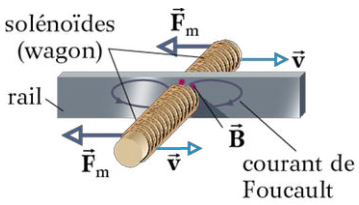


FIGURE 10.19
Les courants de Foucault dans un système de freinage d'un train

Les courants de Foucault sont utilisés dans les systèmes de freinage de train à haute vitesse. Comme le montre la figure 10.19, deux solénoïdes sont placés dans le wagon, de chaque côté du rail. Lorsque le train roule, aucun courant ne circule dans les solénoïdes. Durant le freinage, un courant intense circule dans chacun des solénoïdes, ce qui produit un champ intense entre eux, à travers le rail. Les courants de Foucault apparaissent dans le rail, ce qui engendre une force magnétique de freinage importante, surtout si le train se déplace rapidement. Comme la force diminue avec la vitesse, on ajoute habituellement des freins traditionnels pour immobiliser le train.

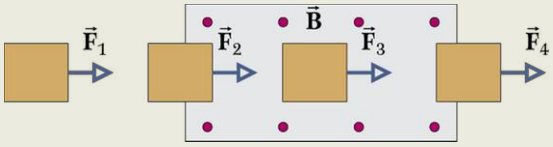
* Comme nous l'avons vu au chapitre 7 du tome 1, Foucault a aussi montré, à l'aide d'un pendule, que la Terre est en rotation.

De même, certains outils électriques comme des scies sont munis de freins magnétiques qui utilisent les courants de Foucault. La lame est freinée rapidement après que l'interrupteur a été ouvert, ce qui améliore la sécurité de ces outils.

Les courants de Foucault sont nuisibles dans les moteurs et les transformateurs, car il y a conversion d'énergie électrique en énergie thermique, ce qui diminue le rendement de ces appareils. De plus, les conducteurs peuvent surchauffer à cause de l'énergie dissipée en énergie thermique. Pour réduire ces effets, les conducteurs de ces appareils sont laminés, c'est-à-dire qu'ils sont fabriqués sous forme de minces couches conductrices, séparées par un isolant. De cette façon, les courants de Foucault sont confinés à de petites boucles seulement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.4

La figure suivante montre quatre plaques conductrices identiques qui se déplacent à la même vitesse constante, orientée vers la droite, grâce à une force. Le champ magnétique est uniforme dans une région donnée. Classez les forces par ordre croissant de leur module.



10.6 Les générateurs

Nous avons vu à la section 10.5 un générateur, un montage qui transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans ce montage, une f.é.m. est induite lorsque la tige conductrice se déplace, car le flux à travers une boucle change. Cependant, il est plus pratique de modifier le flux magnétique à travers une bobine que de modifier son aire en faisant tourner celle-ci dans un champ magnétique constant.

La figure 10.20 montre le schéma d'un générateur simple. Ce dernier ressemble beaucoup au moteur électrique que nous avons vu à la section 9.6, sauf qu'on remplace la source de f.é.m. par un circuit qui utilisera l'énergie électrique, et on ajoute une force extérieure qui fait tourner la bobine. Dans une centrale électrique, la force extérieure est fournie par un courant d'eau (centrale hydroélectrique), le vent (éolienne) ou de la vapeur sous pression produite par une chaudière (centrale thermique ou centrale nucléaire).

Supposons une bobine dont l'aire est A et qui est composée de N spires. La force extérieure fait tourner la bobine à une vitesse angulaire ω constante, de telle sorte

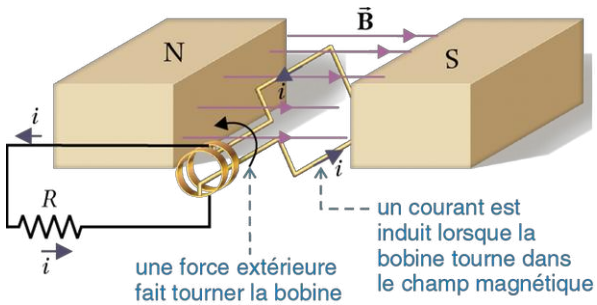


FIGURE 10.20
Le schéma d'un générateur à courant alternatif simple

que l'orientation de la bobine par rapport au champ magnétique est $\theta = \omega t$ (*voir au besoin le chapitre 11 du tome 1*). Le flux magnétique à travers une spire est

$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos(\omega t)\,.$$

La f.é.m. induite est donnée par la loi de Faraday :

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -NBA\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos(\omega t)\right] = NBA\omega\sin(\omega t)\,. \qquad (10.10)$$

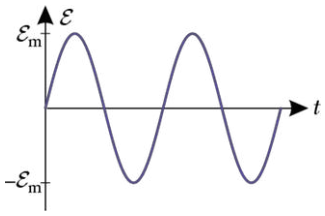


FIGURE 10.21
La f.é.m. produite par un générateur à courant alternatif

La f.é.m. varie de façon sinusoïdale, entre $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m = NBA\omega$ et $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_m = -NBA\omega$, comme le montre le graphique de la figure 10.21. La valeur maximale $\mathcal{E}_m$ est aussi appelée l'*amplitude de la f.é.m.*, et elle se produit lorsque $\sin(\omega t) = 1$.

Le montage est un générateur à courant alternatif. Nous allons étudier en détail les circuits en courant alternatif au chapitre 12. Dans un générateur à courant alternatif, le sens du courant change à chaque demi-cycle. On peut fabriquer un générateur à courant continu en ajoutant un commutateur à anneaux entre la bobine et le circuit extérieur, comme on l'a vu dans le cas d'un moteur électrique à courant continu. La f.é.m. dans le circuit varie en fonction du temps, mais le sens du courant reste le même.

Défi animé 10.3
Un aimant qui tourne à vitesse régulière près d'une bobine génère-t-il une f.é.m. induite constante ?

Le même montage peut servir à la fois de moteur et de générateur. C'est le cas pour le moteur électrique d'une voiture hybride. Dans une voiture à essence, les freins fonctionnent par frottement. Durant le freinage, l'énergie cinétique de la voiture est dissipée en énergie thermique dans les freins. Cette énergie ne peut plus être utilisée pour faire avancer le véhicule. Dans une voiture hybride (ou électrique), les freins sont reliés au moteur électrique. Lorsque les freins sont utilisés, le moteur devient un générateur, et l'énergie cinétique de la voiture est transformée en énergie électrique, qui sert à recharger les batteries. Ceci augmente grandement l'efficacité de la voiture lorsque cette dernière est conduite dans une zone urbaine, qui nécessite de nombreux départs et arrêts.

EXEMPLE 10.7 Un générateur d'appoint

Quand une panne d'électricité survient, un générateur d'appoint est utilisé pour faire fonctionner des appareils électriques. Le générateur produit une f.é.m. sinusoïdale ayant une valeur maximale de 170 V et une fréquence de 60,0 Hz. Il utilise une bobine carrée de 15,0 cm de côté, comportant 40,0 spires, qui tourne dans un champ magnétique uniforme. Quel est le module du champ magnétique ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$N = 40{,}0$	B
$A = (0{,}150\ \mathrm{m})^2 = 0{,}0225\ \mathrm{m}^2$	
$\mathcal{E}_m = 170\ \mathrm{V}$	
$\omega = 2\pi f = 120\pi\ \mathrm{rad/s}$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.10 qui donne la f.é.m. d'un générateur à courant alternatif :

$$\mathcal{E} = NBA\omega\sin(\omega t)\,.$$

La valeur est maximale $(\mathcal{E} = \mathcal{E}_m)$ lorsque le sinus est égal à 1.

Résoudre le problème

Nous isolons B et remplaçons les valeurs :

$$B = \frac{\mathcal{E}_m}{NA\omega}$$

$$B = \frac{170\ \mathrm{V}}{40{,}0 \times 0{,}0225\ \mathrm{m}^2 \times 120\pi\ \mathrm{rad/s}} = 0{,}501\ \mathrm{T}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous répondons à la question. L'ordre de grandeur semble correct.

10.7 Le champ électrique induit

À l'exemple 10.3, nous avons vu qu'un courant est induit dans une bobine lorsque celle-ci entoure une région où le champ magnétique varie dans le temps. De même, lorsqu'on approche un aimant d'une bobine, un courant est induit dans la bobine. Dans ces deux cas, les électrons de conduction ont besoin d'une force pour se déplacer. Ce n'est pas une force magnétique, car dans les deux cas, la bobine (et donc les électrons) est immobile (la force magnétique sur une charge est proportionnelle à la vitesse de la charge). C'est plutôt une force électrique qui fait déplacer les électrons de conduction.

À la figure 10.22, une boucle conductrice circulaire immobile, de rayon r, est placée autour d'un long solénoïde qui engendre un champ magnétique sortant. Le solénoïde a un rayon r_s, ce qui engendre un champ magnétique confiné à un cercle de rayon $r_s < r$. Il n'y a donc aucun champ magnétique à la position de la boucle. Supposons que le courant dans le solénoïde augmente, de telle sorte que le champ magnétique augmente aussi. Selon la loi de Lenz, le flux magnétique à travers la boucle augmente et il y a un courant induit horaire, pour produire un champ magnétique induit opposé au champ $\vec{\mathbf{B}}$ du solénoïde. Comme $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}}$ vis-à-vis de la boucle, il faut un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ en sens horaire. C'est ce champ qui exerce une force électrique $\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}}$ sur les électrons de conduction, et ces derniers vont circuler dans le sens opposé au champ (en sens antihoraire) et générer le courant.

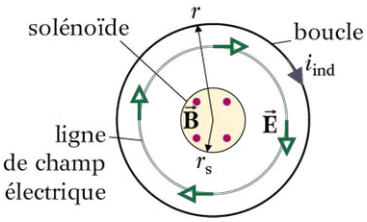


FIGURE 10.22
Le champ magnétique variable induit un champ électrique qui produit le courant induit dans la boucle.

Le champ électrique produit par un champ magnétique variable exerce une force électrique, mais ce champ a des caractéristiques différentes du champ électrique produit par des charges électriques. Comme le montre la figure 10.22, le champ électrique tourne autour du solénoïde, ce qui signifie que les lignes de champ électrique sont des courbes fermées. Ces lignes de champ électrique sont semblables aux lignes de champ magnétique, alors que les lignes d'un champ électrique produit par des charges électriques débutent aux charges positives et se terminent aux charges négatives.

Regardons une charge q qui se déplace dans la boucle et qui effectue une rotation complète. Le champ électrique produit un travail $W = qE(2\pi r) = q\mathcal{E}$. Le champ électrique induit est donc une source de f.é.m. De façon générale, on calcule la f.é.m. à l'aide d'une intégrale curviligne sur un parcours fermé :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mathcal{E} \, . \tag{10.11}$$

Le champ induit n'est pas conservatif, contrairement au champ électrique produit par des charges électriques. On ne peut pas associer un potentiel électrique au champ électrique induit, contrairement au champ électrique produit par des charges électriques.

La loi de Faraday peut être réécrite en fonction du champ électrique induit :

$$\oint_{\text{boucle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \, .$$

Comme la boucle est immobile, on peut faire entrer la dérivée à l'intérieur de l'intégrale. Cette dérivée devient alors une dérivée partielle, étant donné que le champ magnétique peut dépendre des coordonnées x, y, z, et du temps t.

La loi de Faraday relie alors le champ électrique induit et la dérivée du champ magnétique par rapport au temps :

Loi de Faraday

$$\oint_{\text{boucle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \,. \qquad (10.12)$$

L'équation 10.12 a la même forme que le théorème d'Ampère (l'équation 8.23 de la page 274), avec $\vec{\mathbf{B}}$ remplacé par $\vec{\mathbf{E}}$ et i_{inc} remplacé par l'opposé du flux de la dérivée du champ magnétique. Il est donc possible d'obtenir le champ électrique induit dans des situations symétriques, pour lesquelles l'intégrale curviligne sera facile à calculer.

La loi de Lenz est incluse dans l'équation 10.12 par le signe négatif. Les lignes de champ électrique tournent dans le sens opposé de la variation du flux de la dérivée du champ magnétique. L'orientation du vecteur $d\vec{\mathbf{s}}$ et celle du vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$ sont reliées par la règle de la main droite.

On enroule les doigts de la main droite selon le sens du parcours d'intégration $d\vec{\mathbf{s}}$ pour l'intégrale curviligne. Le pouce donne le sens du vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$, utilisé pour le calcul du flux.

On peut donc dire qu'il y a deux façons de produire un champ électrique :

- avec des charges électriques, les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives ;
- avec un champ magnétique variable, les lignes de champ forment des courbes fermées.

EXEMPLE 10.8 Le champ électrique autour d'un solénoïde

Un long solénoïde, de rayon r_s, est parcouru par un courant $i = i_m \sin(\omega t)$, où i_m et ω sont des constantes. Il possède n spires par unité de longueur.

a. Calculez le champ électrique à une distance r du centre du solénoïde, à l'extérieur de ce dernier.

b. Calculez le champ électrique à une distance r du centre du solénoïde, à l'intérieur de ce dernier.

SOLUTION a.

Illustrer la situation

Pour obtenir le champ électrique à une distance $r > r_s$, nous avons besoin d'une boucle d'intégration circulaire, de rayon r, centrée sur le solénoïde. La figure 10.23 montre le parcours d'intégration.

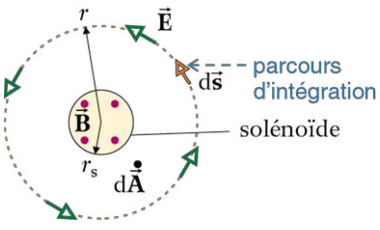


FIGURE 10.23
Le parcours d'intégration pour le calcul du champ électrique

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$i = i_m \sin(\omega t)$	r_s	$\vec{\mathbf{E}}$
$r > r_s$	n	

Par symétrie, le champ électrique doit être en direction tangentielle : si nous tournons le solénoïde ou faisons soit une translation, soit une réflexion par rapport à un plan parallèle ou perpendiculaire au solénoïde, cela ne change rien. Pour respecter la symétrie, le module du champ ne doit pas changer le long du parcours d'intégration.

Nous choisissons le parcours d'intégration en sens antihoraire, de telle sorte que le vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$ est sortant. Le vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$ est donc dans le même sens que le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ à l'intérieur du solénoïde.

Identifier les clés

La première clé est la loi de Faraday (*l'équation 10.12*) :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 8.26, qui permet d'obtenir le champ magnétique produit par un long solénoïde :

$$B = \mu_0 n i \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'intégrale curviligne du champ électrique, en tenant compte du fait que celui-ci est parallèle à $d\vec{\mathbf{s}}$ et qu'il ne change pas sur tout le parcours :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} E\, ds \cos(0°) = E \oint_{\text{cercle}} ds$$
$$= E(2\pi r) \,, \qquad \text{(iii)}$$

où r est le rayon de la boucle.

Pour calculer le membre de droite de la loi de Faraday, nous devons d'abord calculer la dérivée du champ magnétique :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{\mathbf{u}}_n$$
$$= \mu_0 n i_m \frac{d \sin(\omega t)}{dt} \vec{\mathbf{u}}_n$$
$$= \mu_0 n i_m \omega \cos(\omega t)\, \vec{\mathbf{u}}_n \,. \qquad \text{(iv)}$$

où $\vec{\mathbf{u}}_n$ est le vecteur normal sortant de la page. Pour calculer l'intégrale de surface, nous remarquons que le champ magnétique du solénoïde est confiné dans un cercle de rayon r_s. On calcule uniquement l'intégrale sur la surface du solénoïde. De plus, la dérivée du champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et elle est dans le même sens que le vecteur $d\vec{\mathbf{A}}$. On obtient alors

$$\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int \frac{\partial B}{\partial t} dA \cos(0°) = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 . \qquad \text{(v)}$$

En insérant les équations (iii), (iv) et (v) dans l'équation (i), nous obtenons

$$E 2\pi r = -\mu_0 n i_m \omega \cos(\omega t)\, \pi r_s^2$$

$$E = -\frac{\mu_0 r_s^2 n i_m \omega}{2r} \cos(\omega t) \,.$$

Le signe négatif indique que le champ est opposé à $d\vec{\mathbf{s}}$ (donc en sens horaire) lorsque le cosinus est positif. Le champ est en direction tangentielle. Nous pouvons ajouter le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ pour indiquer cette direction (*voir la sous-section sur les vecteurs unitaires polaires dans la section 2.1 du tome 1*). Le champ électrique est alors

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu_0 r_s^2 n i_m \omega}{2r} \cos(\omega t) \vec{\mathbf{u}}_\theta \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

Pour obtenir le champ électrique à l'intérieur du solénoïde, nous utilisons un parcours d'intégration circulaire, de rayon $r < r_s$, comme le montre la figure 10.24.

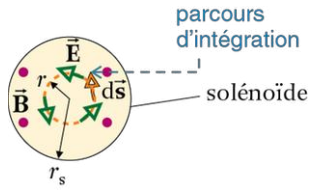


FIGURE 10.24
Le parcours d'intégration pour calculer le champ électrique à l'intérieur du solénoïde

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$i = i_m \sin(\omega t)$	r_s	$\vec{\mathbf{E}}$
$r < r_s$	n	

Par symétrie, le champ électrique doit être tangent au parcours d'intégration circulaire.

Identifier les clés

Nous utilisons les mêmes clés qu'en a.

Résoudre le problème

L'intégrale curviligne se calcule de la même façon qu'en a. :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} E\, ds \cos(0°) = E \oint_{\text{cercle}} d\vec{\mathbf{s}}$$
$$= E\,(2\pi r) \,. \qquad \text{(vi)}$$

La dérivée du champ magnétique est donnée par l'équation (iv). L'intégrale de surface doit être calculée

pour un cercle de rayon $r < r_s$. La dérivée du champ est uniforme dans ce cercle et le champ est partout dans ce cercle. Nous obtenons :

$$\int_{\text{cercle}} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial B}{\partial t} A_{\text{cercle}} \cos(0°)$$
$$= \left[\mu_0 n i_m \omega \cos(\omega t)\right](\pi r^2) \qquad \text{(vii)}$$

En insérant les équations (vi) et (vii) dans l'équation (i), nous trouvons

$$E\,(2\pi r) = -\mu_0 \pi r^2 n i_m \omega \cos(\omega t)$$
$$E = -\frac{1}{2}\mu_0 r n i_m \omega \cos(\omega t)\,.$$

Le champ étant dans la direction tangentielle, nous obtenons

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\mu_0 r n i_m \omega \cos(\omega t)\,\vec{\mathbf{u}}_\theta\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Comme le champ magnétique dans le solénoïde varie de façon sinusoïdale, le champ électrique varie selon une fonction cosinus. Il est intéressant de regarder le module maximal du champ électrique, lorsque le cosinus vaut ± 1 :

$$E_{\max} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 r_s^2 n i_m \omega}{2r} & (r \geq r_s) \\ \dfrac{\mu_0 r n i_m \omega}{2} & (r \leq r_s) \end{cases}.$$

La figure 10.25 illustre ce résultat. Remarquez que le champ électrique est nul au centre du solénoïde. De plus, le champ diminue en $1/r$ à l'extérieur de la région où il y a un champ magnétique. Le champ induit diminue moins rapidement que le champ produit par une charge ponctuelle (qui diminue selon $1/r^2$). Ce résultat sera important lorsque nous allons étudier les ondes électromagnétiques, dans le tome 3.

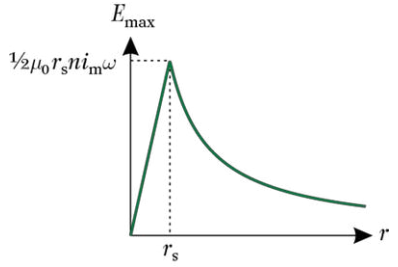


FIGURE 10.25
Le module maximal du champ électrique en fonction de la distance du centre du solénoïde

Un modèle pour le diamagnétisme

Nous avons vu à la section 9.8 que certains éléments, comme le cuivre, acquièrent un moment dipolaire magnétique opposé à un champ magnétique extérieur. On peut expliquer ce comportement à l'aide d'un modèle simple du mouvement orbital des électrons. La figure 10.26a montre un électron qui tourne sur une orbite circulaire, en sens horaire. Nous avons vu à la section 9.7 que ce mouvement produit un moment dipolaire magnétique, opposé au moment cinétique de l'électron, car la charge électrique d'un électron est négative. Le moment magnétique est donc vers le haut.

Supposons que l'électron est placé dans une région où le champ magnétique augmente graduellement et qu'il est orienté dans le même sens que $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. Selon la loi de Faraday, cela induit un champ électrique en sens horaire. L'électron subit une force électrique, opposée au champ électrique, donc en sens antihoraire, comme le montre la figure 10.26b. Cette force est opposée à la vitesse orbitale de l'électron. Ce dernier va ralentir, ce qui diminue le moment cinétique et donc le moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ de l'électron.

Pour un électron qui tourne en sens antihoraire, le moment magnétique est vers le bas. L'effet du champ magnétique vers le haut, qui augmente graduellement, produit une augmentation de la vitesse de l'électron, ce qui fait augmenter le moment magnétique orienté vers le bas.

En l'absence d'un champ magnétique extérieur, le moment magnétique orbital résultant des électrons est nul, car l'orientation des orbites est aléatoire. Lorsqu'un

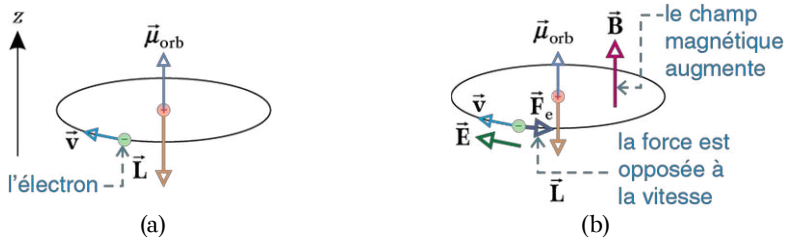


FIGURE 10.26

(a) Un électron qui tourne en sens horaire a un moment dipolaire vers le haut. (b) Le champ magnétique vers le haut augmente graduellement ; le champ électrique induit exerce une force opposée à la vitesse, ce qui réduit la vitesse et le moment dipolaire magnétique.

champ magnétique augmente graduellement, les moments magnétiques dans le même sens que $\vec{\mathbf{B}}$ diminuent, alors que les moments magnétiques opposés augmentent. L'effet résultant est un moment magnétique résultant opposé au champ magnétique extérieur.

La mécanique quantique est nécessaire à la compréhension quantitative du diamagnétisme. Le modèle présenté est très simple, et on doit se limiter à une compréhension qualitative.

10.8 Le théorème d'Ampère-Maxwell

Selon le chapitre 2 et la section 10.7, le champ électrique peut être produit de deux façons :

- par des charges électriques : les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives ;
- par un champ magnétique variable : les lignes de champ forment des courbes fermées.

Pour produire un champ magnétique, nous avons vu au chapitre 8 qu'il faut un courant électrique, c'est-à-dire un mouvement de charges électriques. Le champ magnétique peut être calculé à l'aide de la loi de Biot-Savart ou du théorème d'Ampère. Dans le chapitre 8, les courants étaient toujours constants dans le temps. On peut se demander si ces lois restent valides pour des courants qui varient dans le temps. Est-il aussi possible de produire un champ magnétique à partir d'un champ électrique variable ?

Cette dernière question a été posée par le physicien écossais James Clerck Maxwell (1831-1879), une vingtaine d'années après la découverte de l'induction électromagnétique par Faraday. Maxwell voulait formuler mathématiquement et de façon précise les lois de l'électricité et du magnétisme à partir de la notion de champ, introduite par Faraday. Il a émis l'hypothèse que par symétrie entre le champ électrique et le champ magnétique, un champ électrique variable devait produire un champ magnétique et qu'il fallait modifier le théorème d'Ampère lorsque le courant variait dans le temps.

Pour comprendre le raisonnement de Maxwell, nous revenons sur le théorème d'Ampère. Nous avons vu à la section 8.5 que la circulation du champ magnétique sur une boucle d'Ampère est proportionnelle au courant qui passe à travers une surface délimitée par le parcours d'intégration :

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{inc} \ .$$

Dans la figure 10.27a, un courant i constant parcourt un fil conducteur. La figure montre deux surfaces, S_1 et S_2, délimitées par le même parcours d'intégration, tracé en pointillé. Lorsque le courant i est continu, les deux surfaces sont traversées par le même courant $i_{inc} = i$, et le champ magnétique est illustré à la figure 10.27b.

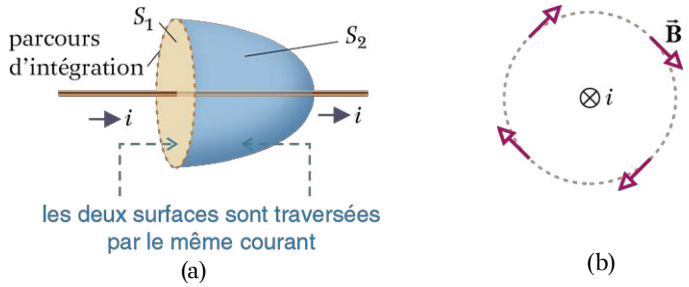


FIGURE 10.27

(a) Pour calculer le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère, on doit calculer le courant i_{inc} qui traverse la surface S_1 ou la surface S_2. (b) Le champ magnétique produit par le courant.

Prenons maintenant un circuit dans lequel un condensateur est en train de se charger, comme à la figure 10.28. Cette fois-ci, le courant n'est pas constant ; il varie dans le temps, comme nous l'avons vu à la section 7.7. Nous voulons de nouveau calculer le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère. Pour des points éloignés du condensateur, le champ magnétique devrait être semblable à celui de la figure 10.27b, avec un module qui varie dans le temps. Le courant qui traverse la surface S_1 est $i_{inc} = i$. Par contre, il n'y pas de courant qui traverse la surface S_2, car les charges s'accumulent sur l'armature du condensateur. Selon le théorème d'Ampère,

$$\text{surface } S_1 : \quad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{inc} = \mu_0 i$$

$$\text{surface } S_2 : \quad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{inc} = 0 \ .$$

On obtient deux résultats différents, selon la surface utilisée. Ceci est incohérent, car on calcule la circulation du champ pour une même courbe fermée. Selon Maxwell, on doit ajouter un terme dans le membre droit du théorème d'Ampère.

Pour la surface S_2, il n'y a pas de courant qui la traverse, mais il y a un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, et ce champ varie dans le temps lorsque le condensateur est en train de se charger. Par analogie avec la loi de Faraday, il est intéressant de calculer la dérivée du champ électrique par rapport au temps pour des points sur la surface S_2.

Pour un condensateur plan, le champ électrique est uniforme entre les armatures, et il est donné par l'équation 5.5 de la page 167 :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\imath} = \frac{q}{\epsilon_0 A}\vec{\imath} \ ,$$

où q est la charge sur l'armature du condensateur. La dérivée du champ électrique par rapport au temps est :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A}\frac{dq}{dt}\vec{\imath} \ .$$

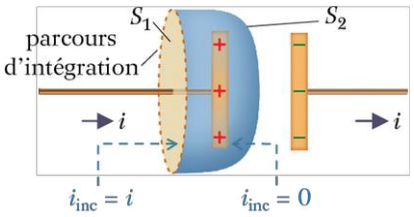


FIGURE 10.28
Pour un condensateur en train de se charger, il n'y a pas de courant qui traverse la surface S_2.

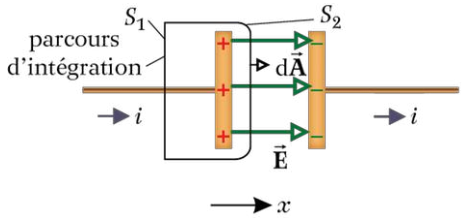


FIGURE 10.29
Les deux surfaces S_1 et S_2 pour calculer la circulation du champ magnétique

Or, selon le principe de conservation de la charge, cette dernière change sur l'armature du condensateur à cause du courant électrique $i = dq/dt$. On voit donc que la dérivée du champ électrique a donc la forme d'une densité de courant (*voir l'équation 6.7*).

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{i}{A}\vec{\imath} = \frac{\vec{\mathbf{J}}_d}{\epsilon_0}.$$

Maxwell a donné le nom de *densité de courant de déplacement* à l'expression $\epsilon_0 \partial\vec{\mathbf{E}}/\partial t$, même s'il n'y a rien qui se déplace entre les armatures du condensateur. On obtient le *courant de déplacement* en calculant l'intégrale de surface du courant de déplacement (*l'équivalent de l'équation 6.10*) :

$$i_d = \int \vec{\mathbf{J}}_d \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad (10.13)$$

Le courant i est alors appelé un *courant de conduction*. On obtient donc le théorème d'Ampère-Maxwell en ajoutant le courant de déplacement au courant de conduction

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 \, (i_{inc} + i_d)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{inc} + \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad (10.14)$$

Théorème d'Ampère-Maxwell

Cette équation permet d'obtenir la circulation du champ magnétique le long d'une boucle d'Ampère en fonction du courant de conduction et du courant de déplacement qui traversent n'importe quelle surface délimitée par la boucle d'Ampère. Si on revient à la situation du condensateur qui se charge, comme à la figure 10.29, on vérifie que la circulation du champ magnétique est la même pour les deux surfaces S_1 et S_2 qui délimitent le parcours d'intégration. Pour la surface S_1, $i_{inc} = i$ et $\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{0}}$, de telle sorte que

$$\text{surface } S_1 \qquad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 \, i_{inc} + \epsilon_0 \mu_0 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 (i + 0) = \mu_0 i$$

Si à la place, on calcule l'intégrale de surface sur la surface S_2, $i_{inc} = 0$, mais la dérivée du champ électrique est $\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{dq}{dt}/(\epsilon_0 A)\,\vec{\imath}$, de telle sorte que

$$\text{surface } S_2 \qquad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 \, i_{inc} + \epsilon_0 \mu_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 \left(0 + \epsilon_0 \frac{\frac{dq}{dt}}{\epsilon_0} \right) = \mu_0 \, i.$$

MISE EN GARDE

Le courant de déplacement n'est pas un véritable courant, produit par un déplacement de charge, mais plutôt un facteur proportionnel à la dérivée du champ électrique. Le courant de déplacement est équivalent à un courant électrique dans le sens qu'il produit aussi un champ magnétique.

On appelle *champ magnétique induit* un champ magnétique produit par un champ électrique qui varie dans le temps. La forme du champ magnétique induit est très semblable à celle du champ électrique induit, donné par la loi de Faraday. À la figure 10.30, on compare ces champs induits en fonction des champs variables. Lorsque les champs $\vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$ augmentent dans une région, cela induit respectivement un champ électrique et un champ magnétique, ce qui forme des lignes de champ fermées. Les sens des champs induits sont opposés à cause de la loi de Lenz : le champ électrique induit est opposé à l'augmentation du flux magnétique à travers une surface (le signe négatif dans la loi de Faraday), alors que le champ magnétique induit est dans le sens de l'augmentation du flux électrique (il y a un signe positif dans le théorème d'Ampère-Maxwell).

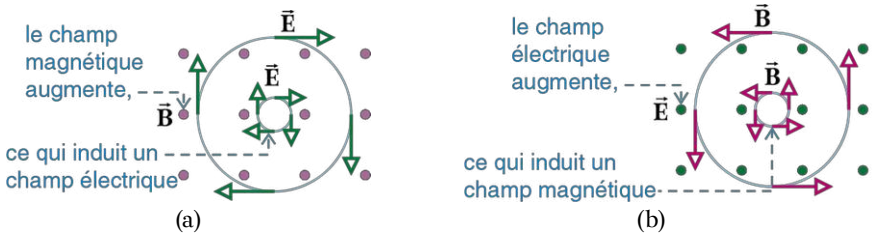


FIGURE 10.30

(a) Un champ magnétique variable induit un champ électrique. (b) Un champ électrique variable induit un champ magnétique.

EXEMPLE 10.9 À l'intérieur d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux armatures circulaires et parallèles, qui ont un rayon de 3,00 cm et sont séparées par une distance de 1,20 mm. Calculez le module du champ magnétique à une distance de 1,20 cm de l'axe du condensateur au moment où le condensateur est en train de se charger à un taux de 2,50 C/s.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 10.31 présente le schéma de la situation et le parcours d'intégration, un cercle de rayon r, qui correspond à l'endroit où nous voulons calculer le champ magnétique.

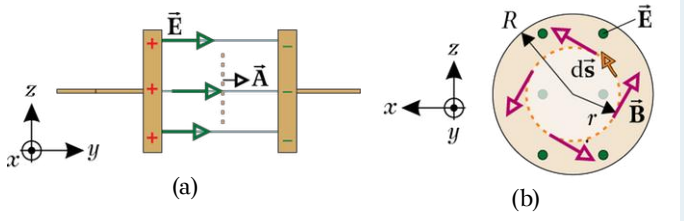


FIGURE 10.31

(a) Une vue de face du schéma de la situation de l'exemple 10.9. (b) Une vue en coupe de l'intérieur du condensateur, avec le parcours d'intégration.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$R = 0{,}0300$ m	$d = 0{,}00120$ m	B
$r = 0{,}0120$ m	$\dfrac{dq}{dt} = 2{,}50$ C/s	

Par symétrie, le champ magnétique doit être en direction tangentielle, car si nous effectuons une rotation du condensateur autour de l'axe, cela ne change pas la configuration. Dans la figure 10.31b, le parcours d'intégration est un cercle de rayon r, en sens antihoraire, de telle sorte que le vecteur $\vec{\mathbf{A}} = \pi r^2 \vec{\jmath}$ a la même orientation que le champ électrique. Le champ électrique entre les armatures est uniforme :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\jmath} = \frac{q}{\epsilon_0 \pi R^2}\vec{\jmath}\ ,$$

où πR^2 est l'aire d'une armature.

Identifier la clé

La **clé** est le théorème d'Ampère-Maxwell :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0\, i_{\text{inc}} + \epsilon_0\mu_0 \int_{\text{cercle}} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la circulation du champ magnétique, sachant que le champ magnétique doit avoir le même module le long du parcours d'intégration :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{\text{cercle}} B\, ds\, \cos(0°) = B \oint_{\text{cercle}} ds$$
$$= B2\pi r\ . \qquad \text{(ii)}$$

Aucun courant ne passe à travers la surface du disque délimitée par la courbe d'Ampère. Le champ électrique est uniforme entre les armatures, tout comme sa dérivée par rapport au temps :

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\pi R^2}\frac{dq}{dt}\vec{\jmath}\ . \qquad \text{(iii)}$$

L'intégrale de surface est alors

$$\epsilon_0 \int_{\text{cercle}} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\pi R^2}\frac{dq}{dt} \int_{\text{cercle}} dA = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}\frac{dq}{dt}\ . \qquad \text{(iv)}$$

Nous insérons les équations (ii) et (iv) dans l'équation (i) et nous isolons B :

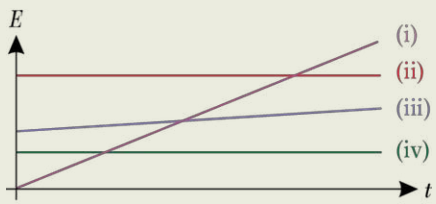
$$B2\pi r = \frac{\mu_0 r^2}{R^2}\frac{dq}{dt}$$
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\left(\frac{dq}{dt}\right)$$
$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A} \times 0{,}00120\ \text{m}}{2\pi(0{,}030\,0\ \text{m})^2}(2{,}50\ \text{C/s})$$
$$B = 6{,}67 \times 10^{-6}\ \text{T} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien à la question. Le champ magnétique induit est très faible. Il devient important dans les situations où le champ électrique varie très rapidement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.5

La figure suivante présente le module du champ électrique entre les armatures d'un condensateur en fonction du temps. Classez les situations selon un ordre croissant du module du champ magnétique entre les armatures.



10.9 Les équations de Maxwell

Jusqu'aux années 1850, l'électricité et le magnétisme étaient considérés comme deux domaines différents de la physique, basés sur plusieurs lois et règles. James Clerk Maxwell (1831-1879) (*voir la figure 10.32 à la page suivante*)

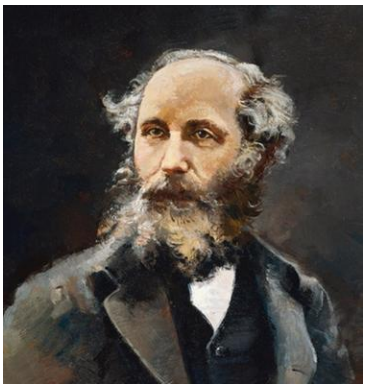


FIGURE 10.32
James Clerk Maxwell (1831-1879), physicien écossais

a commencé l'étude de l'électricité et du magnétisme en 1855 en publiant un premier article intitulé « On Faraday's lines of force », où il a introduit le concept de courant de déplacement. En 1873, il a publié le traité *A Treatise on Electricity and Magnetism*, dans lequel il expose la théorie de l'électromagnétisme, qui unifie l'électricité et le magnétisme. Au départ, sa théorie comportait vingt équations. Par la suite, le physicien anglais Oliver Heaviside (1850-1925), en utilisant l'analyse vectorielle, a ramené ce nombre à quatre. Ces quatre équations, que nous avons vues lorsque nous avons étudié l'électricité et le magnétisme, sont aujourd'hui appelées les *équations de Maxwell* :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(théorème de Gauss)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \text{(théorème de Gauss en magnétisme)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \text{(loi de Faraday)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i_{\text{inc}} + \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \text{(théorème d'Ampère-Maxwell).}$$

Les équations de Maxwell font partie des équations fondamentales de la physique, car elles décrivent complètement le champ électrique et le champ magnétique. On peut les résumer de la façon suivante :

- Le théorème de Gauss : les particules chargées produisent un champ électrique.
- Le théorème de Gauss en magnétisme : les monopôles magnétiques n'existent pas.
- La loi de Faraday : un champ magnétique variable produit un champ électrique.
- Le théorème d'Ampère-Maxwell : les champs magnétiques sont produits par les courants et par les champs électriques variables.

Pour compléter l'électromagnétisme, il ne manque qu'une équation permettant de calculer la force exercée par les champs sur une particule chargée. Cette équation est celle de la force de Lorentz :

Force de Lorentz

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \,. \qquad (10.15)$$

Cette équation indique qu'une charge subit une force électrique (proportionnelle au champ électrique) et une force magnétique (proportionnelle à la vitesse et au champ magnétique).

Les cinq équations représentent la théorie classique complète de l'électromagnétisme. Elles décrivent l'électrostatique, les circuits, le magnétisme et l'induction électromagnétique. Les autres lois déjà abordées, telles que la loi de Coulomb, les lois de Kirchhoff ou la loi de Biot-Savart, découlent de ces équations.

Les ondes électromagnétiques

À l'aide de sa théorie, Maxwell a découvert que les champs électrique et magnétique pouvaient être générés en l'absence de charge électrique. En effet, un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ variable peut produire un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, et ce champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ variable peut produire un champ électrique. La variation de ce champ électrique produit un champ magnétique, et ainsi de suite. Cette

situation correspond à une *onde électromagnétique*, c'est-à-dire une oscillation de champs qui se propagent. Selon la théorie de Maxwell, cette configuration doit être constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui sont perpendiculaires entre eux. De plus, les champs sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde (*voir la figure 10.33*).

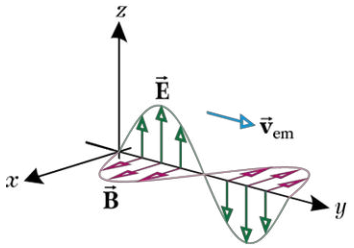


FIGURE 10.33
Une onde électromagnétique

Maxwell a été capable de calculer la vitesse de propagation de ces ondes. Il a trouvé

$$v_{em} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s} .$$

Cette vitesse est égale à la vitesse de la lumière. Pour Maxwell, ce ne pouvait pas être une coïncidence. La lumière devait être une onde électromagnétique. Les physiciens du 19e siècle avaient déjà trouvé que la lumière était une onde. Maxwell venait de découvrir ce qui constituait cette onde: un champ électrique et un champ magnétique oscillants.

La prédiction de Maxwell a été vérifiée entre 1886 et 1888 par le physicien allemand Heinrich Hertz (1857-1894). Hertz a produit et détecté des ondes radio à partir de circuits électriques, et il a établi que ces ondes se déplacent à la vitesse de la lumière. L'étude des ondes électromagnétiques, incluant la lumière visible, sera vue en détail dans le tome 3.

RÉSUMÉ

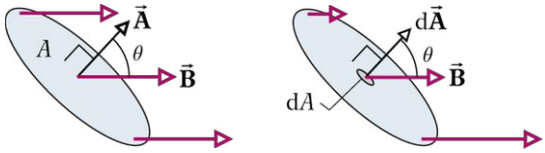
Dans ce chapitre, nous avons étudié la relation entre le champ électrique et le champ magnétique au moyen de l'induction électromagnétique.

LES DÉFINITIONS

Le **flux magnétique** à travers une surface est proportionnel au nombre de lignes de champ magnétique qui traversent une surface :

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = BA\cos\theta \qquad \text{(champ uniforme)}$$

$$= \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}\,. \qquad \text{(équation générale)}$$



($\vec{\mathbf{B}}$ uniforme) (cas général)

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Selon la **loi de Faraday**, un champ magnétique variable induit un champ électrique :

$$\oint_{\text{boucle}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

- Selon le **théorème d'Ampère-Maxwell**, un champ magnétique est créé par un courant de conduction ou par un champ électrique variable :

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \mu_0\, i_{\text{inc}} + \epsilon_0\mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

LES RÉSULTATS

- Il y a une **f.é.m. induite** dans une bobine lorsque le flux magnétique à travers la boucle change :

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\,,$$

où N est le nombre de spires de la bobine.

- Il y a trois façons d'obtenir une f.é.m. induite :
  - le module du champ magnétique à travers la bobine change ;
  - l'aire de la bobine dans le champ magnétique change ;
  - l'orientation de la bobine par rapport au champ magnétique change.
- Lorsque la résistance de la bobine est R, le **courant induit** est

$$i_{\text{ind}} = \frac{|\mathcal{E}|}{R}\,.$$

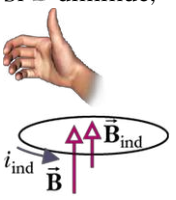
Le **sens de la f.é.m. induite** et du courant induit sont obtenus à l'aide de la **loi de Lenz** :

> La f.é.m. produit un courant induit générant un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ qui s'oppose à la variation du flux magnétique.

Si $\vec{\mathbf{B}}$ augmente,

1. $\vec{\mathbf{B}} \uparrow$ et augmente ;
2. Φ_B augmente ;
3. $B_{\text{ind}} \downarrow$;
4. i_{ind} horaire.

Si $\vec{\mathbf{B}}$ diminue,



1. $\vec{\mathbf{B}} \uparrow$ et diminue ;
2. Φ_B diminue ;
3. $B_{\text{ind}} \uparrow$;
4. i_{ind} antihoraire.

LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

- Les **équations de Maxwell** décrivent le champ électrique et le champ magnétique :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(théorème de Gauss)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \text{(théorème de Gauss)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \qquad \text{(loi de Faraday)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \mu_0\, i_{\text{inc}} + \epsilon_0\mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \qquad \text{(théorème d'Ampère-Maxwell).}$$

- La **force de Lorentz** décrit la force exercée sur une charge électrique par un champ électrique et par un champ magnétique :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\,.$$

- Ces équations sont les équations fondamentales de la théorie classique de l'électricité, du magnétisme et de l'optique.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • **R** problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 10.2 Le flux magnétique

Q1 Indiquez quelles sont les situations suivantes pour lesquelles le flux magnétique est nul ?

(i) Une surface plane dans le plan des xy est à l'intérieur d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des x.

(ii) Une surface plane dans le plan des xz est à l'intérieur d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des x.

(iii) Une surface plane dans le plan des yz est à l'intérieur d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ orienté dans le même sens que l'axe des x.

(iv) Une surface plane est entourée d'une boucle de courant i. La surface et le fil sont dans le même plan (*voir la figure 10.34a*).

(v) Une surface plane est traversée en son centre par un fil dans lequel circule un courant i (*voir la figure 10.34b*).

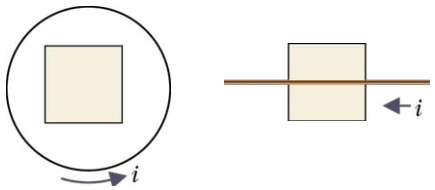


FIGURE 10.34 • Question 1

Q2 Un très long solénoïde est parcouru par un courant continu i. On place des boucles à l'intérieur du solénoïde, comme le montre la figure 10.35. Les boucles ont la même aire. Classez les boucles par ordre croissant du flux magnétique à travers celles-ci.

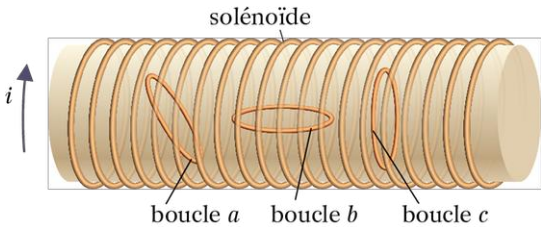


FIGURE 10.35 • Question 2

Q3 Un très long solénoïde est parcouru par un courant i continu. On place autour du solénoïde trois boucles circulaires ayant des rayons différents ($r_a < r_b < r_c$), comme le montre la figure 10.36. Classez les boucles par ordre croissant du flux magnétique à travers celles-ci.

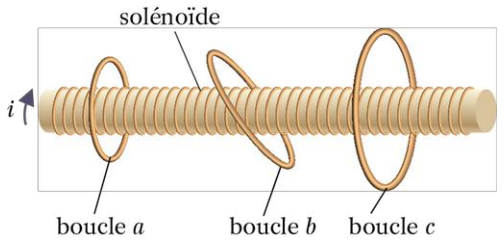


FIGURE 10.36 • Question 3

E4 Le plan d'une boucle de courant circulaire, de 37,6 cm de rayon, forme un angle de 35,2° avec un champ magnétique de 46,9 mT. Quel est le flux magnétique à travers la boucle ?

E5 Une boucle de courant, dont le vecteur aire est $\vec{\mathbf{A}} = (-0{,}432\vec{\imath} - 0{,}257\vec{\jmath})\ \text{m}^2$, est plongée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = (2{,}27\vec{\imath} - 6{,}43\vec{\jmath} + 3{,}52\vec{k})\ \text{mT}$. Quel est le flux magnétique à travers la boucle ?

P6 Une boucle carrée, dont la longueur d'un côté est $L = 50{,}0$ cm, est située à une distance $d = 2{,}50$ cm d'un fil infini (*voir la figure 10.37*). Déterminez le courant qui traverse le fil, sachant que le flux magnétique à travers la boucle est de $5{,}25 \times 10^{-7}$ Wb.

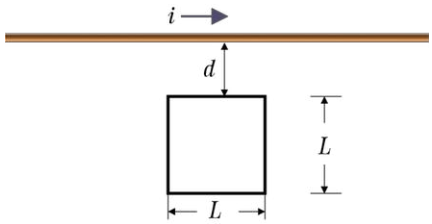


FIGURE 10.37 • Problème 6

P7 Une boucle carrée est placée dans un champ non uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 25{,}0x\vec{k}$, comme le montre la figure 10.38. Le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la boucle. Trouvez une expression algébrique pour le flux magnétique à travers la boucle.

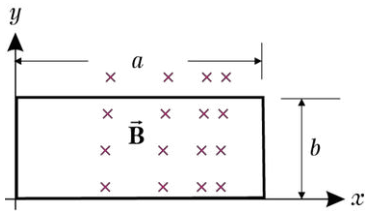


FIGURE 10.38 • Problème 7

Section 10.3 La loi de Faraday

E8 Une bobine de 200 spires a un diamètre de 20,0 cm. Elle est placée perpendiculairement à un champ magnétique de 1,00 T. Ce champ décroît à zéro en 4,00 s. Quelle est la f.é.m. moyenne durant la décroissance du champ magnétique ?

E9 Le flux magnétique à travers la surface d'un conducteur circulaire est donné par $\Phi_B = (0{,}005\,6t^2 + 0{,}007\,5t + 0{,}001\,2)$ Wb, où t est exprimé en secondes. Quelle est la f.é.m. induite au temps $t = 2{,}0$ s ?

E10 Une bobine conductrice circulaire, ayant un rayon de 20,0 cm et 15,0 spires, est placée dans un champ magnétique. Celui-ci est perpendiculaire au plan de la bobine, et son module varie selon le graphique de la figure 10.39.

a. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine à $t = 7{,}5$ ms ?

b. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine à $t = 15$ ms ?

c. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine à $t = 25$ ms ?

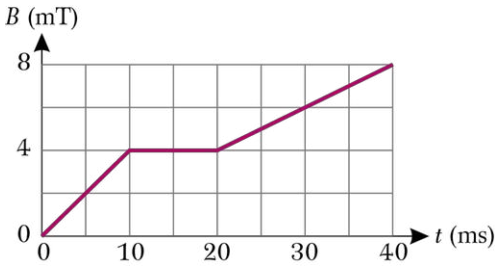


FIGURE 10.39 • Exercice 10

E11 Une bobine, ayant un rayon de 40,0 cm et 30,0 spires, est placée autour d'un très long solénoïde qui a un rayon de 9,50 cm et 300 spires/cm (*voir la figure 10.40*). La bobine et le solénoïde ont le même axe. La bobine a une résistance de 5,30 Ω. Le solénoïde est parcouru par un courant variable :

$$i = 2{,}80\,(1 - e^{-t/4{,}50}),$$

où le courant est mesuré en ampères et le temps, en secondes.

a. Quelle est la f.é.m. dans la bobine à $t = 7{,}00$ s ?

b. Quel est le courant initial dans la bobine ?

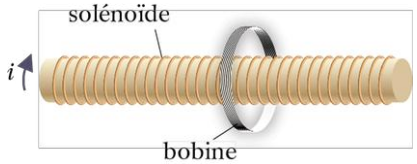


FIGURE 10.40 • Exercice 11

E12 Une bobine, ayant un rayon de 8,00 cm et 40,0 spires, est placée à l'intérieur d'un très long solénoïde qui a un rayon de 19,20 cm et 250 spires/cm (*voir la figure 10.41*). La bobine et le solénoïde ont le même axe. La bobine a une résistance de 5,30 Ω. Le solénoïde est parcouru par un courant variable :

$$i = 1{,}50\,e^{-t/0{,}460},$$

où i est mesuré en ampères et t, en secondes. Quel est le courant induit dans la bobine à $t = 0{,}250$ s ?

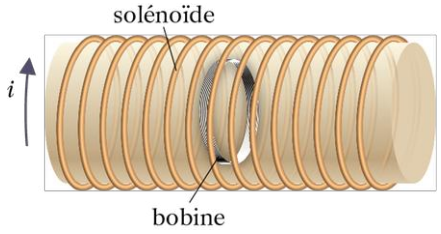


FIGURE 10.41 • Exercice 12

P13 Une boucle conductrice rectangulaire, de largeur b et de hauteur h, est située à une distance d d'un fil infini (*voir la figure 10.42*). Le courant dans le fil i_{fil} varie en fonction du temps.

a. Quelle est la forme générale de la f.é.m. induite dans la boucle ?

b. Quel est le courant induit dans la boucle si cette dernière possède une résistance R et $i_{fil}(t) = i_m \sin(\omega t)$?

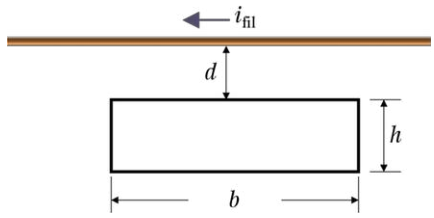


FIGURE 10.42 • Problèmes 13 et 14

P14 Une boucle conductrice rectangulaire de largeur $b = 5{,}00$ cm et de hauteur $h = 2{,}00$ cm est située à une distance $d = 0{,}30$ mm d'un fil infini (*voir la figure 10.42*). La boucle a une résistance $R = 35{,}0\ \Omega$, et le courant dans le fil est $i_{fil} = 2{,}67 \sin(0{,}75t)$, où i est mesuré en ampères et t, en secondes. Quel est le courant induit dans la boucle à $t = 5{,}0$ s ?

R15 Une boucle circulaire en cuivre de 15,0 cm de rayon est placée autour d'un très long solénoïde. Le solénoïde contient 20,0 spires par centimètre, et son rayon est de 7,00 cm. La boucle est centrée sur le solénoïde, et leurs axes se confondent (*voir la figure 10.43*). On relie la boucle à un fil de nichrome, dont la résistivité est de $1{,}20\ \mu\Omega \cdot m$, la longueur est de 5,236 m et le diamètre, de 1,00 mm. On néglige la résistance de la boucle de cuivre. On alimente le solénoïde avec un courant qui varie à un taux de 360 A/s.

a. Quelle est la f.é.m. induite dans la boucle ?

b. Quelle est la résistance du fil de nichrome ?

c. Quelle est la puissance dissipée dans le fil de nichrome ?

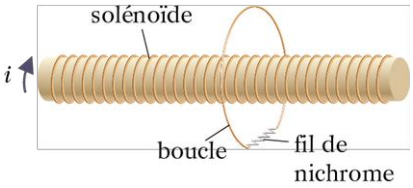
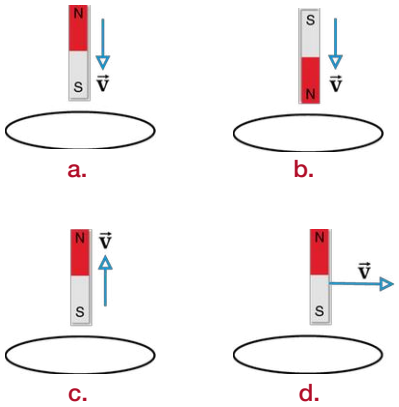


FIGURE 10.43 • Problème récapitulatif 15

Section 10.4 La loi de Lenz

Q16 Dans les situations suivantes, on déplace un barreau aimanté verticalement, au-dessus d'une boucle conductrice horizontale. Déterminez le sens du courant induit dans la boucle conductrice, selon une vue en plongée.



E17 Une boucle conductrice se trouve dans un champ magnétique variable, dont le module est $B = 3{,}20t^2 + 1{,}05t + 0{,}70$, où le temps est mesuré en secondes et le champ magnétique, en milliteslas. La boucle a un rayon de 20,0 cm, et son plan est perpendiculaire au champ magnétique (*voir la figure 10.44*).

a. Quelle est la f.é.m. induite au temps $t = 3{,}00$ s ?

b. Dans quel sens circule le courant induit dans la boucle ?

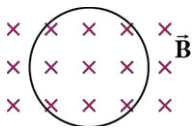


FIGURE 10.44 • Exercices 17 et 18

E18 Une boucle conductrice circulaire subit une contraction thermique, de telle sorte que son rayon diminue à un taux de 0,060 mm/s. La boucle se trouve dans un champ uniforme, dont le module est de 0,800 T et qui est orienté perpendiculairement au plan de la boucle, comme à la figure 10.44.

a. Quelle est la f.é.m. induite lorsque le rayon de la boucle est de 25,0 cm ?

b. Dans quel sens est le courant induit dans la boucle lors de la contraction ?

P19 Un courant i circule en sens horaire dans un long solénoïde de 3,60 cm de diamètre et de 200 spires/cm. En son centre, on insère une bobine circulaire de 80,0 spires, ayant un diamètre de 1,70 cm et une résistance de 2,80 Ω, de sorte que leurs axes coïncident (*voir la figure 10.45*). Le courant dans le solénoïde augmente à un taux constant de 350 A/s.

a. Quel est le courant induit dans la bobine ?

b. Quel est le sens du courant induit dans la bobine ?

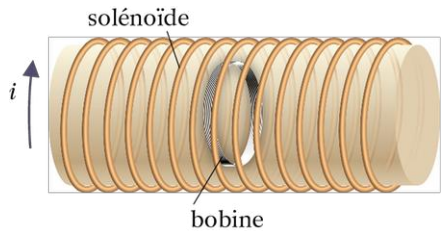


FIGURE 10.45 • Problème 19

P20 Une bobine en forme de demi-cercle, ayant un rayon de 15,0 cm, est placée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ dont le module est

$$B = 0{,}600\left[1 - e^{-5000t}\right],$$

où B est mesuré en teslas et t, en secondes. Le plan de la bobine est perpendiculaire au champ magnétique, comme le montre la figure 10.46. La bobine a 200 spires et une résistance de 0,400 Ω.

a. Quel est le courant induit dans la bobine à $t = 3{,}00$ ms ?

b. Dans quel sens est le courant induit dans la bobine ?

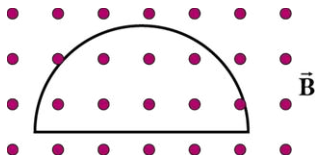


FIGURE 10.46 • Problème 20

R21 Un circuit ($\mathcal{E} = 0{,}500$ V et $R = 2{,}50$ Ω) est placé près d'un très long fil parcouru par un courant i (*voir la figure 10.47 à la page suivante*). Le courant diminue très rapidement selon l'équation $i = 80{,}0\ e^{-t/\tau}$, où i est mesuré en ampères, t en secondes et $\tau = 34{,}0$ µs. Le circuit a une longueur $\ell = 40{,}0$ cm, une largeur $h = 10{,}0$ cm et un de ses côtés est placé à une distance $d = 1{,}00$ cm du fil.

a. Quelle est la f.é.m. induite dans le circuit par le champ magnétique variable du fil au temps $t = \tau$?

b. Quel est le courant dans le circuit à $t = \tau$?

c. Dans quel sens le courant circule-t-il dans la résistance R ?

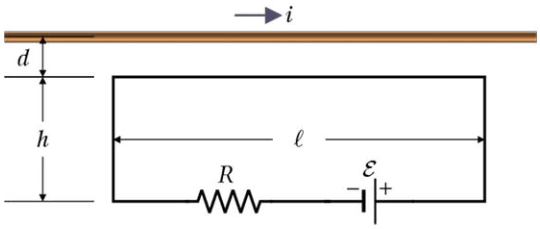


FIGURE 10.47 • Problème récapitulatif 21

Section 10.5 La f.é.m. induite dans un conducteur en mouvement

Q22 Une tige mobile se déplace librement sur un rail conducteur. Un champ magnétique uniforme est perpendiculaire au plan de la page, comme le montre la figure 10.48. Dans quel sens la tige se déplace-t-elle pour que le courant induit circule en sens horaire dans le circuit ?

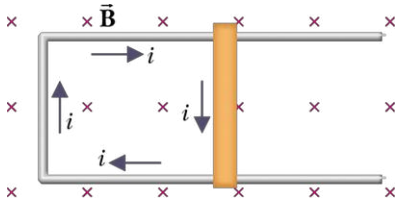


FIGURE 10.48 • Question 22

Q23 Une boucle conductrice tombe verticalement sous l'effet de la force gravitationnelle. Elle entre dans un champ magnétique perpendiculairement à son plan, comme le montre la figure 10.49.

a. Dans quel sens circule le courant induit dans la boucle ?

b. Dans quel sens est la force magnétique résultante exercée sur la boucle ?

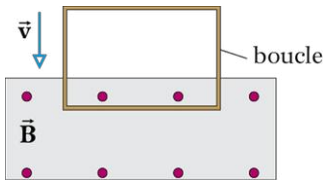


FIGURE 10.49 • Question 23

Q24 Une boucle conductrice est placée au-dessus d'un très long fil horizontal, dans lequel circule un courant i continu (*voir la figure 10.50 qui montre une vue de face*). Déterminez le sens du courant induit dans la boucle :

a. lorsqu'on déplace la boucle vers la droite ;

b. lorsqu'on déplace la boucle vers le haut.

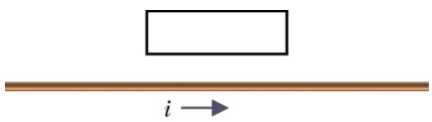


FIGURE 10.50 • Question 24

E25 Un fil de 1,85 m de longueur est placé perpendiculairement à un champ magnétique de 0,264 T. Le fil se déplace à une vitesse de 5,18 m/s, dans une direction perpendiculaire à sa longueur et au champ magnétique. Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités du fil ?

E26 Une tige métallique de 15,0 cm de longueur est placée perpendiculairement à un champ magnétique de 0,370 T. La tige se déplace à une vitesse de 9,40 m/s, dans une direction perpendiculaire à sa longueur et au champ magnétique.

a. Quelle est la f.é.m. produite dans la tige ?

b. Si la tige glisse sur un rail, quel est le courant dans la tige si le circuit complet a une résistance de 150 Ω ?

E27 Une tige conductrice AC est en contact avec les rails métalliques AE et CD, qui sont placés à 45,0 cm l'un de l'autre, dans un champ magnétique uniforme de 0,830 T entrant dans la page, perpendiculaire au plan du circuit (*voir la figure 10.51*). Une résistance $R = 9{,}70\ \Omega$ est branchée entre les points D et E. La résistance des autres éléments est négligeable. Une force extérieure $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ est exercée pour que la tige se déplace à une vitesse constante $\vec{\mathbf{v}} = 5{,}20$ m/s vers la gauche.

a. Quel est le courant induit dans le circuit ?

b. Dans quel sens circule le courant induit dans le circuit ?

c. Calculez la force $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$.

d. Calculez la puissance fournie par la force extérieure.

e. Quelle est la puissance dissipée dans la résistance ?

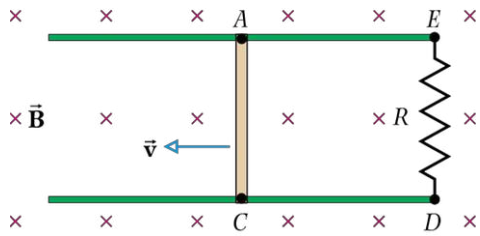


FIGURE 10.51 • Exercice 27

E28 Une tige conductrice AC est en contact avec les rails métalliques AE et CD, placés à 2,50 m l'un de l'autre. Une résistance $R = 12{,}0\ \Omega$ est branchée entre les points D et E. La résistance des autres éléments est négligeable. À cet endroit, le champ magnétique terrestre a un module de 60,0 μT, et il est orienté perpendiculairement au circuit, en sortant de la page (*voir la figure 10.52*). On déplace la tige à une vitesse constante $\vec{\mathbf{v}} = 30{,}0$ cm/s vers la droite.

a. Quelle est la f.é.m. induite dans la tige ?

b. Quel est le champ électrique induit ?

c. Quel est le courant dans le circuit et dans quel sens circule-t-il ?

d. Quelle est la force magnétique exercée sur la tige ?

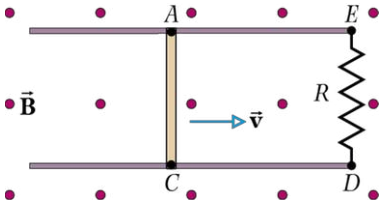


FIGURE 10.52 • Exercice 28

P29 Une boucle carrée, ayant des côtés de longueur c et une résistance R, entre dans un champ magnétique uniforme à $t = 0$, comme le montre la figure 10.53. Le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est uniforme, et il est orienté perpendiculairement au plan de la boucle. Celle-ci se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ constante.

a. Trouvez une expression mathématique pour le courant induit dans la boucle en fonction du temps, lorsque moins que la moitié de l'aire de la boucle est entrée dans le champ magnétique.

b. Quel est le courant maximal dans la boucle ?

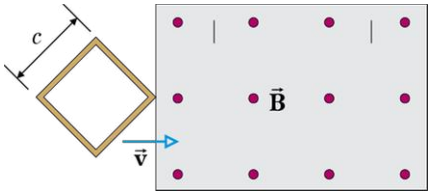


FIGURE 10.53 • Problème 29

P30 Une tige conductrice est déposée sur deux rails métalliques, placés à 25,0 cm l'un de l'autre. Une résistance $R = 14{,}0\ \Omega$ est branchée entre les rails (*voir la figure 10.54*). La position de la tige est donnée par $x = (3{,}20t + 1{,}50)$ m, et le module du champ magnétique est donné par $B = (-0{,}0500t^2 + 0{,}150t - 0{,}100)$ T, où t est mesuré en secondes. Le mouvement de la tige s'effectue entre $t = 0{,}00$ s et $t = 1{,}70$ s.

a. Quel est le courant initial dans le circuit ? Indiquez aussi le sens du courant.

b. À quels instants le courant change-t-il de sens ?

c. À quel instant le courant est-il maximal dans le circuit ?

d. Quel est le courant maximal dans le circuit ? Indiquez aussi le sens du courant.

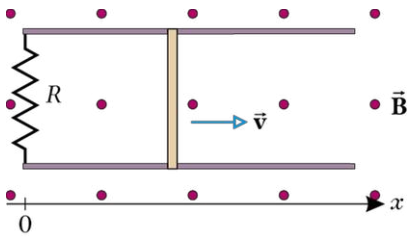


FIGURE 10.54 • Problème 30

P31 On place un très long fil près d'un circuit composé d'une tige conductrice qui se déplace vers la gauche à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ sur des rails conducteurs (*voir la figure 10.55*). Un courant i vers la gauche circule dans le fil. La tige a une longueur ℓ, et elle a une extrémité placée à une distance d du fil. La résistance du circuit est R.

a. Quel est le courant induit dans le circuit et dans quel sens est ce courant induit ?

b. Quelle est la puissance dissipée sous forme d'énergie thermique dans le circuit ?

c. Quelle force extérieure doit-on appliquer pour que la tige se déplace à vitesse constante ?

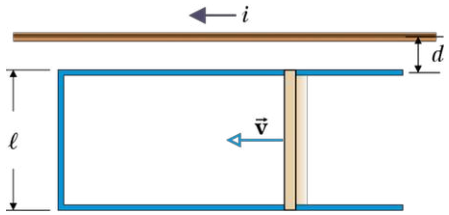


FIGURE 10.55 • Problèmes 31 et 32

P32 On place un très long fil près d'un circuit composé d'une tige conductrice qui se déplace vers la gauche à 5,00 m/s sur des rails conducteurs (*voir la figure 10.55*). Un courant $i = 15{,}0$ A circule vers la gauche dans le fil. La tige a une longueur $\ell = 12{,}0$ cm, et elle a une extrémité placée à une distance $d = 5{,}00$ mm du fil. La résistance du circuit est $R = 0{,}850\ \Omega$.

a. Quel est le courant induit dans le circuit et dans quel sens est ce courant induit ?

b. Quelle est la puissance dissipée sous forme d'énergie thermique dans le circuit ?

c. Quelle force extérieure doit-on appliquer pour que la tige se déplace à vitesse constante ?

P33 Une boucle rectangulaire de 50,0 spires est placée près d'un fil dans lequel circule un courant $i = 26{,}0$ A, vers la gauche (*voir la figure 10.56*). La bobine a une hauteur $h = 20{,}0$ cm, une largeur $\ell = 40{,}0$ cm et une résistance de $0{,}750\ \Omega$. La bobine s'éloigne à une vitesse constante, dont le module est de 7,00 m/s. Quel est le courant induit dans la bobine lorsqu'une de ses extrémités se trouve à une distance $y = 1{,}00$ cm du fil ?

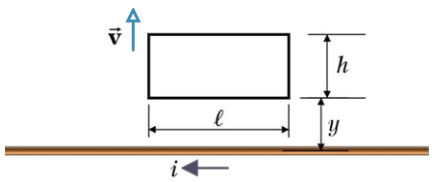


FIGURE 10.56 • Problème 33

Section 10.6 Les générateurs

E34 Un générateur est formé d'une bobine carrée ayant des côtés de 0,350 m et 120 spires. La bobine a une vitesse angulaire de 120π rad/s, et elle est située dans un champ magnétique ayant un module de 275 μT. Quelle est l'amplitude de la f.é.m. du générateur ?

E35 Un générateur d'onde sinusoïdale, dont la fréquence est de 25,00 Hz, est formé d'une bobine carrée ayant des côtés de 18,00 cm et 100 spires. Ces derniers tournent dans un champ magnétique uniforme de 2,000 T.

a. Quelle est l'expression de la f.é.m. du générateur en fonction du temps ?

b. Quelle est la valeur maximale de la f.é.m. ?

c. À quels instants la f.é.m. atteint-elle sa valeur maximale ?

E36 Combien de spires devrait contenir une boucle d'aire égale à 0,10 m^2 pour produire une f.é.m. ayant une amplitude de 150 V, lorsque la boucle effectue 60 tours par seconde dans un champ magnétique de 0,50 T ?

E37 Une antenne de radio AM est constituée d'une boucle circulaire de 8,00 cm de diamètre et possède 50,0 spires. Le champ magnétique d'une onde radio est perpendiculaire au plan de la bobine, et son module est donné par $B = 1{,}3 \times 10^{-10}\ \text{T}\cos(\omega t)$. La fréquence de l'onde radio est de 730 kHz. Quelle est l'amplitude de la f.é.m. induite dans la bobine par le champ magnétique ?

P38 Un fil est plié en un demi-cercle de rayon r. On fait tourner le plan du demi-cercle à une fréquence f dans un champ magnétique constant $\vec{\mathbf{B}}$ qui entre dans le plan de la page (*voir la figure 10.57*). Le fil est relié à un circuit de forme rectangulaire, dont la base est b et la hauteur, h. La résistance du circuit complet est R. Le circuit est toujours perpendiculaire au champ magnétique, et c'est seulement le fil en demi-cercle qui tourne.

a. Quelle est l'expression du flux magnétique en fonction du temps ?

b. Quelle est l'expression du courant induit dans le circuit en fonction du temps ?

c. Quelle est la f.é.m. induite maximale ?

d. Quelle est la puissance maximale générée par ce circuit ?

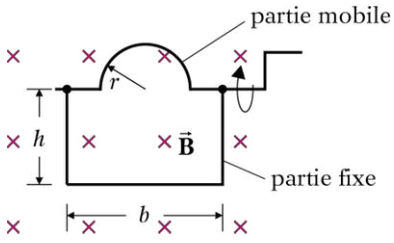


FIGURE 10.57 • Problème 38

Section 10.7 Le champ électrique induit

Q39 La figure 10.58 illustre une région circulaire où il y a un champ magnétique uniforme, qui augmente en fonction du temps. La figure montre aussi trois parcours d'intégration circulaires, dont les rayons sont croissants. Classez les trois parcours d'intégration selon un ordre croissant du résultat de l'intégrale $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$.

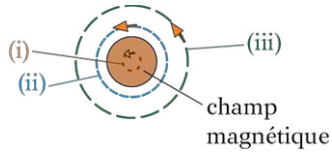


FIGURE 10.58 • Question 39

E40 Dans un long solénoïde dont le diamètre est de 7,50 cm, le courant diminue à un taux de 1,20 A/s. Le solénoïde comporte 350 spires par mètre. Quel est le module du champ électrique induit à une distance de 2,50 cm de l'axe central ?

E41 Un long solénoïde, dont le rayon est de 3,60 cm, produit en son centre un champ magnétique de 24,0 mT. Si une variation du courant dans le solénoïde fait diminuer la valeur du champ magnétique à un taux de 3,50 mT/s, déterminez le module du champ électrique induit à une distance :

a. $r = 1{,}35$ cm du centre du solénoïde ;

b. $r = 5{,}75$ cm du centre du solénoïde.

Section 10.8 Le théorème d'Ampère-Maxwell

Q42 La figure 10.59 montre un condensateur en train de se charger. Le condensateur est formé de deux disques conducteurs. Dans quel sens est le champ magnétique aux points illustrés ?

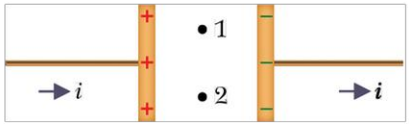


FIGURE 10.59 • Question 42

E43 Un condensateur plan à plaques parallèles circulaires est chargé par un courant continu. Les armatures ont un rayon de 2,50 cm, et elles sont séparées par une distance de 1,80 mm. La charge surfacique sur l'armature augmente de $1{,}78 \times 10^3$ C/m^2 par seconde. Quel est le module du champ magnétique à une distance de 1,50 cm de l'axe du condensateur ?

E44 Le module du champ magnétique induit à l'extrémité des armatures d'un condensateur à plaques circulaires parallèles est de $6{,}32 \times 10^{-7}$ T. Si les plaques ont un rayon de 3,24 cm, quel est le taux de variation du module du champ électrique entre les armatures ?

R45 Un circuit RC est constitué d'un condensateur de 1,50 nF et d'une résistance de 4,50 MΩ, branchés en série à une source de f.é.m. de 120 V. Le condensateur est constitué d'armatures circulaires et parallèles, de 5,00 cm de rayon. On branche le circuit à $t = 0$, lorsque la charge du condensateur est nulle.

a. Quel est le module du champ électrique entre les armatures du condensateur à $t = 2{,}50$ ms ?

b. Quel est le module du champ magnétique entre les armatures, à une distance de 3,00 cm du centre des armatures, à $t = 2{,}50$ ms ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

10.1 $\Phi_{ii} < \Phi_i < \Phi_{iii}$	Le flux magnétique compte le nombre de lignes de champ qui traversent la surface de la boucle. Les lignes de champ magnétique forment des cercles autour du fil. Dans la situation (ii), il y a autant de lignes qui entrent et sortent de la surface. Dans la situation (i), une partie des lignes qui sortent est annulée par les quelques lignes qui entrent dans la surface. Dans la situation (iii), toutes les lignes entrent.
10.2 (i) < (iv) < (ii) = (iii)	Le courant induit est proportionnel à la f.é.m. induite, qui dépend de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique, donc de la pente du graphique de B_z en fonction du temps.
10.3 En sens horaire	Le fil produit un champ magnétique qui sort de la page, selon la règle de la main droite. Le flux magnétique augmente lorsque le courant dans le fil augmente. Le champ magnétique induit est opposé au champ magnétique du fil, donc $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ entre dans la page. Selon la règle de la main droite pour les boucles de courant, le courant induit doit être en sens horaire.
10.4 $F_1 = F_3 < F_2 = F_4$	Il n'y a pas de courant de Foucault dans les plaques 1 et 3, car le flux magnétique ne change pas pour ces plaques. Il y a des courants de Foucault dans les plaques 2 et 4 parce que le flux magnétique change à travers ces plaques. Les courants de Foucault produisent une force magnétique vers la gauche. Ces forces ont le même module, car les plaques sont identiques et se déplacent à la même vitesse dans un champ magnétique uniforme.
10.5 $B_{ii} = B_{iv} < B_{iii} < B_i$	Le champ magnétique est proportionnel à la dérivée du champ électrique par rapport au temps, donc à la pente du graphique.

Chapitre 11

L'inductance

Buts du chapitre

Dans ce chapitre, le concept d'induction électromagnétique est appliqué aux circuits électriques. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de comprendre la notion d'inductance mutuelle et d'auto-induction ;
- d'analyser les circuits qui contiennent une bobine d'induction en régime transitoire ;
- d'explorer les oscillations dans les circuits.

Préalables

Ce chapitre poursuit l'étude des circuits électriques. Revoyez :

- la puissance dans les circuits, analysée à la section 6.6 ;
- les lois de Kirchhoff, présentées à la section 7.2 ;
- les circuits RC, décrits à la section 7.7 ;
- la loi de Faraday, expliquée à la section 10.3.

Les bougies d'allumage, utilisées dans les moteurs à essence, produisent une étincelle grâce à l'inductance.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'une f.é.m. est induite lorsque le flux magnétique change dans une bobine. Comme Faraday l'a découvert, si le courant change dans une première bobine placée près d'une deuxième bobine, le flux magnétique variable dans la deuxième induit une f.é.m. Donc, la variation d'un courant dans une première bobine a un effet sur le circuit d'une deuxième bobine. Par ce processus, un circuit peut influer sur un autre circuit, sans y être branché directement.

Vous avez peut-être déjà observé une étincelle en débranchant un appareil d'un circuit. Ceci montre qu'un champ électrique très intense était présent, qui dépassait la valeur de la rigidité diélectrique de l'air. Mais pourquoi ce champ électrique intense est-il produit ? Ce champ est le résultat de l'induction électromagnétique dans le circuit de l'appareil lorsque le courant diminue rapidement. Ce phénomène est appelé l'*auto-induction*. Le même phénomène permet aux bougies d'allumage d'un moteur à essence de générer une étincelle, ce qui provoque l'inflammation du mélange air-essence.

L'inductance d'un circuit est importante lorsque celui-ci possède des bobines, qui réagissent de façon importante à la variation de flux magnétique. Lorsque le courant change dans un circuit, il y a une f.é.m. induite dans ce même circuit. En analysant un circuit qui contient une résistance et une bobine, nous verrons que le courant doit changer de façon graduelle.

Les circuits constitués de bobines et de condensateurs ont un comportement intéressant : la charge et le courant dans le circuit effectuent des oscillations. Ce type de comportement a des applications intéressantes, entre autres dans le domaine des télécommunications.

11.1 L'inductance mutuelle

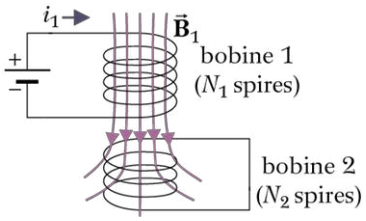


FIGURE 11.1
Un courant i_1 circule dans la première bobine. Si ce courant varie, il y a une f.é.m. induite dans la deuxième bobine.

La figure 11.1 montre une première bobine (la bobine 1) de N_1 spires, parcourue par un courant i_1. À côté de cette bobine, il y a une seconde bobine (la bobine 2) de N_2 spires. La bobine 1 produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_1$. Chaque spire de la bobine 2 est traversée par les lignes de champ magnétique, ce qui engendre un flux magnétique $\Phi_{2\leftarrow 1}$ pour chaque spire. Nous utilisons une notation semblable à celle qui a été employée pour décrire les paires action-réaction : $\Phi_{2\leftarrow 1}$ veut dire « le flux à travers la bobine 2 produit par le champ de la bobine 1 ». Le flux magnétique net à travers la bobine 2, causé par la bobine 1, est $\Phi_{\text{bobine}} = N_2\Phi_{2\leftarrow 1}$. Le flux magnétique est directement proportionnel au courant dans la bobine 1. En effet, si on double le courant, le champ magnétique double et, par conséquent, le flux magnétique double aussi. On peut donc écrire

$$N_2\Phi_{2\leftarrow 1} = M_{2/1}i_1 \ . \tag{11.1}$$

La constante de proportionnalité $M_{2/1}$ est appelée l'*inductance mutuelle* de la bobine 2 par rapport à la bobine 1 :

$$M_{2/1} \equiv \frac{N_2\Phi_{2\leftarrow 1}}{i_1} \ . \tag{11.2}$$

L'inductance mutuelle $M_{2/1}$ représente le flux total à travers la bobine 2 par unité de courant qui circule dans la bobine 1. Ce paramètre dépend de la

géométrie du système : la forme des bobines et la position relative des bobines. Dans le Système international, l'inductance mutuelle se mesure en henrys (H), en l'honneur du physicien américain Joseph Henry (1797-1878). En se basant sur l'équation 11.2, on obtient

$$1\,\mathrm{H} = \frac{1\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}}\,. \tag{11.3}$$

Supposons maintenant que le courant i_1 varie dans la bobine 1, ce qui fait varier le flux magnétique à travers la bobine 2. Il y a alors une f.é.m. induite dans la bobine 2. Selon la loi de Faraday (*voir l'équation 10.5 de la page 343*), on a

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{2\leftarrow 1}}{\mathrm{d}t} = -M_{2/1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\,. \tag{11.4}$$

La f.é.m. induite dépend directement du taux de variation du courant dans la bobine 1 et de l'inductance mutuelle de la bobine 2 par rapport à la bobine 1.

Inversons maintenant les rôles des bobines (*voir la figure 11.2*) : supposons qu'un courant i_2 circule dans la bobine 2, ce qui produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_2$. Il y a un flux magnétique net $\Phi_B = N_1\Phi_{1\leftarrow 2}$ à travers la bobine 1, causé par la bobine 2. Ce flux est proportionnel au courant i_2 :

$$N_1\Phi_{1\leftarrow 2} = M_{1/2}i_2\,,$$

où $M_{1/2}$ est l'inductance mutuelle de la bobine 1 par rapport à la bobine 2. Selon la loi de Faraday, si le courant i_2 varie dans le temps, il y a une f.é.m. induite dans la bobine 1 :

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{1\leftarrow 2}}{\mathrm{d}t} = -M_{1/2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,. \tag{11.5}$$

Cette fois-ci, la f.é.m. induite dans la bobine 1 dépend de l'inductance mutuelle de la bobine 1 par rapport à la bobine 2 et du taux de variation du courant i_2.

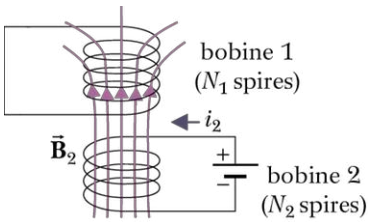


FIGURE 11.2
Un courant i_2 circule dans la bobine 2. Si ce courant varie, il y a une f.é.m. induite dans la bobine 1.

Un calcul avancé recourant au calcul intégral permet de démontrer que les deux inductances mutuelles sont égales :

$$M_{1/2} = M_{2/1} = M\,. \tag{11.6}$$

On parle alors simplement de l'inductance mutuelle du système composé des deux bobines. Les indices ne sont donc pas nécessaires.

REMARQUE

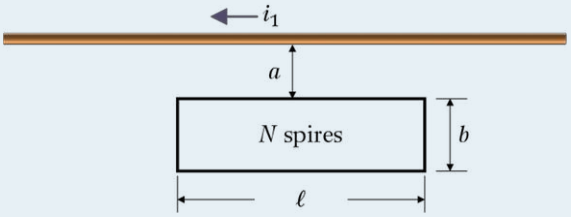
Le signe négatif dans les équations 11.4 et 11.5 indique que la f.é.m. induite s'oppose à la variation du flux magnétique, selon la loi de Lenz, et permet d'obtenir le sens de la f.é.m. induite. Dans la plupart des situations, on n'est pas intéressé au sens de la f.é.m. On calcule alors la valeur absolue de $\mathcal{E}$.

EXEMPLE 11.1 L'inductance mutuelle d'un système fil-bobine

Une bobine rectangulaire de N spires est placée près d'un très long fil rectiligne dans lequel un courant i circule vers la gauche (*voir la figure suivante*).

a. Trouvez une expression algébrique pour l'inductance mutuelle du système.

b. Le taux de variation du courant dans le fil est de 3,40 A/s. Calculez la valeur de la f.é.m. (en valeur absolue) dans la bobine si $a = 2{,}00$ cm, $b = 10{,}0$ cm, $\ell = 20{,}0$ cm et $N = 200$.



SOLUTION a.

Illustrer la situation

Le courant i_1 circule dans le fil, ce qui produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_1$. Ce champ n'est pas uniforme. Pour calculer le flux à travers la bobine, nous la divisons en éléments de surface $\mathrm{d}A = \ell\,\mathrm{d}r$, comme le montre la figure 11.3.

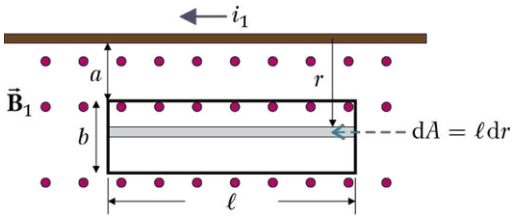


FIGURE 11.3
La bobine est divisée en éléments $\mathrm{d}A$ pour le calcul du flux magnétique.

Décortiquer le problème

Le module du champ magnétique produit par un fil rectiligne est obtenu par l'équation 9.18 :

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\,. \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est la définition de l'inductance mutuelle, donnée par l'équation 11.2 :

$$M \equiv \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}\,, \qquad \text{(ii)}$$

où le flux magnétique à travers une spire est donné par l'équation 10.2 :

$$\Phi_{21} = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \int B\,\mathrm{d}A\cos(0°)\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le flux en remplaçant l'équation (i) dans l'équation (iii), puis en intégrant :

$$\Phi_{21} = \int_a^{a+b} \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\right) \ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$= \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln r \Big|_a^{a+b} = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right). \qquad \text{(iv)}$$

En remplaçant le résultat de l'équation (iv) dans l'équation (ii), nous obtenons l'inductance mutuelle du système :

$$M = \frac{N \dfrac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln\left(\dfrac{a+b}{a}\right)}{i_1}$$

$$M = \frac{N \mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right). \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'inductance mutuelle dépend seulement des données géométriques du système, comme il se doit.

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$a = 2{,}00$ cm	$b = 10{,}0$ cm	$\lvert\mathcal{E}_2\rvert$
$\ell = 20{,}0$ cm	$N = 200$	
$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 3{,}40$ A/s		

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.4 :

$$\mathcal{E}_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'inductance mutuelle du système :

$$M = \frac{200 \times 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A} \times 0{,}200\ \text{m}}{2\pi} \times \ln\left(\frac{0{,}020\,0\ \text{m} + 0{,}100\ \text{m}}{0{,}020\,0\ \text{m}}\right) = 1{,}433 \times 10^{-5}\ \text{H}\,.$$

Nous obtenons ensuite la f.é.m. en remplaçant ce résultat dans l'équation (v) :

$$\mathcal{E}_2 = 1{,}433 \times 10^{-5}\ \text{H} \times 3{,}40\ \text{A/s} = 4{,}87 \times 10^{-5}\ \text{V} = 48{,}7\ \mu\text{V}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons à la question. Les quantités doivent être exprimées dans le SI pour que les réponses soient formulées dans le même système.

11.2 L'auto-induction

La figure 11.4 montre une bobine qui fait partie d'un circuit. La bobine produit un champ magnétique lorsqu'elle est parcourue par un courant i. Les lignes de champ magnétique traversent la bobine. Il y a donc un flux magnétique Φ_B à travers chaque spire de la bobine, causé par le champ magnétique produit par la bobine elle-même. Le flux magnétique à travers la bobine complète est $\Phi_{\text{bobine}} = N\Phi_B$. Si le courant change dans la bobine, le flux magnétique à travers celle-ci va changer, ce qui induit une f.é.m., selon la loi de Faraday.

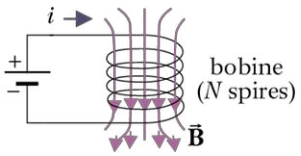


FIGURE 11.4
Un courant i circule dans une bobine. Si ce courant change, une f.é.m. est induite dans la bobine.

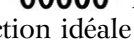
Le flux magnétique Φ_B à travers une spire de la bobine est proportionnel au courant i circulant dans la bobine. On définit l'inductance de la bobine comme le flux total qui la traverse par unité de courant :

$$L \equiv \frac{N\Phi_B}{i}\,, \qquad (11.7)$$

Inductance

où N est le nombre de spires de la bobine et Φ_B, le flux magnétique à travers une spire.

L'inductance d'une bobine est indépendante du courant qui circule. Elle ne dépend que des propriétés géométriques de la bobine. Comme dans le cas de l'inductance mutuelle, l'inductance d'une bobine est mesurée en henrys (H). Le physicien américain Joseph Henry (1797-1878) a découvert le phénomène d'auto-induction à peu près au même moment que Faraday a mis en évidence l'induction électromagnétique.

Tous les éléments d'un circuit peuvent avoir une certaine inductance, car ils sont traversés par les lignes de champ qu'ils produisent eux-mêmes. Cependant, l'inductance est importante seulement lorsque des éléments génèrent un champ magnétique important, comme des bobines ou des solénoïdes. On appelle *bobine d'induction** un dispositif qui est utilisé dans un circuit pour ajouter de l'inductance. On utilise le symbole  pour représenter ce dispositif dans les schémas. Une bobine d'induction idéale a une résistance R nulle. Les bobines réelles ont une certaine résistance, qu'on peut négliger si cette dernière est beaucoup plus faible que les autres résistances du circuit. On peut remplacer une bobine d'induction ayant une résistance importante par une bobine d'induction idéale branchée en série à une résistance.

* On utilise aussi les termes *inductance* et *self*, mais l'expression privilégiée est *bobine d'induction*.

L'inductance d'un solénoïde

La bobine d'induction la plus simple est un solénoïde de N spires, une longueur ℓ et une aire transversale A. Si on fait l'approximation que le solénoïde est idéal, alors le champ magnétique est uniforme et il est perpendiculaire au plan des spires. Lorsque le solénoïde est parcouru par un courant i, le module du champ magnétique est donné par l'équation 8.6 :

$$B = \mu_0 ni = \frac{\mu_0 Ni}{\ell} .$$

Le flux magnétique à travers une spire est

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = BA \cos(0°) = \frac{\mu_0 NiA}{\ell} .$$

On insère ce résultat dans la définition de l'inductance, donnée par l'équation 11.7 :

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{N}{i}\left(\frac{\mu_0 NiA}{\ell}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} . \qquad (11.8)$$

Comme le montre la relation 11.8, l'inductance ne dépend que des propriétés géométriques de la bobine, comme le nombre de spires, la longueur et l'aire transversale.

L'équation 11.8 est une bonne approximation dans le cas de solénoïdes dont la longueur est beaucoup plus grande que le rayon. Dans cette approximation, on néglige les effets de bord, en supposant que les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux spires, ce qui n'est pas réellement le cas aux extrémités du solénoïde.

Dans l'équation 11.8, l'inductance se mesure en henrys, l'aire en mètres carrés et la longueur, en mètres. Ceci montre que la constante magnétique peut s'exprimer en henrys par mètre. C'est habituellement la forme utilisée dans les tables de référence :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} . \qquad (11.9)$$

La f.é.m. d'auto-induction

Si le courant dans une bobine change, il y a une f.é.m. induite dans la bobine. Selon la loi de Faraday (*voir l'équation 10.5 de la page 343*),

$$\mathcal{E}_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt} .$$

D'après l'équation 11.7, $N\Phi_B = Li$, ce qui donne

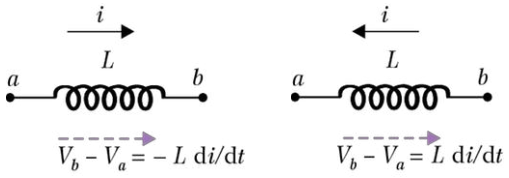
F.é.m. d'auto-induction dans une bobine

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} . \qquad (11.10)$$

Le signe négatif est une conséquence de la loi de Lenz : la f.é.m. induite dans la bobine s'oppose à la variation de courant.

- Si le courant augmente, $di/dt > 0$, et la polarité de $\mathcal{E}_L$ est telle que la borne positive de la f.é.m. est du côté où le courant entre dans la bobine d'induction.
- Si le courant diminue, $di/dt < 0$, et la polarité de $\mathcal{E}_L$ est telle que la borne négative de la f.é.m. est du côté où le courant entre dans la bobine.
- Si le courant est constant, $di/dt = 0$ et $\mathcal{E}_L = 0$. La bobine d'induction se comporte comme un simple fil et il n'y a pas de f.é.m. induite.

Lorsqu'une bobine fait partie d'un circuit, on peut analyser ce dernier à l'aide de la loi des mailles. La différence de potentiel aux bornes de la bobine d'induction correspond à la f.é.m. induite si on se déplace dans le même sens que le courant.



La f.é.m. induite dans une bobine peut être fort importante lorsque le courant change très rapidement. C'est le cas lorsqu'on ouvre rapidement un interrupteur, comme le montre la figure 11.5. Avant d'ouvrir l'interrupteur, un courant i continu circule dans la bobine. Si on ouvre rapidement l'interrupteur, le courant tombe très vite à zéro. Il y a alors une f.é.m. induite très importante dans la bobine d'induction. Dans ce cas, la différence de potentiel entre le levier et le contact de l'interrupteur peut être suffisamment grande pour générer un champ électrique qui dépasse la valeur de la rigidité diélectrique de l'air (3 MV/m). Une décharge (une étincelle électrique) est alors produite.

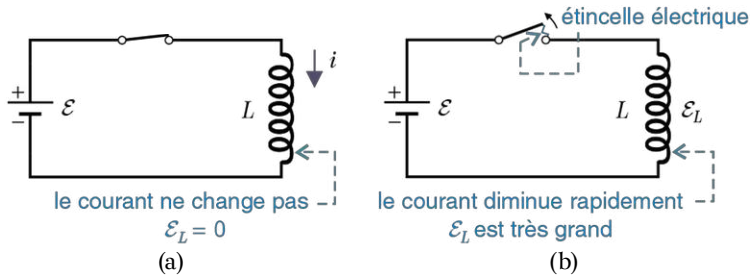


FIGURE 11.5

(a) Un courant i constant circule dans la bobine. (b) Lorsqu'on ouvre très rapidement l'interrupteur, la f.é.m. induite dans la bobine produit une décharge dans l'interrupteur.

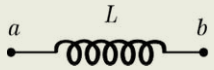
Ce phénomène peut être observé lorsqu'on débranche un appareil dans lequel circule un courant important, comme un grille-pain ou un séchoir à cheveux. Les bougies d'allumage des moteurs à essence fonctionnent aussi de cette façon. Un courant important circule dans une bobine d'induction. Un interrupteur à l'intérieur du distributeur s'ouvre, ce qui produit une grande différence de potentiel, de quelques milliers de volts. Le champ électrique généré entre les électrodes de la bougie est suffisamment intense pour produire une étincelle électrique, comme le montre la figure 11.6.

FIGURE 11.6

Une décharge entre les électrodes d'une bougie d'allumage

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.1

Dans la figure suivante, $V_b < V_a$:



Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont possibles ?

(i) Le courant est constant, et il est vers la droite.
(ii) Le courant est constant, et il est vers la gauche.
(iii) Le courant est vers la droite, et il augmente.
(iv) Le courant est vers la droite, et il diminue.
(v) Le courant est vers la gauche, et il augmente.
(vi) Le courant est vers la gauche, et il diminue.

EXEMPLE 11.2 Une haute tension

Une différence de potentiel de 12,0 kV est nécessaire dans une bougie d'allumage pour enflammer le mélange air-essence. La bobine d'induction utilisée a une inductance de 0,600 H. Quel est le taux de variation du courant dans le circuit ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L = 0{,}600$ H	$\left\lvert \frac{di}{dt} \right\rvert$
$\lvert \mathcal{E}_L \rvert = 12{,}0 \times 10^3$ V	

Nous utilisons des valeurs absolues, car le sens de la f.é.m. n'a pas d'importance ici.

Identifier la clé

La clé est l'équation 11.10, en ajoutant des valeurs absolues :

$$\lvert \mathcal{E}_L \rvert = L \left\lvert \frac{di}{dt} \right\rvert . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons le taux de variation du courant :

$$\left\lvert \frac{di}{dt} \right\rvert = \frac{\lvert \mathcal{E} \rvert}{L}$$

$$= \frac{12{,}0 \times 10^3 \text{ V}}{0{,}600 \text{ H}} = 20{,}0 \times 10^3 \text{ A/s} .$$

(réponse)

Valider la réponse

Le taux de variation du courant nécessaire est très grand. Ceci est possible si le courant est coupé très rapidement. Par exemple, si un courant diminue de 20 A à 0 A en 1 ms, le taux moyen obtenu est de 20×10^3 A/s.

11.3 Le circuit RL

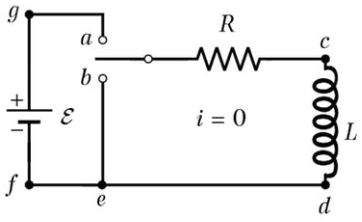


FIGURE 11.7
Le circuit RL, avec une résistance et une bobine d'induction

Lorsqu'il y a une bobine d'induction dans un circuit, le courant ne peut pas changer brusquement, car la variation de courant induit une f.é.m. dans la bobine, qui s'oppose à la variation de courant. Pour comprendre ce phénomène, on étudie un circuit dans lequel il y a une résistance et une bobine d'induction, avec au besoin une pile. C'est ce qu'on appelle un circuit RL. La figure 11.7 présente le circuit RL, avec une résistance R, une bobine d'induction ayant une inductance L et une pile dont la f.é.m. est $\mathcal{E}$. L'interrupteur peut être placé à la position a pour que la pile soit incluse dans le circuit ou à la position b pour exclure la pile. Dans la situation présentée à la figure 11.7, l'interrupteur est ouvert, et aucun courant ne circule dans le circuit.

Le courant en croissance

On ferme l'interrupteur à la position a pour inclure la pile à $t = 0$. Le courant initial doit être nul, car à la fermeture de l'interrupteur, la bobine d'induction

génère une f.é.m. d'auto-induction $\mathcal{E}_L$, qui s'oppose à la variation de courant. À mesure que le temps passe, le courant i augmente graduellement. La figure 11.8a illustre la situation pour $t > 0$. Lorsque $t \to \infty$, le courant ne change plus, et la bobine ne produit plus de f.é.m. d'auto-induction. La bobine se comporte comme un fil de résistance négligeable. Le circuit est alors simplement constitué d'une pile et d'une résistance, qui sont reliées par des fils. Le courant est $i = i_m = \mathcal{E}/R$, la valeur maximale du courant, comme le montre la figure 11.8b.

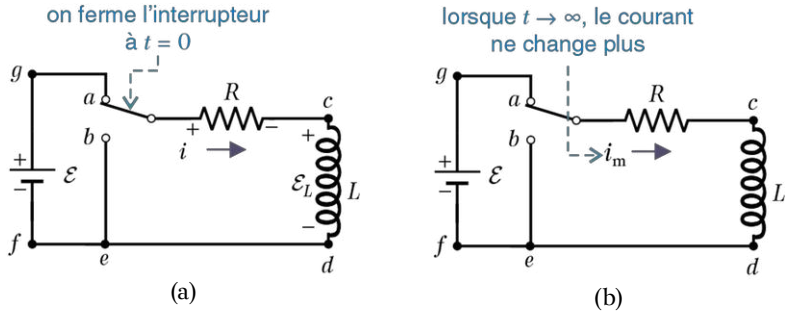


FIGURE 11.8

(a) Pour $t > 0$, le courant dans le circuit est i. (b) Lorsque $t \to \infty$, le courant devient constant : $i = i_m = \mathcal{E}/R$.

Pour obtenir le courant en fonction du temps, on applique la loi des mailles au circuit de la figure 11.8a, à partir du point e, en sens horaire :

$$\Delta V_{\mathcal{E}} + \Delta V_R + \Delta V_L = 0 \,. \tag{11.11}$$

- La pile est traversée de la borne – à la borne + : $\Delta V_{\mathcal{E}} = +\mathcal{E}$.
- La résistance est traversée dans le même sens que le courant : $\Delta V_R = -Ri$.
- La bobine est traversée dans le même sens que le courant : $\Delta V_L = -L\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Cette différence de potentiel doit être négative, car la f.é.m. d'auto-induction doit s'opposer à la variation de courant.

On obtient alors

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \,. \tag{11.12}$$

Cette équation différentielle a la même forme que l'équation obtenue lors de l'étude du circuit RC, pour un condensateur en train d'être chargé (*voir l'équation 7.34 de la page 240*) :

$$\mathcal{E} - \frac{1}{C}Q - R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \,.$$

La solution obtenue est

$$Q = Q_m\,(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}) \,,$$

où Q_m représente la charge maximale, trouvée lorsque $t \to \infty$. On peut appliquer la même méthode que celle qui a été utilisée à la section 7.7. On peut aussi simplement se servir de la solution de l'équation 7.34 en remplaçant les symboles $Q \to i$, $1/C \to R$ et $R \to L$. On obtient alors le courant en fonction du temps :

$$i = i_m\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \,. \tag{11.13}$$

Courant d'un circuit RL (en croissance)

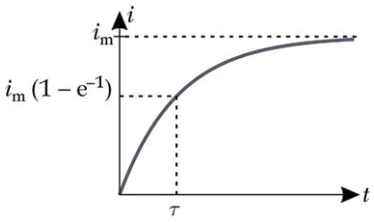


FIGURE 11.9
Le courant en fonction du temps dans le circuit RL lorsque le courant augmente

La figure 11.9 montre le graphique du courant en fonction du temps. À $t = 0$, le courant est nul, car la f.é.m. de la bobine d'induction annule complètement la f.é.m. de la pile. Lorsque $t \to \infty$, la bobine n'a plus d'effet, et le courant a atteint sa valeur maximale $i = i_m$. En insérant $\frac{di}{dt} = 0$ dans l'équation 11.12 et $i = i_m$, on trouve que le courant maximal est

$$i_m = \frac{\mathcal{E}}{R} . \tag{11.14}$$

La constante τ représente la constante de temps du circuit RL :

$$\tau \equiv \frac{L}{R} . \tag{11.15}$$

Comme dans le cas du circuit RC, la constante de temps indique si le courant augmente rapidement ou non. Après un temps correspondant à la constante de temps ($t = \tau$), le courant a atteint la valeur $i = i_m(1 - e^{-1})$, ce qui représente environ 63 % de la valeur maximale. Le courant augmente rapidement (lorsque τ est faible) dans le cas où l'inductance de la bobine est faible (il y a peu d'auto-induction) ou quand la résistance est élevée (ce qui implique un faible courant final).

Le courant en décroissance

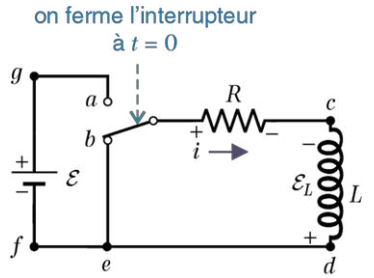


FIGURE 11.10
À un temps $t > 0$, le courant dans le circuit est i.

Notre but est maintenant d'analyser le circuit RL lorsque le courant décroît. Pour ce faire, on place l'interrupteur à la position b, à $t = 0$, lorsque le courant est $i = i_m$. Ceci a pour effet d'enlever la pile du circuit. Le courant ne peut pas tomber à zéro brusquement, car la bobine d'induction génère une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la variation de courant. À un temps $t > 0$, la situation est illustrée à la figure 11.10. La f.é.m. d'auto-induction $\mathcal{E}_L$ permet au courant de continuer de circuler en sens horaire dans le circuit.

On applique de nouveau la loi des mailles pour analyser le circuit de la figure 11.10, en commençant au point e, en sens antihoraire :

$$\Delta V_R + \Delta V_L = -Ri - L\frac{di}{dt} = 0 . \tag{11.16}$$

Cette fois-ci, puisque le courant diminue ($di/dt < 0$), la différence de potentiel de la bobine d'induction est positive. Encore une fois, nous avons vu une équation différentielle semblable dans l'étude des circuits RC à la section 7.7. La solution est un courant qui diminue de façon exponentielle :

Courant d'un circuit RL (en décroissance)

$$i = i_m e^{-Rt/L} = i_m e^{-t/\tau} . \tag{11.17}$$

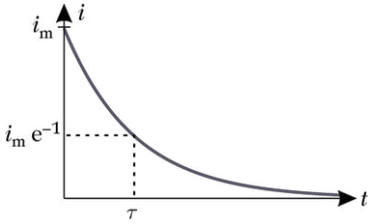


FIGURE 11.11
Le courant en fonction du temps dans un circuit RL lorsque le courant décroît

La figure 11.11 illustre le graphique du courant en fonction du temps. La constante de temps $\tau = L/R$ est la même que dans le cas où le courant est croissant. Après $t = \tau$, le courant a diminué à $i = i_m e^{-1}$, ce qui représente environ 37 % de la valeur maximale. Lorsque $t \to \infty$, le courant tend vers zéro, car la bobine ne produit plus d'auto-induction.

Les cas limites

Les équations obtenues représentent le courant en fonction du temps pour les circuits RL en régime transitoire. Ces équations permettent aussi d'obtenir le comportement des bobines d'induction au moment où on ferme l'interrupteur ($t = 0$) et dans le régime permanent ($t \to \infty$).

Le courant en croissance

- Lorsque $t \to 0$, le courant initial est nul ($i = 0$). La bobine s'oppose à la variation de courant, donc elle se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Lorsque $t \to \infty$, la bobine n'a plus d'effet. Elle se comporte comme un simple fil et $i \to i_m$.

Le courant en décroissance

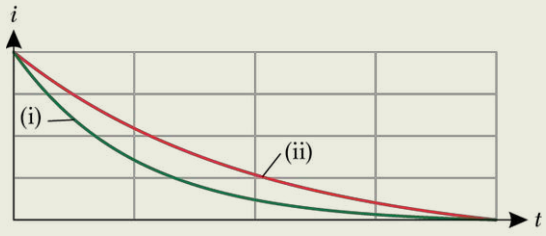
- Lorsque $t = 0$, le courant est $i = i_m$, et la bobine s'oppose à la variation. Elle génère une f.é.m. d'auto-induction $\mathcal{E}_L$ pour que le courant soit $i = i_m$.
- Lorsque $t \to \infty$, la bobine n'a plus d'effet. Elle se comporte comme un simple fil et $i \to 0$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.2

La figure suivante montre le courant en fonction du temps dans deux circuits RL à l'intérieur desquels une source de f.é.m. est débranchée du circuit à $t = 0$, de telle sorte que le courant peut continuer à circuler dans le circuit. Les circuits possèdent des résistances identiques.

a. Quel circuit a la constante de temps la plus élevée ?

b. Quel circuit a une inductance plus élevée ?



Défi animé 11.1
Pour un circuit RL en série, pouvez-vous prédire l'allure de la différence de potentiel aux bornes de la résistance et de la bobine lorsque ces composants sont reliés à une pile ?

EXEMPLE 11.3 Un circuit RL

On branche un circuit RL, constitué d'une résistance et d'une bobine d'induction, qui sont branchées en série avec une pile de 6,00 V. La résistance est $R = 200\ \Omega$, et l'inductance de la bobine est $L = 240$ mH.

a. Quel est le courant maximal dans le circuit ?

b. Après combien de temps le courant est-il égal à 10,0 mA ?

c. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la bobine lorsque $t = 2{,}00$ ms ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$R = 200\ \Omega$	$L = 0{,}240$ H	i_m
$\mathcal{E} = 6{,}00$ V	$i_1 = 0{,}0100$ A	t_1
$t_2 = 2{,}00$ ms		$\Delta V_{L,2}$

Le courant est en croissance, car le circuit est branché à une pile. La constante de temps du circuit RL est

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}240\ \text{H}}{200\ \Omega} = 1{,}20 \times 10^{-3}\ \text{s} = 1{,}20\ \text{ms}\ . \quad \text{(i)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que le courant est maximal lorsque $t \to \infty$ après avoir branché le circuit à la batterie :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}}{R}\ . \quad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$i_m = \frac{6{,}00\ \text{V}}{200\ \Omega} = 0{,}0300\ \text{A} = 30{,}0\ \text{mA}\ .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.13 :

$$i = i_m\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons t dans l'équation (iii) :

$$\frac{i}{i_m} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow e^{-t/\tau} = 1 - \frac{i}{i_m}$$

$$\Rightarrow \frac{-t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{i}{i_m}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - \frac{t}{i_m}\right)$$

$$= -1{,}20\ \text{ms} \ln\left(1 - \frac{10{,}0\ \text{mA}}{30{,}0\ \text{mA}}\right)$$

$$t = 0{,}487\ \text{ms}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est que la différence de potentiel aux bornes de la bobine correspond à la valeur absolue de la f.é.m. d'auto-induction :

$$\Delta V_L = \left| L\frac{di}{dt} \right|. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons ΔV_L à l'aide de la dérivée de l'équation 11.13 :

$$\Delta V_L = \left| L\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L})\right]\right|$$

$$= L\left[\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L}\right]\frac{R}{L} = \mathcal{E}\,e^{-t/\tau}\,.$$

Nous remplaçons les valeurs :

$$\Delta V_L = 6{,}00\ \text{V}\,e^{-2{,}00\,\text{ms}/1{,}20\,\text{ms}}$$

$$= 1{,}13\ \text{V}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

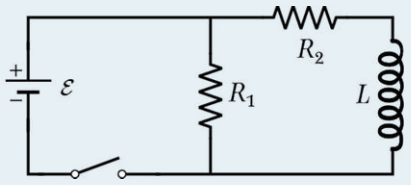
Les valeurs obtenues sont positives. La différence de potentiel aux bornes de la bobine d'induction est plus faible que la f.é.m. de la pile, ce qui est correct pour $t > 0$.

EXEMPLE 11.4 Un circuit *RL* plus complexe

Dans le circuit ci-contre, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $L = 45{,}0$ mH et $\mathcal{E} = 12{,}0$ V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Calculez le courant qui circule dans la pile à $t = 0$.

b. Calculez le courant qui circule dans la pile lorsque $t \to \infty$.



SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$R_1 = 200\ \Omega$	$R_2 = 300\ \Omega$	$i(t = 0)$
$\mathcal{E} = 12{,}0$ V	$L = 0{,}0450$ H	$i(t \to \infty)$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est qu'en fermant l'interrupteur, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à celui de la figure 11.12. Il n'y a pas de courant dans la résistance R_2. Le courant dans la pile est le même que celui qui circule dans la résistance R_1.

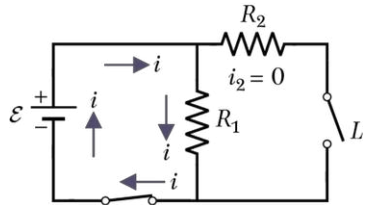


FIGURE 11.12
Le circuit équivalent à $t = 0$

Nous trouvons ensuite le courant à l'aide de ce circuit équivalent :

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$i = \frac{12{,}0\ \text{V}}{200\ \Omega} = 0{,}0600\ \text{A} = 60{,}0\ \text{mA} .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que lorsque $t \to \infty$, la bobine d'induction se comporte comme un fil. Le circuit équivalent est présenté à la figure 11.13. Dans ce circuit, les résistances sont en parallèle.

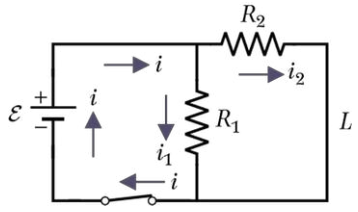


FIGURE 11.13
Le circuit équivalent lorsque $t \to \infty$

La résistance équivalente est obtenue à l'aide de l'équation 7.18 de la page 215 :

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} . \qquad \text{(ii)}$$

Nous obtenons un circuit avec une seule résistance $R_{\text{éq}}$, comme le montre la figure 11.14.

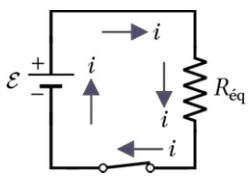


FIGURE 11.14
Le circuit équivalent lorsque $t \to \infty$

Le courant dans la pile est alors

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{éq}}} . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la résistance équivalente en remplaçant les valeurs dans l'équation (ii) :

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{1}{200\ \Omega} + \frac{1}{300\ \Omega} \right)^{-1} = 120\ \Omega . \qquad \text{(iv)}$$

Le courant dans la pile est donc

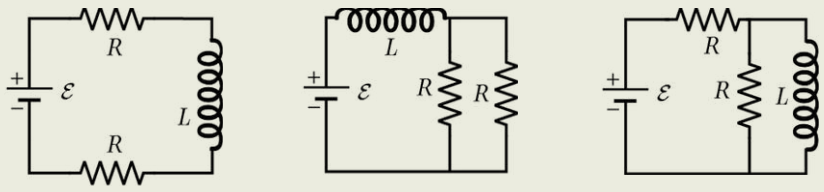
$$i = \frac{12{,}0\ \text{V}}{120\ \Omega} = 0{,}100\ \text{A} = 100\ \text{mA} . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le courant dans la pile est plus grand lorsque $t \to \infty$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.3

Classez les constantes de temps des circuits *RL* suivants selon un ordre croissant.



11.4 L'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction

Dans la section 11.3, nous avons vu que lorsqu'on débranche la pile dans un circuit *RL*, la bobine génère une f.é.m. d'auto-induction qui empêche le courant de tomber à zéro subitement. La résistance continue alors de dissiper de l'énergie,

car elle est parcourue par un courant. Comme le circuit est isolé, l'énergie doit être emmagasinée quelque part dans le circuit, donc dans la bobine d'induction, car c'est le seul autre élément du circuit.

Pour calculer cette énergie, revenons au circuit RL branché à une pile. Selon l'équation 11.12, obtenue à partir de la loi des mailles,

$$\mathcal{E} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{11.18}$$

Selon l'équation 6.28 de la page 197, la puissance fournie par la pile est $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}i$. On obtient alors la puissance de la pile dans le circuit RL en multipliant les deux membres de l'équation 11.18 par le courant i :

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{11.19}$$

Le membre gauche correspond à la puissance de la pile. Le premier terme du membre droit représente la puissance dissipée dans la résistance (*voir l'équation 6.30*). Le deuxième terme est donc la puissance emmagasinée dans la bobine :

$$P_L = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{11.20}$$

Lorsque le courant augmente ($\mathrm{d}i/\mathrm{d}t > 0$), la puissance est positive, ce qui indique que la bobine emmagasine de l'énergie. Lorsque le courant diminue ($\mathrm{d}i/\mathrm{d}t < 0$), la bobine fournit de l'énergie au circuit.

Il n'y a pas d'énergie emmagasinée quand le courant dans la bobine est nul. Lorsqu'un courant i circule dans une bobine d'induction, il y a de l'énergie potentielle magnétique, qui peut être fournie au circuit lorsque le courant diminue. Pour calculer l'énergie totale emmagasinée, on doit calculer l'intégrale de la puissance :

$$P_L = \frac{\mathrm{d}U_L}{\mathrm{d}t} = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow dU_L = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = Li\ \mathrm{d}i$$

$$U_L = \int_0^i Li'\ \mathrm{d}i' = \frac{L\,(i')^2}{2}\bigg|_0^i$$

Énergie d'une bobine

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2. \tag{11.21}$$

Cette équation représente l'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction lorsque celle-ci est parcourue par un courant i. La bobine emmagasine de l'énergie grâce au champ magnétique qu'elle produit, comme le condensateur emmagasine de l'énergie électrique grâce au champ électrique qu'il produit.

REMARQUE

Dans l'intégrale, le symbole i' a été utilisé pour représenter le courant intermédiaire dans la bobine, afin de le différencier du courant final i.

EXEMPLE 11.5 L'énergie dans un circuit *RL*

Une bobine d'induction, ayant une inductance de 0,330 H et une résistance de 15,0 Ω, est branchée à une source de f.é.m. de 20,0 V à $t = 0$. Après un intervalle de temps égal à la constante de temps, calculez l'énergie emmagasinée dans la bobine.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$L = 0{,}330$ H	$R = 15{,}0\ \Omega$	U_L
$\mathcal{E} = 20{,}0$ V	$t = \tau$	

Le courant est en croissance.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 11.21 qui permet de calculer l'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction :

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation 11.13 pour calculer le courant dans un circuit *RL* lorsque celui-ci est en croissance :

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le courant à l'aide de l'équation (ii) :

$$i = \frac{20{,}0\ \text{V}}{15{,}0\ \Omega}\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = 0{,}842\,8\ \text{A} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Nous obtenons alors l'énergie dans la bobine :

$$U_L = \frac{1}{2}0{,}330\ \text{H}\,(0{,}842\,8\ \text{A})^2 = 0{,}117\,\text{J} \ . \ \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons à la question. Le courant obtenu est plus faible que le courant maximal ($i_m = \mathcal{E}/R = 1{,}33$ A).

La densité d'énergie magnétique

Il est possible d'exprimer l'énergie magnétique en fonction du module du champ magnétique présent. Prenons par exemple un long solénoïde parcouru par un courant i. Selon l'équation 11.8, l'inductance est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \ .$$

L'énergie magnétique dans le solénoïde, lorsque celui-ci est parcouru par un courant i, est

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}i^2 \ .$$

Selon l'équation 8.26 de la page 281, le module du champ magnétique d'un long solénoïde est $B = \mu_0 ni = \mu_0 Ni/\ell$. On peut alors réécrire l'énergie magnétique de la façon suivante :

$$U_L = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 Ni}{\ell}\right)^2 (A\ell) = \frac{1}{2\mu_0}B^2\,(A\ell) \ . \qquad (11.22)$$

Le terme $A\ell$ représente le volume du solénoïde, c'est-à-dire le volume où il y a un champ magnétique (en supposant que le solénoïde est idéal, avec un champ à l'intérieur et aucun champ à l'extérieur). Donc, **l'énergie magnétique est emmagasinée dans le champ magnétique,** de la même façon que l'énergie électrique est emmagasinée dans le champ électrique.

On définit la densité d'énergie magnétique comme l'énergie magnétique par unité de volume :

Densité d'énergie magnétique

$$u_B = \frac{\text{énergie magnétique}}{\text{volume}} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \tag{11.23}$$

La densité magnétique se mesure en joules par mètre cube, et elle dépend du carré du module du champ magnétique. On a trouvé la densité d'énergie magnétique à partir d'un cas particulier. Il est cependant possible d'obtenir la même relation à l'aide d'un calcul général, mais qui dépasse le contexte de cet ouvrage.

À première vue, il semble surprenant de voir qu'un champ magnétique transporte une certaine densité d'énergie, car le champ magnétique ne peut pas effectuer un travail sur les particules chargées. En effet, la force magnétique sur une particule chargée est toujours perpendiculaire au déplacement de la particule. Par contre, si le champ magnétique change, cela induit un champ électrique qui, lui, peut effectuer un travail sur une particule chargée.

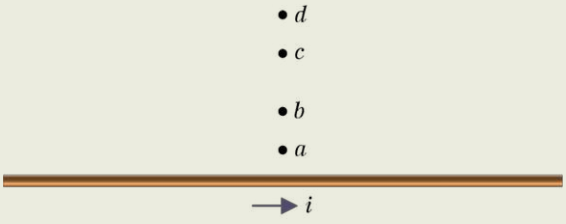
De façon générale, lorsqu'il y a simultanément un champ électrique et un champ magnétique dans une région, il y a aussi une densité d'énergie électromagnétique, qui correspond à la somme de la densité d'énergie électrique et de la densité d'énergie magnétique :

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}. \tag{11.24}$$

Cette relation sera utile dans le tome 3, lorsqu'il faudra calculer l'énergie transportée par la lumière, car celle-ci est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.4

La figure suivante montre quatre points situés près d'un long fil parcouru par un courant i. Classez les points selon un ordre croissant de la densité d'énergie magnétique à ces points.



EXEMPLE 11.6 L'énergie d'une onde radio

Une onde radio est composée d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Calculez la densité d'énergie électrique et la densité d'énergie magnétique à un endroit où le champ électrique a un module de 5,31 V/m et le champ magnétique, un module de $1{,}77 \times 10^{-8}$ T.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$E = 5{,}31$ V/m	u_E
$B = 1{,}77 \times 10^{-8}$ T	u_B

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.24, dont le premier terme donne la densité d'énergie électrique et le deuxième, la densité d'énergie magnétique :

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$u_E = \frac{8{,}854 \times 10^{-12}\ \text{F/m}\ (5{,}31\ \text{V/m})^2}{2} = 1{,}25 \times 10^{-10}\ \text{J/m}^3 \qquad \text{(réponse)}$$

$$u_B = \frac{(1{,}77 \times 10^{-8}\ \text{T})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}\ \text{F/m}} = 1{,}25 \times 10^{-10}\ \text{J/m}^3\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous avons trouvé la même valeur pour les deux densités d'énergie. Nous verrons dans le tome 3 que ce n'est pas un hasard : une onde radio transporte toujours autant d'énergie électrique que d'énergie magnétique.

11.5 Les oscillations dans un circuit LC

Pour fonctionner, les téléphones cellulaires et les radios utilisent des circuits électriques dans lesquels le courant électrique oscille, c'est-à-dire qu'il varie de façon périodique. Ceci est possible dans les circuits qui contiennent des bobines d'induction et des condensateurs.

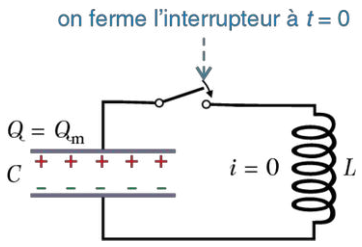


FIGURE 11.15
Un circuit LC

Un circuit LC comprend une bobine d'induction, dont l'inductance est L, branchée à un condensateur, dont la capacité est C (*voir la figure 11.15*). On suppose que la résistance du circuit est négligeable. On suppose aussi que le condensateur a une charge initiale Q_m sur son armature positive avant la fermeture de l'interrupteur. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

En fermant l'interrupteur, le condensateur peut se décharger. Les charges se déplacent d'une armature à l'autre, ce qui produit un courant i. La bobine génère une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la variation de courant, ce qui fait que le courant augmente graduellement. De même, lorsque le condensateur est déchargé, le courant dans le circuit ne peut pas tomber à zéro brusquement, car la bobine induit une f.é.m. qui s'oppose à la diminution du courant.

Le comportement de ce circuit est semblable à celui d'un système mécanique, composé d'un bloc attaché à un ressort, qui glisse sur une surface horizontale sans frottement. Lorsqu'on ferme le circuit, cela correspond au bloc qu'on laisse aller avec le ressort étiré à une position x_m (*voir la figure 11.16a à la page suivante*). Le bloc ne s'arrête pas lorsqu'il revient à la position d'équilibre du ressort, comme le courant qui continue de circuler dans le circuit lorsque le condensateur est déchargé (*voir la figure 11.16b*). Ceci va charger le condensateur selon la polarité opposée à celle au départ, comme le bloc qui comprime le ressort, jusqu'à une position $-x_m$, avant de s'arrêter. Le courant est nul dans le circuit, mais le condensateur est chargé (*voir la figure 11.16c*). Les charges vont se déplacer, créant un courant opposé au courant précédent, comme le bloc qui se déplace vers la droite à cause de la force exercée par le ressort (*voir la figure 11.16d*). Le condensateur se décharge complètement (le bloc revient à la position d'équilibre), mais la bobine s'oppose à la variation de courant, ce qui

charge de nouveau le condensateur. Lorsque la charge sur l'armature supérieure est $Q = Q_m$, le courant est nul. C'est l'état initial du circuit (*voir la figure 11.16a*). Le cycle recommence. La charge Q et le courant i oscillent.

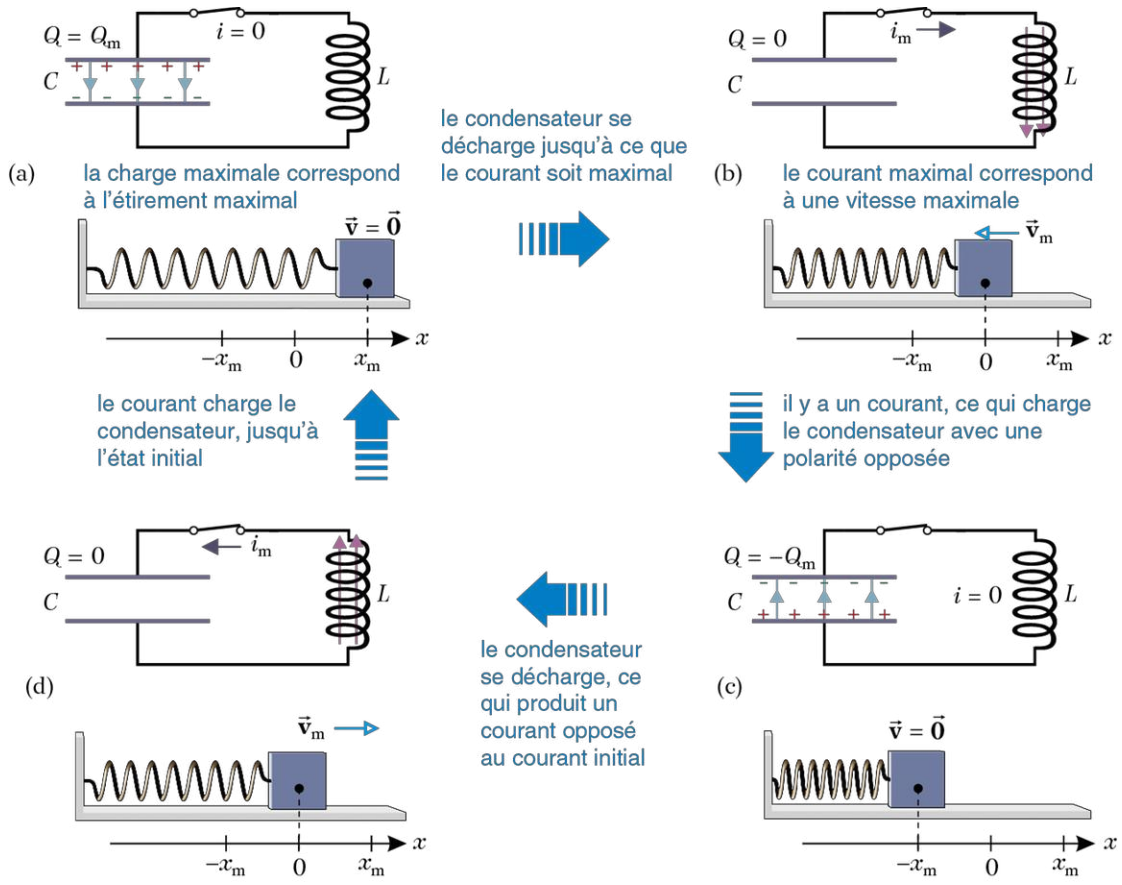


FIGURE 11.16
Le circuit LC et son équivalent mécanique. (a) La charge est maximale, et le courant est nul. (b) Le courant est maximal lorsque le condensateur est déchargé. (c) Le courant est nul lorsque le condensateur est complètement chargé. (d) Le condensateur est complètement déchargé, et le courant est maximal.

Pour analyser la situation, on utilise de nouveau la loi des mailles, pour une situation intermédiaire, où la charge du condensateur est Q et le courant dans le circuit est i, comme à la figure 11.17. On commence l'analyse au point a en décrivant la maille en sens horaire :

$$\Delta V_C + \Delta V_L = \frac{Q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0\,. \tag{11.25}$$

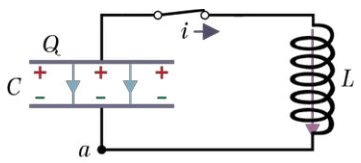


FIGURE 11.17
Le circuit LC dans un état intermédiaire

Dans cette équation, il y a deux variables : Q et i. On sait que le courant représente la valeur absolue du taux de variation de la charge. Dans notre cas, la charge Q du condensateur diminue, ce qui produit un courant positif. Alors,

$$i = -\frac{dQ}{dt}\,. \tag{11.26}$$

En insérant l'équation 11.26 dans l'équation 11.25, on obtient une équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{Q}{C} - L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \ . \tag{11.27}$$

On peut montrer que la solution de l'équation 11.27 est une fonction trigonométrique. Comme la charge à $t = 0$ est $Q = Q_m$, on trouve

$$Q = Q_m \cos(\omega t) \ . \tag{11.28}$$

Cette fonction représente la charge sur l'armature supérieure en fonction du temps, et elle est représentée à la figure 11.18. La charge est une fonction périodique, qui varie de Q_m (la charge maximale) à $-Q_m$. De façon générale, on appelle l'*amplitude* la valeur absolue du paramètre qui multiplie la fonction trigonométrique ; l'amplitude est toujours une valeur positive. La constante Q_m est donc appelée l'*amplitude de la charge*.

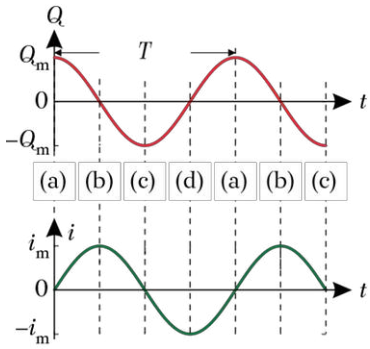


FIGURE 11.18
La charge (Q) et le courant (i) en fonction du temps. Les instants de la figure 11.16 sont indiqués en pointillé.

Le temps pour effectuer un cycle est appelé la période T. La constante ω est appelée la *fréquence angulaire* des oscillations dans le circuit LC, reliée à la période T et à la fréquence (l'inverse de la période) :

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \equiv 2\pi f \tag{11.29}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ . \tag{11.30}$$

La fréquence angulaire est une propriété du circuit : elle dépend des valeurs de la capacité et de l'inductance, mais elle est indépendante de la charge initiale ou du courant dans le circuit.

On calcule le courant dans le circuit à l'aide de l'équation 11.26 :

$$i = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sin(\omega t) = i_m \sin(\omega t) \ . \tag{11.31}$$

Le courant est aussi une fonction périodique. Cette fonction est présentée à la figure 11.18. Une valeur positive représente un courant en sens horaire, alors qu'une valeur négative représente un courant en sens antihoraire, dans le circuit de la figure 11.15. La fréquence angulaire ω est la même que pour la charge et elle est donnée par l'équation 11.30. L'amplitude du courant (la valeur maximale) est

$$i_m = \omega Q_m \ . \tag{11.32}$$

EXEMPLE 11.7 La radio AM

Un circuit LC est composé d'un bobine d'induction de 1,10 mH. Le circuit doit avoir une fréquence d'oscillation de 730 kHz pour avoir la même fréquence qu'une onde radio AM.

a. Quelle est la capacité du condensateur ?

b. Si la charge maximale sur le condensateur est de $3{,}4 \times 10^{-12}$ C, quel est le courant maximal dans le circuit ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 0{,}00110$ H	C
$f = 730 \times 10^3$ Hz	i_m
$Q_m = 3{,}4 \times 10^{-12}$ C	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.30 :

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$C = \frac{1}{4\pi^2 (730 \times 10^3)^2 \, 0{,}00110} = 4{,}32 \times 10^{-11} \text{ F} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.32, qui relie la charge maximale et le courant maximal :

$$i_m = \omega Q_m = 2\pi f Q_m . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$i_m = 2\pi \times 730 \times 10^3 \times 3{,}4 \times 10^{-12}$$
$$= 1{,}56 \times 10^{-5} \text{ A} = 16 \text{ µA} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons aux questions. La réponse de la question **b.** a été arrondie à deux chiffres significatifs, car la charge maximale est connue avec seulement deux chiffres significatifs.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.5

Dans un circuit LC, on ferme l'interrupteur à $t = 0$, lorsque la charge est $Q = Q_m$ et le courant, $i = 0$. La période d'oscillation est de 10 ms. À quel instant les conditions suivantes se produisent-elles pour la première fois ?

a. Le courant $i = i_m$.

b. Le courant est $i = -i_m$.

c. La charge du condensateur est $Q = -Q_m$.

L'énergie dans le circuit LC

À $t = 0$, le condensateur est pleinement chargé. Le condensateur a emmagasiné de l'énergie électrique. À mesure que le condensateur se décharge, cette énergie diminue. En même temps, le courant augmente et la bobine emmagasine de l'énergie magnétique. Lorsque le condensateur est complètement déchargé, il n'y a plus d'énergie électrique ; toute l'énergie est sous forme d'énergie magnétique dans la bobine. L'énergie magnétique se retransforme en énergie électrique, à mesure que le condensateur se recharge. Il y a donc une transformation d'énergie électrique en énergie magnétique, et inversement.

Prenons une situation intermédiaire, lorsque la charge du condensateur est Q, donnée par l'équation 11.28, et le courant est i, donné par l'équation 11.31. L'énergie électrique dans un condensateur est donnée par l'équation 5.16 de la page 172 :

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t) . \qquad (11.33)$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'induction est donnée par l'équation 11.21 :

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 Q_m^2 \sin^2(\omega t)\,.$$

Selon l'équation 11.30, $\omega^2 = 1/(LC)$, ce qui implique que l'énergie magnétique est

$$U_L = \frac{Q_m^2}{2C}\sin^2(\omega t)\,. \qquad (11.34)$$

La figure 11.19 montre le graphique des deux types d'énergie en fonction du temps. Lorsque l'énergie électrique est maximale, l'énergie magnétique est nulle, et vice versa. De plus, l'énergie mécanique du système doit être conservée, car la résistance du circuit est négligeable. Si on additionne l'énergie électrique, emmagasinée dans le condensateur, et l'énergie magnétique, emmagasinée dans la bobine, on obtient

$$E_{méc} = U_C + U_L = \frac{Q_m^2}{2C}\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = \frac{Q_m^2}{2C}\,. \qquad (11.35)$$

L'énergie mécanique est bien conservée.

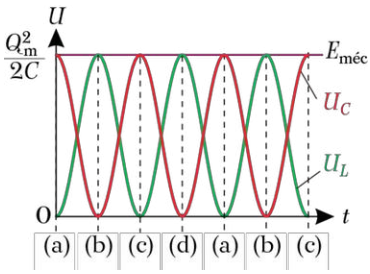


FIGURE 11.19
L'énergie électrique et l'énergie magnétique du circuit LC en fonction du temps. Les instants correspondants à la figure 11.16 sont indiqués en pointillé.

11.6 Les oscillations amorties dans un circuit RLC

À la section 11.5, nous avons étudié un circuit constitué d'un condensateur et d'une bobine d'induction, branchés ensemble avec des fils de résistance négligeable. Que se passe-t-il si la résistance du circuit n'est pas négligeable ? D'abord, l'énergie mécanique du système devrait diminuer graduellement, car la résistance parcourue par un courant va transformer l'énergie électrique en énergie thermique. Ceci devrait faire diminuer la charge du condensateur lorsque le courant est nul.

La figure 11.20 montre un circuit RLC en série, constitué d'une résistance R, d'un condensateur, ayant une capacité C, et d'une bobine d'induction, ayant une inductance L, branchés en série. On suppose que la charge initiale est Q_m et que l'interrupteur est fermé à $t = 0$. La figure 11.21 montre une situation intermédiaire, lorsque le courant dans le circuit est i et que la charge sur le

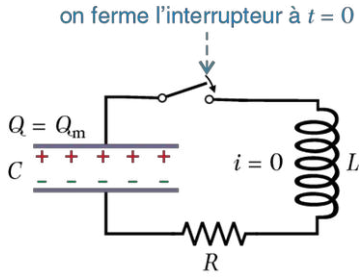


FIGURE 11.20
Un circuit RLC en série. La charge initiale sur le condensateur est Q_m.

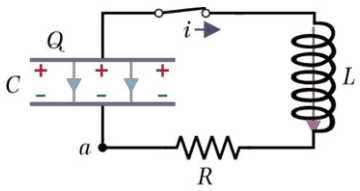


FIGURE 11.21
Le circuit RLC dans un état intermédiaire

condensateur est Q. Pour analyser ce circuit, on applique la loi des mailles, en commençant au point a, en sens horaire :

$$\Delta V_C + \Delta V_L + \Delta V_R = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0 \,. \tag{11.36}$$

L'équation 11.36 a deux variables, Q et i. De nouveau, on remplace le courant par l'opposé du taux de variation de la charge, car la charge diminue pour produire le courant :

$$i = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,.$$

L'équation 11.36 s'écrit alors

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = 0 \,. \tag{11.37}$$

C'est une équation différentielle du second ordre. La solution dépend de la valeur de R par rapport aux autres paramètres du circuit. Pour une faible résistance, la charge en fonction du temps doit ressembler aux résultats obtenus avec le circuit LC. On obtient une *oscillation amortie*, illustrée dans le graphique de la figure 11.22 :

$$Q = Q_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-Rt/(2L)} \cos(\omega_{\mathrm{a}} t) \,. \tag{11.38}$$

La fréquence de l'oscillation amortie ω_{a} est

$$\omega_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{na}}^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \,. \tag{11.39}$$

La fréquence angulaire est plus faible que dans le cas de l'oscillation non amortie (où $\omega_{\mathrm{na}} = 1/\sqrt{LC}$), ce qui produit une période d'oscillation plus grande que dans ce dernier cas. La présence de la résistance produit des cycles plus longs.

Par rapport à l'oscillation dans un circuit LC, l'amplitude de l'oscillation (ce qui multiplie la fonction cosinus) n'est pas une constante, mais elle décroît de façon exponentielle :

$$\text{amplitude} = Q_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-Rt/(2L)} \,. \tag{11.40}$$

Dans le graphique de la figure 11.22, la ligne en pointillé indique l'amplitude. La constante Q_{m} représente l'amplitude initiale, c'est-à-dire la charge maximale présente uniquement au temps initial. On peut dire qu'à chaque cycle, la charge du condensateur est plus faible que la charge du cycle précédent. Après un certain nombre de cycles, le condensateur ne se charge plus de façon suffisante.

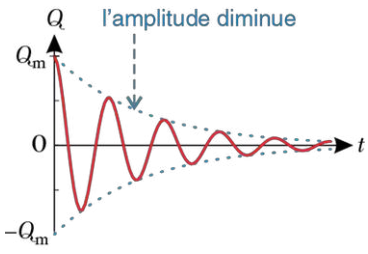


FIGURE 11.22
La charge en fonction du temps dans le circuit RLC, ce qui produit des oscillations amorties

Si la résistance est plus grande, de telle sorte que $\omega_a = 0$, il n'y a plus réellement d'oscillation, car le condensateur ne se charge pas de nouveau. On parle alors de *régime critique*. Dans ces conditions, le circuit revient à un état d'équilibre ($Q = 0$ et $i = 0$) le plus rapidement. La valeur critique de la résistance est

$$R_c = \sqrt{\frac{4L}{C}} . \tag{11.41}$$

C'est dans le régime critique que l'énergie électromagnétique se dissipe le plus rapidement en énergie thermique.

Si $R > R_c$, le circuit est en *régime surcritique*. Le circuit revient plus lentement à l'état d'équilibre, car la résistance est très élevée, ce qui produit un faible courant pour décharger le condensateur. Le graphique de la figure 11.23 montre la charge en fonction du temps dans le régime critique et dans le régime surcritique.

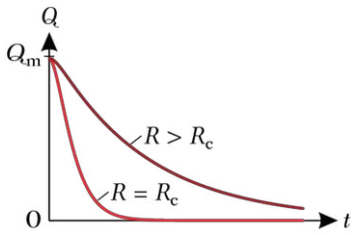


FIGURE 11.23
La charge en fonction du temps dans un régime critique et dans un régime surcritique

EXEMPLE 11.8 L'amplitude diminue

Un circuit RLC contient une bobine, ayant une inductance $L = 0{,}400$ H, un condensateur, dont la capacité est $C = 4{,}60$ µC, et une résistance $R = 40{,}0\ \Omega$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, lorsque $Q = Q_m$.

a. Après combien de temps l'amplitude de la charge a-t-elle diminué de moitié, par rapport à la valeur initiale ?

b. Combien d'oscillations se sont produites pendant ce temps ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	
$L = 0{,}400$ H	$C = 4{,}60 \times 10^{-6}$ F
$R = 40{,}0\ \Omega$	amplitude $= \dfrac{Q_m}{2}$

Inconnues
t
nombre d'oscillations

SOLUTION a.

Identifier la clé

La clé est que l'amplitude diminue selon l'équation 11.40 :

$$\text{amplitude} = Q_m\, e^{-Rt/(2L)} . \tag{i}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs et nous isolons t :

$$\frac{Q_m}{2} = Q_m\, e^{-Rt/(2L)}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{Rt}{2L} .$$

Comme $\ln(1/2) = -\ln(2)$, nous obtenons

$$t = \frac{2\ln(2)L}{R} = \frac{2\ln(2) \times 0{,}400\ \text{H}}{40{,}0\ \Omega}$$

$$= 1{,}386 \times 10^{-2}\ \text{s} = 13{,}9\ \text{ms} . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que la période représente le temps que dure une oscillation. Nous trouvons donc le nombre d'oscillations en divisant le temps par la période :

$$\text{nombre d'oscillations} = \frac{t}{T_a}, \qquad \text{(ii)}$$

où la période est calculée à partir de la fréquence angulaire, donnée par l'équation 11.39 :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{0,400\ \text{H} \times 4,60 \times 10^{-6}\ \text{F}} - \frac{(40,0\ \Omega)^2}{4(0,400\ \text{H})^2}}} = 8,543 \times 10^{-3}\ \text{s}. \qquad \text{(iv)}$$

En insérant ce résultat dans l'équation (ii), nous obtenons

$$\text{nombre d'oscillations} = \frac{1,386 \times 10^{-2}\ \text{s}}{8,543 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 1,62. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'amortissement est important, car l'amplitude diminue de moitié après à peine plus d'une oscillation et demie.

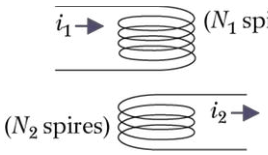
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion d'inductance et avons analysé les circuits comportant des bobines d'induction.

LES DÉFINITIONS

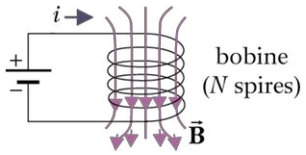
- Pour un système composé d'une bobine de N_1 spires, parcourue par un courant i_1, et d'une bobine de N_2 spires, parcourue par un courant i_2, l'**inductance mutuelle** du système est

$$M \equiv \frac{N_2\Phi_{2\leftarrow 1}}{i_1} \equiv \frac{N_1\Phi_{1\leftarrow 2}}{i_2} .$$



- Pour une bobine de N spires, parcourue par un courant i, l'**inductance de la bobine** est

$$L \equiv \frac{N\Phi_B}{i} .$$



- L'inductance d'un solénoïde idéal de N spires, ayant une longueur ℓ et une aire transversale A, est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} .$$

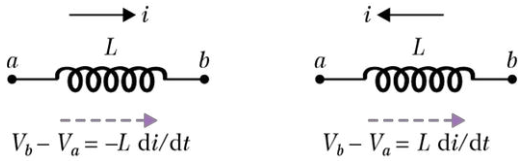
LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Dans un système composé de deux bobines, lorsque le courant change dans la première bobine, il y a une f.é.m. induite dans la deuxième bobine :

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} .$$

- Lorsque le courant change dans une bobine, il y a une f.é.m. d'auto-induction dans la bobine :

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt} .$$



- Une bobine d'induction, parcourue par un courant i, emmagasine une **énergie magnétique** :

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 .$$

- La **densité d'énergie magnétique** est l'énergie magnétique par unité de volume présente à un endroit :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} .$$

LES APPLICATIONS

Un ***circuit RL*** comprend une résistance et une bobine d'induction. La constante de temps du circuit est

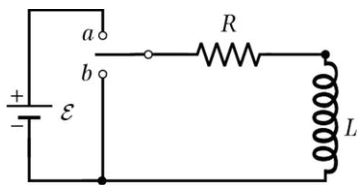
$$\tau = \frac{L}{R} .$$

- Lorsque le courant augmente,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = i_m\,(1 - e^{-t/\tau}) .$$

- Lorsque le courant diminue,

$$i = i_m\, e^{-t/\tau} .$$



Un ***circuit LC*** comprend un condensateur et une bobine d'induction.

- La charge et le courant oscillent :

$$Q = Q_m \cos(\omega t)$$
$$i = \omega Q_m \sin(\omega t) = i_m \sin(\omega t) .$$

- L'amplitude de la charge est Q_m, et l'amplitude du courant est $i_m = \omega Q_m$.
- La fréquence angulaire des oscillations est

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Un ***circuit RLC*** est constitué d'une résistance, d'une bobine d'induction et d'un condensateur. La charge effectue une oscillation amortie :

$$Q = Q_m\, e^{-Rt/(2L)} \cos(\omega_a t) ,$$

où la fréquence angulaire est

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} .$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • **R** problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 11.1 L'inductance mutuelle

E1 Un système constitué de deux bobines de 100 spires chacune, ayant une résistance de 1,26 Ω, possède une inductance mutuelle de 34,5 mH. Dans la deuxième bobine, le taux de variation du courant est de 3,75 A/s.

a. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite dans la première bobine ?

b. Quel est le courant induit dans la première bobine ?

E2 Le courant dans un solénoïde est donné par

$$i = 3{,}45 - 1{,}20t - 0{,}350t^3,$$

où t est mesuré en secondes et i, en ampères. Une bobine ayant une résistance de 0,700 Ω est située près du solénoïde. À $t = 1{,}50$ s, un courant de 65,0 mA circule dans la bobine. Quelle est l'inductance mutuelle du système ?

P3 Une bobine carrée de 100 spires, dont les côtés ont une longueur $a = 6{,}00$ cm, est située à une distance $d = 2{,}50$ cm à la droite d'un fil infini dans lequel un courant variable circule vers le haut (*voir la figure 11.24*). La résistance de la bobine est de 0,550 Ω. L'équation du courant dans le fil est

$$i_{\text{fil}}(t) = 5{,}00 \sin(120\pi t),$$

où t est exprimé en secondes et i, en ampères.

a. Quelle est l'inductance mutuelle du système ?

b. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite dans la bobine à $t = 0{,}040\,0$ s ?

c. Quel est le courant induit dans la bobine à $t = 0{,}040\,0$ s ?

d. Dans quel sens circule le courant induit dans la bobine à $t = 0{,}040\,0$ s ?

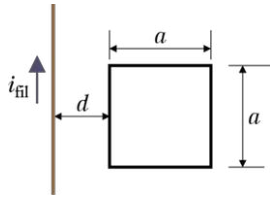


FIGURE 11.24 • Problème 3

P4 Une bobine de N spires, ayant un rayon r_{bobine}, est placée autour d'un très long solénoïde de n spires par mètre, ayant un rayon $r_{\text{sol}} < r_{\text{bobine}}$.

a. Calculez l'inductance mutuelle du système.

b. Calculez la grandeur de la f.é.m. induite dans le solénoïde si le taux de variation du courant dans la bobine est $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$.

P5 Une bobine de 100 spires, ayant un rayon de 10,0 cm, est placée autour d'un très long solénoïde de 1 200 spires/m, ayant un rayon de 5,00 cm.

a. Calculez l'inductance mutuelle du système.

b. Calculez la grandeur de la f.é.m. induite dans le solénoïde si le taux de variation du courant dans la bobine est de 40,0 A/s.

Section 11.2 L'auto-induction

Q6 Le tableau suivant présente les caractéristiques de cinq solénoïdes (le nombre de spires, l'aire de la section, la longueur et le courant dans le solénoïde). Classez les solénoïdes selon un ordre croissant de l'inductance.

solénoïde	spires	aire	longueur	courant
1	N	A	ℓ	i
2	$N/2$	A	ℓ	i
3	$2N$	$A/2$	ℓ	i
4	$N/2$	$A/2$	2ℓ	$2i$
5	N	$2A$	2ℓ	$2i$

Q7 La bobine d'induction illustrée à la figure 11.25 est parcourue par un courant orienté vers la gauche. On mesure la différence de potentiel entre les points a et b au moyen d'un voltmètre. Indiquez si le courant augmente, diminue ou demeure constant dans les situations suivantes :

a. $V_b > V_a$;

b. $V_b < V_a$;

c. $V_b = V_a$.

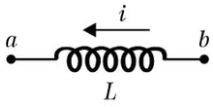


FIGURE 11.25 • Question 7

Q8 La figure 11.26 illustre le courant en fonction du temps qui circule dans une bobine d'induction. Classez les temps indiqués selon un ordre croissant de la f.é.m. induite (de la plus négative à la plus positive) dans la bobine d'induction.

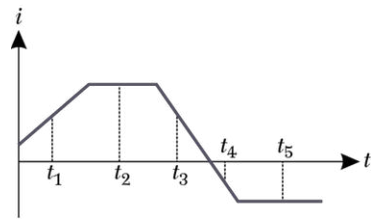


FIGURE 11.26 • Question 8

E9 Une bobine d'induction de 140 mH est parcourue par un courant initial de 4,50 A qui change à un taux de 7,50 A/s. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite aux bornes de la bobine d'induction ?

E10 Une bobine d'induction de 0,060 0 H est parcourue par un courant i qui circule vers la droite. Le courant varie en fonction du temps :

$$i = 4{,}00\ e^{-3{,}00t},$$

où le temps est exprimé en secondes et le courant, en ampères.

a. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite aux bornes de la bobine à $t = 0{,}00$ s ?

b. Quelle borne de la bobine a un potentiel plus élevé ?

E11 Un solénoïde, dont la section transversale a une aire de 3,75 mm^2, possède 8,00 spires par millimètre. Quelle est l'inductance par unité de longueur de ce solénoïde ?

E12 Un solénoïde de 150 spires, ayant un diamètre de 18,0 mm et une longueur de 35,0 cm, est parcouru par un courant de 10,0 A.

a. Quel est le flux magnétique à travers une spire du solénoïde ?

b. Quelle est l'inductance de ce solénoïde ?

E13 Un solénoïde de 250 spires, ayant une longueur de 37,2 cm et un diamètre de 17,3 cm, est parcouru par un courant de 26,0 A. Si le courant chute à zéro en 3,50 ms, quelle est la grandeur de la f.é.m. moyenne d'auto-induction ?

P14 Deux bobines d'induction, ayant des inductances L_1 et L_2, sont branchées ensemble dans un circuit. Elles sont séparées par une grande distance, de telle sorte que leur inductance mutuelle est négligeable. Les deux bobines peuvent être remplacées par une bobine équivalente, ayant une inductance $L_{éq}$. Calculez l'inductance équivalente si les bobines sont branchées :

a. en série ;

b. en parallèle.

P15 On branche deux bobines en série, comme le montre la figure 11.27. Les bobines ont une inductance respective L_1 et L_2, et le système a une inductance mutuelle M. Quelle est l'inductance équivalente de ce système si les bobines sont branchées :

a. comme dans la figure 11.27a.

b. comme dans la figure 11.27b.

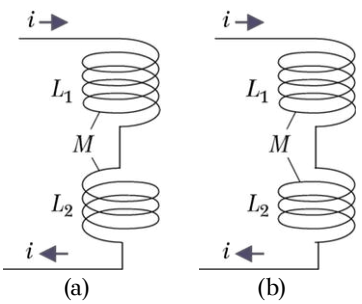


FIGURE 11.27 • Problème 15

R16 Une bobine toroïdale à base rectangulaire de N spires, a un rayon intérieur a, un rayon extérieur b et une hauteur h, comme le montre la vue en coupe de la figure 11.28. Un courant i circule dans la bobine.

a. Quel est le module du champ magnétique à l'intérieur de la bobine, à une distance r du centre ?

b. Quel est le flux magnétique à travers une spire ?

c. Démontrez que son inductance est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

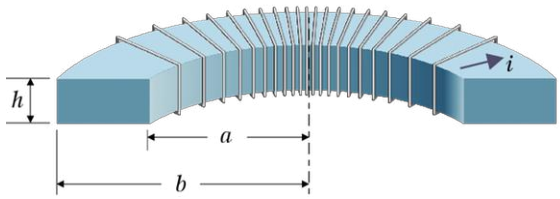


FIGURE 11.28 • Problème récapitulatif 16

Section 11.3 Le circuit RL

Q17 Dans les trois circuits de la figure 11.29, on ferme l'interrupteur à $t = 0$. Classez par ordre croissant le courant qui circule dans la pile à $t = 0$.

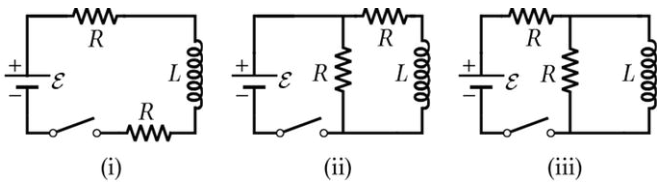


FIGURE 11.29 • Question 17

Q18 Dans les trois circuits de la figure 11.30, on ferme l'interrupteur à $t = 0$. Classez par ordre croissant le courant qui circule dans la pile lorsque $t \to \infty$.

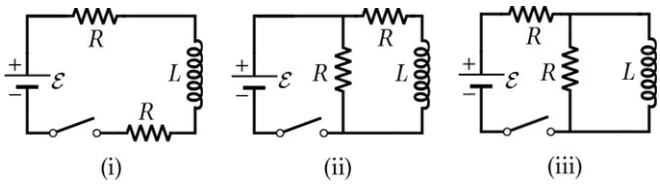


FIGURE 11.30 • Question 18

Q19 La figure 11.31 (*voir la page suivante*) illustre le courant en fonction du temps pour quatre circuits RL dans lesquels une pile est branchée en série à une résistance et une bobine d'induction et à un interrupteur. Dans les quatre circuits, la résistance R est la même. On ferme l'interrupteur des quatre circuits à $t = 0$. Classez les circuits par ordre croissant selon :

a. la constante de temps ;

b. l'inductance du circuit ;

c. la f.é.m. de la pile.

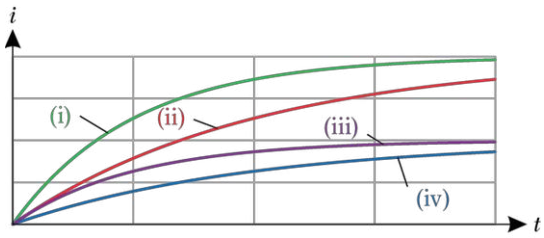


FIGURE 11.31 • Question 19

E20 Le circuit RL de la figure 11.32 est constitué d'un interrupteur, d'une source de f.é.m., d'une résistance de 47,0 Ω et d'une bobine de 75,0 mH. À $t = 0$, on place l'interrupteur à la position b, pour que la source de f.é.m. soit exclue du circuit et qu'un courant continue de circuler dans la bobine et dans la résistance. Après combien de temps le courant est-il égal à la moitié du courant initial ?

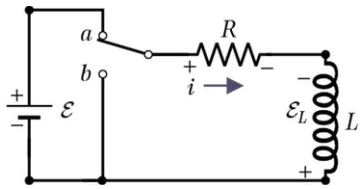


FIGURE 11.32 • Exercice 20

E21 Une pile de 12,0 V est branchée en série avec un interrupteur, une résistance de 132 Ω et une bobine d'induction de 65,4 mH. On ferme le circuit à $t = 0$.

a. Quelle est la constante de temps du circuit ?

b. À quel instant le courant est-il maximal ?

c. Quel est le courant maximal du circuit ?

d. Quelle est la puissance de la bobine à $t = 2{,}00$ ms ?

E22 Dans le circuit de la figure 11.33, $\mathcal{E} = 12{,}0$ V, $R = 47{,}0$ Ω et $L = 0{,}200$ H. On ferme le circuit à $t = 0$.

a. Après combien de temps le courant est-il égal à 100 mA ?

b. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la bobine à $t = 2{,}70$ ms ?

c. Quelle est la puissance dissipée par la résistance à $t = 3{,}50$ ms ?

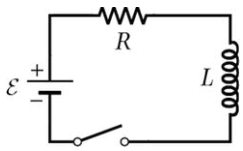


FIGURE 11.33 • Exercice 22

P23 Dans le circuit de la figure 11.34, $R_1 = 150{,}0$ Ω, $R_2 = R_3 = R_4 = 75{,}0$ Ω, $L = 82{,}0$ mH et $\mathcal{E} = 43{,}0$ V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Calculez le courant qui circule dans la pile à $t = 0$.

b. Calculez le courant qui circule dans la pile lorsque $t \to \infty$.

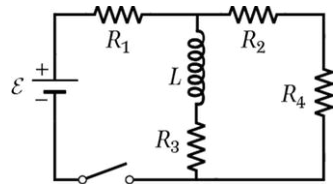


FIGURE 11.34 • Problèmes 23 et 24

R24 Dans le circuit de la figure 11.34, $R_1 = 50{,}0$ Ω, $R_2 = 75{,}0$ Ω, $R_3 = 60{,}0$ Ω, $R_4 = 25{,}0$ Ω, $L = 82{,}0$ mH et $\mathcal{E} = 24{,}0$ V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Calculez le courant qui circule dans chaque résistance à $t = 0$.

b. Calculez le courant qui circule dans chaque résistance lorsque $t \to \infty$.

c. Après un temps très long, on ouvre l'interrupteur. Quel est le courant dans chaque résistance tout juste après avoir ouvert l'interrupteur ?

d. Quelle est la f.é.m. d'auto-induction de la bobine tout juste après avoir ouvert l'interrupteur ?

R25 On fabrique un solénoïde en enroulant un fil de cuivre sur un cylindre de carton ayant un rayon de 5,00 cm. Le fil de cuivre a un diamètre de 1,024 mm et une longueur de 125 m. Supposez que le solénoïde est idéal, avec des spires jointives.

a. Quelle est la résistance du solénoïde ?

b. Quelle est l'inductance du solénoïde ?

On branche le solénoïde à une source de f.é.m. de 6,00 V dont la résistance interne est de 1,40 Ω.

c. Quelle est la constante de temps du circuit ?

d. Quel est le courant après 1,00 ms ?

P26 En utilisant la méthode décrite à la section 7.7, démontrez que la solution de l'équation différentielle 11.16 est

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} .$$

P27 En utilisant la méthode décrite à la section 7.7, démontrez que la solution de l'équation différentielle 11.12 est

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) .$$

Section 11.4 L'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction

Q28 Le tableau suivant montre l'inductance, le courant et la longueur de trois bobines dans des circuits différents. Classez par ordre croissant l'énergie emmagasinée dans les bobines.

bobine	L	i	ℓ
1	L_0	i_0	ℓ_0
2	$L_0/2$	$2i_0$	$2\ell_0$
3	$2L_0$	$i_0/2$	ℓ_0

E29 Un circuit RL est constitué d'une pile de 30,0 V, d'une résistance de 120 Ω et d'une bobine. Quelle est l'inductance de la bobine si celle-ci emmagasine une énergie de 23,4 mJ lorsque le courant a atteint sa valeur maximale ?

E30 Une bobine d'induction de 1,10 H est branchée en série à une pile de 50,0 V et à une résistance de 470 Ω. On ferme le circuit à $t = 0$. À $t = 3{,}50$ ms, déterminez :

a. le courant dans le circuit ;

b. l'énergie emmagasinée dans la bobine.

c. Quelle est la puissance dissipée dans la résistance ?

d. Quelle est la puissance fournie par la pile ?

E31 Dans le circuit RL de la figure 11.35, $\mathcal{E} = 15{,}0$ V, $R = 40{,}0$ Ω et $L = 0{,}600$ H. L'interrupteur est à la position a pendant un temps très long lorsqu'à $t = 0$, on le place à la position b.

a. Quelle est l'énergie initialement emmagasinée dans la bobine ?

b. Après combien de temps l'énergie de la bobine a-t-elle chuté à la moitié de la valeur initiale ?

c. À cet instant, quelle est la puissance fournie par la bobine ?

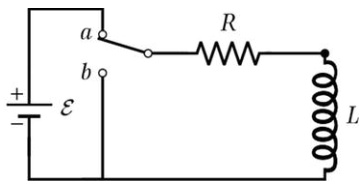


FIGURE 11.35 • Exercice 31

P32 Un long solénoïde de 2 048 spires ayant une longueur de 50,3 cm et un rayon de 2,85 cm est branché en série à une pile de 12,0 V, une résistance de 38,0 Ω et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Quelle est l'énergie magnétique dans le solénoïde à $t = 1{,}00$ ms ?

b. Quel est le module du champ magnétique dans le solénoïde à $t = 1{,}00$ ms ?

c. Quelle est la densité d'énergie magnétique à $t = 1{,}00$ ms ?

R33 Un fil de cuivre, dont la résistivité est ρ, a un diamètre d. Un courant i, uniformément distribué, circule dans le fil.

a. Quelle est la densité d'énergie magnétique à la surface du fil ?

b. Quelle est la densité d'énergie électrique à la surface du fil ?

R34 Un fil de cuivre a un diamètre de 1,50 mm et il est parcouru par un courant de 3,50 A. Quelle est la densité d'énergie électromagnétique à la surface du fil ?

Section 11.5 Les oscillations dans un circuit LC

E35 Un circuit LC est composé d'une bobine dont l'inductance est de 2,58 mH et d'un condensateur dont la capacité est de 330 µF. La différence de potentiel maximale aux bornes du condensateur est de 6,40 V.

a. Quelle est la fréquence angulaire du circuit ?

b. Quelle est la valeur maximale du courant ?

E36 Dans un circuit LC, le condensateur a une capacité de 4,75 µF et une charge maximale de 26,3 µC. On ferme l'interrupteur lorsque la charge du condensateur est maximale. La charge du condensateur est nulle pour la première fois 1,50 ms après la fermeture de l'interrupteur.

a. Quelle est la période ?

b. Quelle est la valeur de l'inductance de la bobine du circuit ?

c. Quelle est l'énergie maximale emmagasinée dans la bobine ?

E37 Dans un circuit LC, une bobine d'induction de 5,60 H est reliée à deux condensateurs en série de 10,0 µF et de 24,0 µF. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, lorsque la charge du condensateur est maximale. Le courant maximal dans le circuit est de 2,78 mA.

a. Quelle est la fréquence angulaire des oscillations du circuit ?

b. Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine d'induction à $t = 3{,}50$ ms ?

c. Quelle est l'énergie électrique dans chaque condensateur à $t = 3{,}50$ ms ?

d. Quelle est l'énergie mécanique du système ? Est-elle conservée ?

P38 Une bobine d'induction de 55,0 mH est reliée en série avec un condensateur de 3,67 µF et un interrupteur. Le condensateur est complètement chargé lorsqu'on ferme l'interrupteur à $t = 0$. Le courant maximal est de 1,00 A.

a. Quel est le plus court temps nécessaire pour que le courant atteigne 65,0 % de sa valeur maximale ?

b. Trouvez une expression mathématique pour le taux auquel l'énergie magnétique est emmagasinée dans la bobine d'induction.

Section 11.6 Les oscillations amorties dans un circuit RLC

E39 Dans les circuits RLC suivants, lesquels sont en régime critique et lesquels sont en régime surcritique ?

circuit	R (Ω)	L (mH)	C (mF)
(i)	2,0	2,0	4,0
(ii)	2,0	4,0	4,0
(iii)	2,0	2,0	2,0
(iv)	2,0	4,0	2,0
(v)	3,0	2,0	2,0
(vi)	1,0	2,0	2,0

E40 Dans un circuit *RLC*, un condensateur de 56,0 µF, une bobine d'induction de 38,0 mH et une résistance de 2,30 Ω sont reliés en série avec un interrupteur comme à la figure 11.36. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur a une charge initiale de 42,5 µC.

a. Quelle est la fréquence angulaire de l'oscillation amortie ?

b. Quelle charge possède l'armature supérieure du condensateur à $t = 6{,}00$ ms ?

c. Quelle est l'amplitude de l'oscillation à $t = 6{,}00$ ms ?

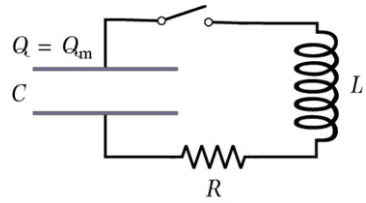


FIGURE 11.36 • Exercice 40

P41 Dans un circuit *RLC*, un condensateur a une capacité C et possède une charge initiale Q_m. La résistance est R, et la bobine d'induction a une inductance L. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. Trouvez l'expression du courant en fonction de temps.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

11.1	(iii) et (vi)	$\mathcal{E}_L$ est vers la gauche. Si le courant circule vers la droite, il doit augmenter pour que la f.é.m. induite, opposée à la variation, soit vers la gauche. Si le courant circule vers la gauche, il doit diminuer pour que la f.é.m. induite, qui s'oppose à la variation, soit vers la gauche.
11.2	**a.** le circuit (ii)	Plus la constante de temps est élevée et plus le courant décroît lentement, car $i = i_m\, e^{-t/\tau}$.
	b. le circuit (ii)	La constante de temps est $\tau = L/R$. Étant donné que les circuits ont des résistances identiques, le circuit ayant une plus grande inductance a la constante de temps la plus élevée.
11.3	$\tau_{(i)} < \tau_{(iii)} < \tau_{(ii)}$	La constante de temps est $\tau = L/R_{éq}$. Dans le circuit (iii), la résistance en parallèle avec la bobine d'induction n'a pas d'influence sur la constante de temps, car le courant qui passe à travers la bobine ne passe pas à travers cette résistance.
11.4	$u_d < u_c < u_b < u_a$	La densité d'énergie magnétique est proportionnelle au carré du module du champ magnétique. Le champ magnétique produit par un fil diminue lorsque la distance du fil augmente.
11.5	**a.** $t = 2{,}5$ ms **b.** $t = 7{,}5$ ms **c.** $t = 5{,}0$ ms	Le courant et la charge sont indiqués dans les graphiques de la figure 11.18. Le courant est maximal à $t = T/4$ et minimal à $t = 3T/4$. La charge est minimale à $t = T/2$.

Chapitre 12

Les circuits à courant alternatif

Buts du chapitre

Ce chapitre porte sur les circuits alimentés au moyen d'une différence de potentiel sinusoïdale. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de comprendre les notions d'amplitude et de déphasage ;
- d'analyser un circuit RLC alimenté par un générateur ;
- d'obtenir la condition de résonance d'un circuit ;
- de calculer la puissance moyenne dans un circuit à courant alternatif ;
- d'étudier le fonctionnement d'un transformateur.

Préalables

Ce chapitre porte sur la façon dont les dispositifs de circuit se comportent lorsqu'ils sont alimentés par une différence de potentiel sinusoïdale. Revoyez :

- les condensateurs, abordés à la section 5.1 ;
- la puissance dans les circuits, expliquée à la section 6.6 ;
- les lois de Kirchhoff, présentées à la section 7.2 ;
- la loi de Faraday, énoncée à la section 10.3 ;
- l'induction mutuelle et l'auto-induction, étudiées aux sections 11.1 et 11.2.

Un transformateur permet de changer l'amplitude de la différence de potentiel sinusoïdale.

Les compagnies d'électricité comme Hydro-Québec produisent de l'énergie électrique au moyen de générateurs. À l'aide d'un courant d'eau ou de vapeur sous pression, une bobine tourne dans un champ magnétique, ce qui induit une f.é.m. sinusoïdale. L'énergie électrique est ensuite transportée par des lignes à haute tension, jusqu'aux consommateurs. Les appareils électriques qu'on utilise tous les jours doivent fonctionner avec une différence de potentiel sinusoïdale ; ainsi, le courant produit varie continuellement dans le temps. C'est ce qu'on appelle un *courant alternatif*.

Nous avons étudié les circuits à courant continu dans les chapitres 7 et 11, où nous avons analysé le comportement des résistances, des condensateurs et des bobines d'induction. Nous allons maintenant examiner le comportement de ces dispositifs lorsque la f.é.m. du circuit varie de façon sinusoïdale. Une méthode graphique, basée sur des vecteurs tournants, permettra d'effectuer les calculs qui font intervenir des fonctions sinusoïdales.

L'utilisation d'un réseau électrique à courant alternatif présente des avantages lors du transport de l'énergie électrique. En effet, pour réduire les pertes d'énergie électrique par effet Joule, le courant doit être faible dans les conducteurs d'une ligne de transport. Nous verrons qu'il est possible de réduire le courant en augmentant en même temps la différence de potentiel, à l'aide d'un appareil appelé *transformateur*. La différence de potentiel est ensuite diminuée près du lieu de consommation, au moyen d'un autre transformateur, comme celui qui est présenté sur la photo en début de chapitre. Les circuits à courant alternatif font aussi partie intégrante des appareils de communication, comme les radios et les téléphones cellulaires.

12.1 Les circuits à courant alternatif

À la section 10.6, nous avons vu que lorsqu'une bobine tourne à vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme, il y a une f.é.m. induite dans la bobine. Cette f.é.m. varie de façon sinusoïdale en fonction du temps :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t) \,. \tag{12.1}$$

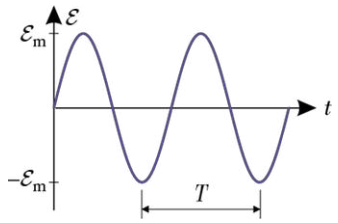


FIGURE 12.1
Une f.é.m. sinusoïdale

La figure 12.1 montre la f.é.m. en fonction du temps. La f.é.m. varie de $+\mathcal{E}_m$ (la valeur maximale) à $-\mathcal{E}_m$. Le paramètre $\mathcal{E}_m$ est appelé l'*amplitude de la f.é.m.* Par définition, l'amplitude d'une quantité est toujours positive, et elle s'exprime à l'aide des mêmes unités que la quantité. Donc, $\mathcal{E}_m$ se mesure en volts, comme la f.é.m.

Le paramètre ω est appelé la *fréquence angulaire*. Ce paramètre est relié à la fréquence f et à la période T du mouvement de rotation de la bobine dans le champ magnétique :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \,. \tag{12.2}$$

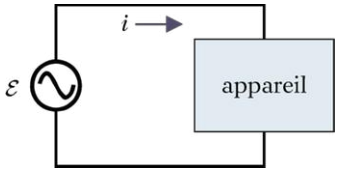


FIGURE 12.2
Un appareil est branché à un générateur.

Dans le Système international, la fréquence angulaire se mesure en radians par seconde (rad/s).

Prenons le circuit de la figure 12.2, avec un générateur branché à un appareil quelconque (qui peut contenir des résistances, des condensateurs et des bobines d'induction), ce qui constitue un circuit. On utilise le symbole —∿— pour

représenter un générateur qui produit une f.é.m. sinusoïdale. La f.é.m. génère un courant i dans le circuit. Ce courant varie aussi de façon sinusoïdale. Selon une convention, on écrit le courant de la façon suivante :

$$i = i_m \sin(\omega t - \phi) . \tag{12.3}$$

Le courant varie avec la même fréquence angulaire ω que la f.é.m. L'amplitude du courant est i_m, c'est-à-dire que le courant varie de $+i_m$ à $-i_m$ pendant un cycle. La constante ϕ, qu'on appelle la *constante de phase*, représente le déphasage du courant par rapport à la f.é.m. En général, le courant et la f.é.m. n'atteignent pas leurs valeurs maximales respectives en même temps (*voir la figure 12.3*). La constante de phase est mesurée en radians ; dans les circuits, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

- Lorsque $\phi = 0$, la f.é.m. et le courant sont en phase. Le courant est maximal quand la f.é.m. est maximale (*voir la figure 12.3a*).
- Lorsque $\phi > 0$, le courant est en retard sur la f.é.m., c'est-à-dire que le courant atteint sa valeur maximale après que la f.é.m. a atteint sa valeur maximale (*voir la figure 12.3b*).
- Lorsque $\phi < 0$, le courant est en avance sur la f.é.m., c'est-à-dire que le courant atteint sa valeur maximale avant que la f.é.m. ait atteint sa valeur maximale (*voir la figure 12.3c*).

REMARQUE

Il est possible de transférer la constante de phase dans la définition de la f.é.m., de telle sorte que le courant n'a pas de constante de phase. Dans cette convention, la f.é.m. s'écrit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \phi)$. On utilise un signe négatif dans l'argument du sinus de l'équation 12.3 pour que la constante de phase soit la même dans les deux conventions.

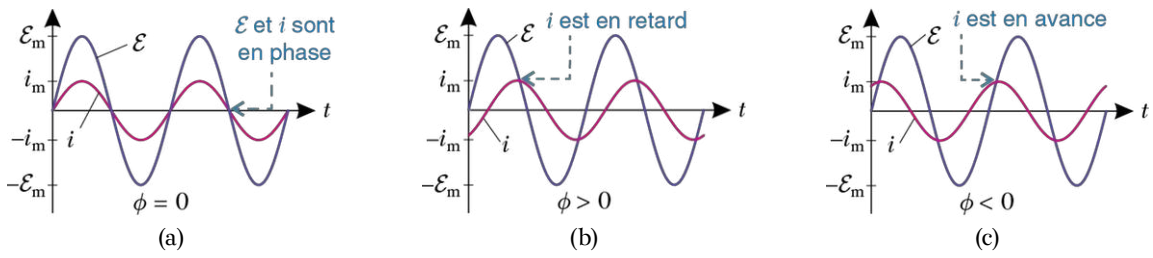


FIGURE 12.3

La f.é.m. et le courant en fonction du temps : (a) le déphasage est nul ; (b) le déphasage est positif ; (c) le déphasage est négatif.

La f.é.m. dépend du générateur, alors que le courant dépend des caractéristiques du circuit. La valeur de $\mathcal{E}_m$ et de la fréquence angulaire ω sont des propriétés du générateur. Dans les réseaux électriques d'Amérique du Nord, l'amplitude de la f.é.m. est d'environ 170 V et la fréquence, de 60,0 Hz. Ailleurs, la fréquence est habituellement de 50 Hz et l'amplitude de la f.é.m., d'environ 311 V. Ces valeurs sont différentes parce que les réseaux électriques se sont développés de façon indépendante en Europe et en Amérique du Nord.

L'amplitude du courant i_m et la constante de phase ϕ dépendent du circuit, c'est-à-dire des caractéristiques des éléments du circuit. Nous allons voir dans les prochaines sections la façon de calculer i_m et ϕ dans le cas de résistances, de condensateurs et de bobines d'induction.

REMARQUE

La constante de phase doit être exprimée en radians et la fréquence angulaire en rad/s lorsqu'on utilise les équations 12.1 et 12.3. Cependant, la constante de phase est exprimée de façon usuelle en degrés lorsqu'on veut seulement indiquer le déphasage.

La représentation de Fresnel

Pour analyser les circuits à courant alternatif, on va de nouveau utiliser les lois de Kirchhoff, qui demeurent valides pour les *valeurs instantanées* du courant et de la différence de potentiel. Par exemple, dans le cas de la loi des mailles, il faut additionner les différences de potentiel instantanées (c'est-à-dire pour un temps t fixe) des éléments d'une maille :

$$\sum \Delta V_i = 0 \,.$$

Les valeurs instantanées sont données par des fonctions trigonométriques, qu'on doit additionner. Il est possible d'utiliser des identités trigonométriques pour simplifier les résultats. Dans le cas présent, on va plutôt employer une méthode graphique, qu'on appelle la *représentation de Fresnel*, en l'honneur du physicien français Augustin Fresnel (1788-1827). Cette méthode représente une fonction trigonométrique par un *vecteur tournant*, aussi appelé un *vecteur de Fresnel* ou *phaseur**.

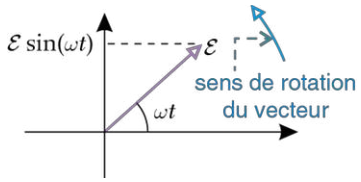


FIGURE 12.4
La représentation de Fresnel pour une f.é.m. sinusoïdale

Prenons d'abord la f.é.m. d'un générateur, donnée par $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$. On définit un vecteur dans un plan, qui tourne autour de l'origine en sens antihoraire, à une vitesse angulaire ω (*voir la figure 12.4*). Le module du vecteur est proportionnel à l'amplitude $\mathcal{E}_m$, et l'angle entre l'axe horizontal et le vecteur correspond à ωt. La valeur instantanée de la f.é.m. est obtenue en calculant la composante du vecteur le long de l'axe vertical.

Supposons maintenant que le courant dans le circuit est $i = i_m \sin(\omega t - \phi)$. Le vecteur de Fresnel représentant le courant tourne à la même vitesse angulaire. Le déphasage entre la f.é.m. et le courant est représenté par l'angle ϕ entre la f.é.m. et le courant, comme le montre la figure 12.5. Dans cette figure, le vecteur représentant le courant est tracé à une échelle différente de celle du vecteur représentant la f.é.m., car ces deux quantités n'ont pas les mêmes unités. Le signe de ϕ suit la convention habituelle lorsqu'on le trace **du courant vers la f.é.m.** : un angle en sens antihoraire est positif, et un angle en sens horaire est négatif.

Pour additionner deux valeurs instantanées, on doit additionner les vecteurs de Fresnel correspondants. On réduit donc l'addition de fonctions trigonométriques à l'addition de vecteurs.

* Cette méthode est basée sur l'utilisation des nombres complexes $a + bi = re^{i\theta}$, avec $i = \sqrt{-1}$, pour représenter une fonction trigonométrique.

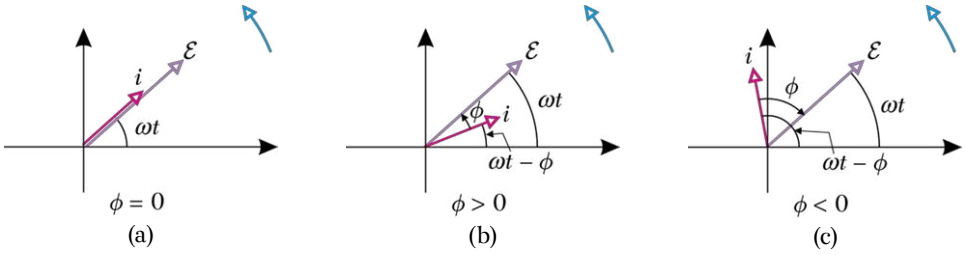
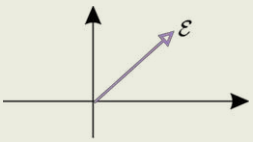


FIGURE 12.5
La représentation de Fresnel : (a) le courant est en phase avec la f.é.m. ; (b) le courant est en retard sur la f.é.m. ; (c) le courant est en avance sur la f.é.m.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.1

Dans la représentation de Fresnel suivante, de quelle façon la valeur instantanée de la f.é.m. change-t-elle ?

(i) Elle reste constante.
(ii) Elle augmente.
(iii) Elle diminue.
(iv) On ne peut pas le dire.



12.2 Les résistances dans les circuits à courant alternatif

Dans le circuit de la figure 12.6, une résistance R est branchée à un générateur à courant alternatif, dont la f.é.m. est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$. On veut obtenir la forme du courant qui circule dans la résistance, sous la forme $i_R = i_{Rm} \sin(\omega t - \phi_R)$, c'est-à-dire qu'on veut obtenir l'amplitude du courant i_{Rm} et la constante de phase ϕ_R.

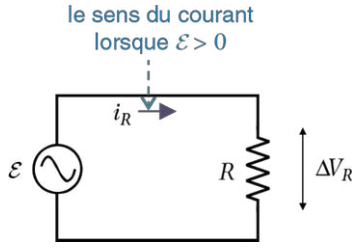


FIGURE 12.6
Une résistance est branchée à un générateur.

Selon la loi des mailles, on obtient :

$$\mathcal{E} - \Delta V_R = 0 \Rightarrow \Delta V_R = \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t) .$$

La différence de potentiel aux bornes de la résistance est égale à la f.é.m., car c'est le seul dispositif branché au générateur. Pour la même raison, ΔV_R est en phase avec la f.é.m.

On peut écrire la différence de potentiel aux bornes de la résistance de la façon suivante :

$$\Delta V_R = \Delta V_{Rm} \sin(\omega t) , \qquad (12.4)$$

où ΔV_{Rm} est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de la résistance. Dans le cas d'une résistance, la différence de potentiel est proportionnelle au courant qui circule dans la résistance :

$$\Delta V_R = R i_R .$$

On obtient alors le courant :

$$i_R = \frac{\Delta V_R}{R} = \frac{\Delta V_{Rm}}{R} \sin(\omega t) \,. \tag{12.5}$$

En comparant cette équation à la formule générale du courant ($i = i_m \sin[\omega t - \phi]$), on obtient l'amplitude du courant et la constante de phase, entre le courant et la différence de potentiel pour une résistance :

$$i_{Rm} = \frac{\Delta V_{Rm}}{R} \tag{12.6}$$

$$\phi_R = 0 \,. \tag{12.7}$$

L'amplitude du courant est reliée par l'équation habituelle, la loi d'Ohm, comme nous l'avons vu à la section 6.27. De plus, le courant et la différence de potentiel aux bornes d'une résistance sont en phase. La figure 12.7 montre le courant et la différence de potentiel en fonction du temps, ainsi que la représentation de Fresnel pour la résistance.

REMARQUE

La relation $\Delta V = Ri$ s'applique pour les valeurs instantanées et pour les amplitudes.

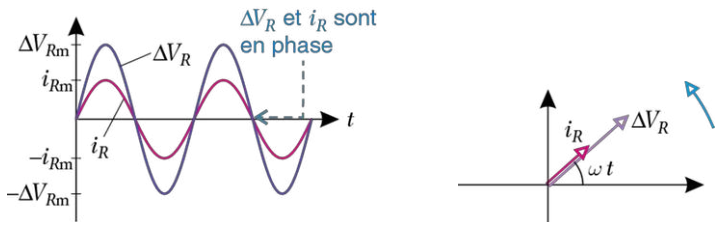


FIGURE 12.7

(a) Le courant et la différence de potentiel aux bornes d'une résistance dans un circuit à courant alternatif. (b) La représentation de Fresnel pour la résistance dans un circuit à courant alternatif.

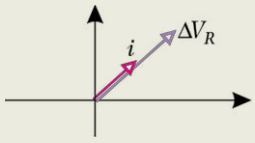
TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.2

La représentation de Fresnel suivante montre les vecteurs tournants pour la différence de potentiel et le courant dans une résistance R. Que peut-on dire sur la valeur de la résistance ?

(i) $R > 1\ \Omega$.

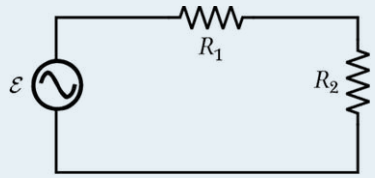
(ii) $R < 1\ \Omega$.

(iii) L'information est insuffisante pour déterminer la valeur.



EXEMPLE 12.1 Deux résistances et un générateur

On branche une résistance $R_1 = 100\ \Omega$ et une résistance $R_2 = 150\ \Omega$ à un générateur ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin[\omega t]$) ; l'amplitude est de 12,0 V et la fréquence, de 60,0 Hz (*voir la figure ci-contre*).



a. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance ?

b. Quel est le courant dans le circuit à $t = 20{,}0$ ms ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$R_1 = 100\ \Omega$	$R_2 = 150\ \Omega$	ΔV_{m1}
$\mathcal{E}_m = 12{,}0$ V	$f = 60{,}0$ Hz	ΔV_{m2}
$t = 0{,}020\,0$ s		i

Les deux résistances sont en série, ce qui signifie que le courant est le même et que la résistance équivalente est

$$R_{éq} = R_1 + R_2 = 100\ \Omega + 150\ \Omega = 250\ \Omega\,. \qquad \text{(i)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.6 pour chaque résistance :

$$\Delta V_{m1} = R_1 i_m \qquad \text{(ii)}$$

$$\Delta V_{m2} = R_2 i_m\,, \qquad \text{(iii)}$$

où l'amplitude du courant est calculée à partir de la résistance équivalente du circuit :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_{éq}}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'amplitude du courant en remplaçant les valeurs dans l'équation (iv) :

$$i_m = \frac{12{,}0\ \text{V}}{250\ \Omega} = 0{,}048\,0\ \text{A}\,. \qquad \text{(v)}$$

Les amplitudes de la différence de potentiel aux bornes des résistances sont

$$\Delta V_{m1} = 100\ \Omega \times 0{,}048\,0\ \text{A} = 4{,}80\ \text{V} \quad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_{m2} = 150\ \Omega \times 0{,}048\,0\ \text{A} = 7{,}20\ \text{V}. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Le courant dans le circuit est le courant dans la résistance équivalente, donné par l'équation 12.5 :

$$i = \frac{\Delta V_R}{R_{éq}} = i_m \sin(\omega t)\,. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$i = (0{,}048\,0\ \text{A}) \sin\big([2\pi \times 60{,}0]\ \text{rad/s} \times 0{,}020\,0\ \text{s}\big)$$
$$= 0{,}045\,7\ \text{A}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Dans la solution **a.**, la somme des différences de potentiel donne bien la f.é.m., comme il se doit pour des résistances, car les différences de potentiel sont en phase. Dans la solution **b.**, il faut faire attention aux unités : l'argument du sinus est en radians. La valeur instantanée est plus petite que l'amplitude, comme il se doit.

12.3 Les condensateurs dans les circuits à courant alternatif

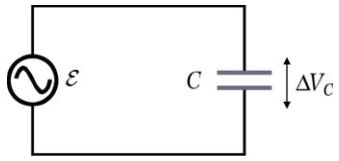


FIGURE 12.8
Un condensateur est branché à un générateur.

On veut maintenant analyser le comportement d'un condensateur lorsque celui-ci est soumis à une différence de potentiel sinusoïdale. Pour ce faire, on branche un condensateur, ayant une capacité C, à un générateur, dont la f.é.m. est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$, comme le montre la figure 12.8. Selon la loi des mailles,

$$\mathcal{E} - \Delta V_C = 0 \Rightarrow \Delta V_C = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)\,.$$

La différence de potentiel aux bornes du condensateur est la même que la f.é.m., car il est branché directement au générateur. On peut écrire

$$\Delta V_C = \Delta V_{Cm} \sin(\omega t)\,, \tag{12.8}$$

où ΔV_{Cm} est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

Selon l'équation 5.1 de la page 164, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est reliée à la charge sur les armatures :

$$Q = C\,\Delta V_C\,. \tag{12.9}$$

De plus, le courant dans le circuit correspond au taux de variation de la charge sur les armatures du condensateur. Selon l'équation 6.3 de la page 192,

$$\begin{aligned} i_C \equiv \frac{dQ}{dt} &= C\frac{d(\Delta V_C)}{dt} \\ &= \omega C\,\Delta V_{Cm} \cos(\omega t)\,. \end{aligned}$$

On remarque que le courant n'est pas proportionnel à la différence de potentiel aux bornes du condensateur, car le courant est donné par une fonction sinus, alors que la différence de potentiel l'est par une fonction cosinus.

On peut utiliser l'identité trigonométrique $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ pour exprimer le courant en fonction d'un sinus. Le courant s'écrit

$$i_C = \omega C\,\Delta V_{Cm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{12.10}$$

La figure 12.9a montre le graphique du courant et de la différence de potentiel en fonction du temps.

Dans le cas du condensateur, le courant et la différence de potentiel ne sont pas en phase, contrairement à la résistance où ces deux quantités sont en phase. En effet, le courant est maximal un quart de période avant le maximum de la différence de potentiel. Le courant est maximal lorsque le condensateur est déchargé. Quand ce dernier est complètement chargé, le courant est nul. Dans la figure 12.9b, on peut voir la représentation de Fresnel pour le condensateur. En résumé,

Dans un condensateur, le courant est en avance de $\pi/2$ sur la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

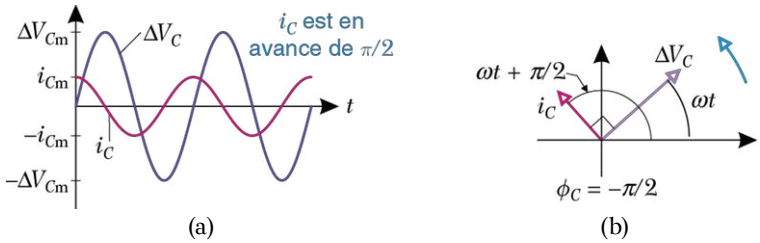


FIGURE 12.9
(a) Le courant et la différence de potentiel aux bornes du condensateur, en fonction du temps. (b) La représentation de Fresnel pour le condensateur.

En comparant l'équation 12.10 à la forme générale du courant $i = i_m \sin(\omega t - \phi)$, on obtient le déphasage du courant pour un condensateur :

$$\phi_C = -\frac{\pi}{2} . \qquad (12.11)$$

La réactance capacitive

Le courant dans le condensateur n'est pas proportionnel à la différence de potentiel. Cependant, l'amplitude du courant est proportionnelle à l'amplitude de la différence de potentiel. En effet, selon l'équation 12.10, on peut écrire

$$i_m = \omega C \, \Delta V_{Cm} . \qquad (12.12)$$

Cette expression ressemble à la loi d'Ohm. On définit la réactance capacitive :

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} . \qquad (12.13)$$

Réactance capacitive

L'amplitude du courant s'écrit alors

$$i_{Cm} = \frac{\Delta V_{Cm}}{X_C} . \qquad (12.14)$$

De la même façon que la résistance est une constante de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant dans une résistance, la réactance capacitive est la constante de proportionnalité entre l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur et l'amplitude du courant. Comme la résistance, la réactance se mesure en ohms (Ω).

Contrairement à la résistance, la réactance capacitive dépend de la fréquence angulaire (*voir le graphique de la figure 12.10*). En effet, la réactance tend vers l'infini pour une fréquence nulle, ce qui implique que l'amplitude du courant est de plus en plus faible lorsque la fréquence s'approche de zéro. Ceci a du sens, car le condensateur bloque le courant dans un circuit à courant continu. À l'opposé, pour une fréquence très grande, le courant a une très grande amplitude. Dans cette dernière situation, le condensateur n'ayant pas le temps de se charger, il se comporte comme un simple fil.

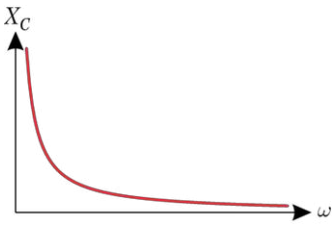


FIGURE 12.10
La réactance capacitive en fonction de la fréquence angulaire

MISE EN GARDE

La réactance capacitive est une constante de proportionnalité entre l'amplitude du courant et l'amplitude de la différence de potentiel. Il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les valeurs instantanées du courant et de la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.3

Un condensateur est relié à une f.é.m. alternative. Comment varie l'amplitude du courant dans le condensateur si on diminue la fréquence de la f.é.m.?

EXEMPLE 12.2 Une fréquence choisie

Un condensateur de 300 nF est soumis à une différence de potentiel sinusoïdale dont l'amplitude est de 3,00 V. Pour quelle fréquence l'amplitude du courant est-elle de 20,0 mA?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\Delta V_{Cm} = 3{,}00\ \text{V}$	$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$
$i_{Cm} = 0{,}020\,0\ \text{A}$	
$C = 300 \times 10^{-9}\ \text{F}$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.14, qui relie l'amplitude du courant et l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes du condensateur:

$$i_{Cm} = \frac{\Delta V_{Cm}}{X_C}\,, \qquad \text{(i)}$$

où X_C est la réactance capacitive:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi C X_C}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la réactance du condensateur en isolant X_C dans l'équation (i):

$$X_C = \frac{\Delta V_{Cm}}{i_{Cm}} = \frac{3{,}00\ \text{V}}{0{,}020\,0\ \text{A}} = 150\ \Omega\,. \qquad \text{(iii)}$$

Nous calculons ensuite la fréquence à l'aide de l'équation (ii):

$$f = \frac{1}{2\pi \times 300 \times 10^{-9}\ \text{F} \times 150\ \Omega} = 3{,}54\ \text{kHz}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct. Remarquez que la réactance est utilisée comme une résistance dans la loi d'Ohm. Il faut se rappeler que ceci est correct dans le cas des amplitudes et non dans celui des valeurs instantanées.

12.4 Les bobines d'induction dans les circuits à courant alternatif

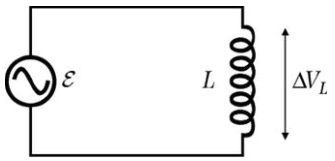


FIGURE 12.11
Une bobine d'induction est branchée à un générateur.

On veut maintenant obtenir le comportement des bobines d'induction dans les circuits alimentés par une f.é.m. sinusoïdale. La figure 12.11 montre une bobine d'induction, dont l'inductance est L, branchée à un générateur à courant alternatif dont la f.é.m. est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$.

Selon la loi des mailles, on obtient

$$\mathcal{E} - \Delta V_L = 0 \Rightarrow \Delta V_L = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)\,.$$

La différence de potentiel de la bobine est la même que la f.é.m., car la bobine est branchée directement au générateur. Il est utile d'écrire la différence aux bornes de la bobine de la façon suivante:

$$\Delta V_L = \Delta V_{Lm} \sin(\omega t)\,. \qquad (12.15)$$

La différence de potentiel aux bornes d'une bobine est reliée à la variation de courant qui y circule, car la bobine induit une f.é.m. lorsque le courant change :

$$\Delta V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Pour trouver le courant, on doit inverser cette équation à l'aide d'une intégrale :

$$\mathrm{d}i_L = \frac{1}{L}\Delta V_L \ \mathrm{d}t = \frac{1}{L}\Delta V_{Lm}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$i_L = \frac{\Delta V_{Lm}}{L}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\Delta V_{Lm}}{\omega L}\left[-\cos(\omega t)\right].$$

REMARQUE

Mathématiquement, on doit ajouter une constante d'intégration à la dernière équation. Cette constante représente un courant continu qui serait la conséquence d'un générateur ayant une f.é.m. continue. Ici, la f.é.m. est sinusoïdale, sans valeur constante. Pour cette raison, la constante d'intégration est simplement 0.

Pour pouvoir comparer $i = i_m \sin(\omega t - \phi)$ à la formule du courant, on utilise l'identité trigonométrique $(-\cos\theta) = -\sin(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta - \pi/2)$, présentée aussi à l'annexe E. Ceci permet d'écrire le courant de la façon suivante :

$$i_L = \frac{\Delta V_{Lm}}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_{Lm}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (12.16)$$

La figure 12.12a illustre le courant et la différence de potentiel aux bornes de la bobine. La différence de potentiel est maximale lorsque le courant est nul. C'est dans cette situation que le taux de variation du courant (la pente de la courbe du courant) est le plus grand. La différence de potentiel atteint sa valeur maximale avant le courant. On peut donc dire, dans le cas d'une bobine d'induction :

Le courant dans une bobine d'induction est en retard de $\pi/2$ par rapport à la différence de potentiel aux bornes de la bobine.

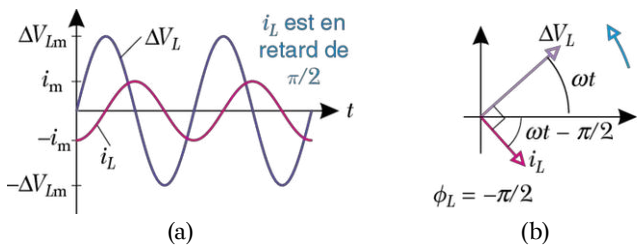


FIGURE 12.12

Le courant et la différence de potentiel aux bornes de la bobine d'induction en fonction du temps. (b) La représentation de Fresnel pour une bobine d'induction.

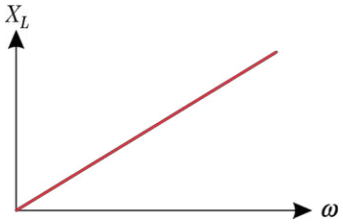


FIGURE 12.13
La réactance inductive en fonction de la fréquence angulaire

Le déphasage du courant dans une bobine est donc

$$\phi_L = \frac{\pi}{2} . \tag{12.17}$$

La figure 12.12b illustre ce résultat dans la représentation de Fresnel.

La réactance inductive

Selon l'équation 12.16, l'amplitude du courant est proportionnelle à l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de la bobine :

$$i_{Lm} = \frac{\Delta V_{Lm}}{\omega L} = \frac{\Delta V_{Lm}}{X_L} , \tag{12.18}$$

où la constante X_L est la *réactance inductive* de la bobine :

Réactance inductive

$$X_L \equiv \omega L . \tag{12.19}$$

Comme le montre le graphique de la figure 12.13, la réactance inductive est proportionnelle à la fréquence angulaire. Lorsque ω est faible, le courant ne change pas rapidement, et la f.é.m. d'auto-induction de la bobine est faible. Le courant peut être assez intense. Par contre, lorsque ω est élevée, la bobine génère une f.é.m. d'auto-induction intense, qui s'oppose à la f.é.m. du générateur. Le courant dans la bobine doit alors être faible.

EXEMPLE 12.3 L'effet de la fréquence

Une bobine d'induction est branchée à un générateur ($\mathcal{E}_m = 3{,}50$ V). Lorsque la fréquence est de 200 Hz, l'amplitude du courant dans la bobine est de 0,400 A.

a. Quelle est l'inductance de la bobine ?

b. Quelle est l'amplitude du courant dans la bobine si la fréquence est de 1 200 Hz ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La bobine est branchée directement au générateur, donc $\Delta V_{Lm} = \mathcal{E}_m$.

Connues	
$\omega_1 = 2\pi f_1 = 400\pi$ rad/s	$i_{m1} = 0{,}400$ A
$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\,400\pi$ rad/s	$\Delta V_{Lm} = 3{,}50$ V

Inconnues
L
i_{m2}

SOLUTION a.

Identifier la clé

La clé est l'équation 12.18 :

$$i_{Lm} = \frac{\Delta V_{Lm}}{\omega L} \Rightarrow L = \frac{\Delta V_{Lm}}{\omega i_{Lm}} . \tag{i}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs initiales :

$$L = \frac{3{,}50 \text{ V}}{400\pi \text{ rad/s} \times 0{,}400 \text{ A}} = 6{,}963 \times 10^{-3} \text{ H}$$
$$= 6{,}96 \text{ mH} . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La fréquence a changé, mais la différence de potentiel et l'inductance de la bobine n'ont pas changé. Nous isolons i_{Lm} dans l'équation (i), puis nous remplaçons les valeurs relatives à la deuxième situation :

$$i_{Lm} = \frac{3{,}50 \text{ V}}{2\,400\pi \text{ rad/s} \times 6{,}963 \times 10^{-3} \text{ H}}$$
$$= 0{,}0667 \text{ A} . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

En multipliant la fréquence par un facteur 6, cela fait augmenter la réactance inductive d'un facteur 6. L'amplitude du courant doit donc être 6 fois plus petite dans la deuxième situation, ce qui est bien le cas.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.4

Une bobine d'induction est soumise à une différence de potentiel sinusoïdale, dont la fréquence est f. Comment varie l'amplitude du courant dans la bobine d'induction si on diminue la fréquence ?

12.5 Le circuit RLC en série

Après avoir étudié de façon séparée le comportement des résistances, des condensateurs et des bobines d'induction soumis à des différences de potentiel sinusoïdales, on analyse maintenant un circuit composé de ces trois dispositifs, branchés en série avec un générateur, comme à la figure 12.14. Le générateur a une f.é.m. qui varie de façon sinusoïdale :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t) .$$

Comme les éléments sont branchés en série, le courant i est le même dans tout le circuit :

$$i = i_m \sin(\omega t - \phi) = i_R = i_C = i_L .$$

On veut trouver l'amplitude du courant i_m et la constante de phase ϕ, qui représente le déphasage du courant par rapport à la f.é.m., en fonction des caractéristiques du circuit.

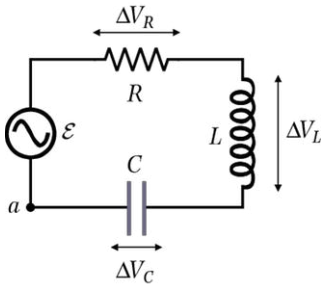


FIGURE 12.14
Le circuit RLC en série

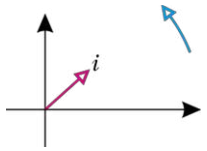
La représentation de Fresnel

Pour analyser le circuit RLC, on applique la loi des mailles. En commençant au point a du circuit de la figure 12.14, en sens horaire, on obtient

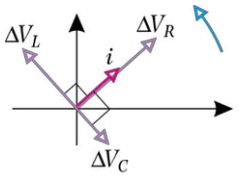
$$\mathcal{E} - \Delta V_R - \Delta V_L - \Delta V_C = 0 \Rightarrow \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = \mathcal{E} . \qquad (12.20)$$

Dans cette équation, on doit additionner les valeurs instantanées, données par des fonctions trigonométriques. Plutôt que d'utiliser la méthode algébrique, on va plutôt recourir à la représentation de Fresnel. L'équation 12.20 est alors une somme vectorielle.

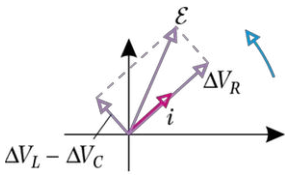
- **On trace le vecteur du courant,** car c'est le même courant dans chaque élément. La longueur et l'orientation du vecteur sont choisies de façon arbitraire.



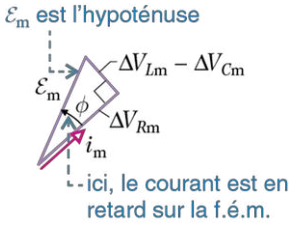
- **La différence de potentiel de chaque dispositif :** pour la résistance, ΔV_R est en phase avec le courant ; le vecteur ΔV_R a la même orientation que le vecteur i. On trace ensuite ΔV_L à $\pi/2$ rad en avance de i (car i est en retard dans le cas d'une bobine), et le vecteur ΔV_C à $\pi/2$ rad est en retard sur i (car i est en avance pour un condensateur).



- **On calcule la somme vectorielle** pour trouver le vecteur $\mathcal{E}$, selon l'équation 12.20.



- **On obtient un triangle rectangle,** dont l'hypoténuse est $\mathcal{E}_m$, l'amplitude de la f.é.m., et l'angle entre $\mathcal{E}$ et i représente la constante de phase ϕ.



Ici, on a supposé que $\Delta V_L > \Delta V_C$, ce qui produit un déphasage $\phi > 0$, et le courant est en retard sur la f.é.m. Dans le cas où $\Delta V_L < \Delta V_C$, la représentation de Fresnel montre que le déphasage est négatif ($\phi < 0$), car le courant est en avance sur la f.é.m.

L'impédance du circuit

L'amplitude de la f.é.m. correspond à la longueur de l'hypoténuse, dans la représentation de Fresnel :

$$\mathcal{E}_m^2 = \Delta V_{Rm}^2 + (\Delta V_{Lm} - \Delta V_{Cm})^2 = \left[R^2 + (X_L - X_C)^2\right] i_m^2 ,$$

où chaque différence de potentiel peut être écrite en fonction de l'amplitude du courant et de la résistance ou de la réactance du dispositif. On peut isoler l'amplitude du courant :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} . \qquad (12.21)$$

Le dénominateur est appelé l'*impédance* du circuit :

Impédance

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} . \qquad (12.22)$$

L'impédance est mesurée en ohms (Ω). Comme la réactance, l'impédance permet de mettre en relation l'amplitude du courant et l'amplitude de la f.é.m., et ce, pour le circuit complet :

Amplitude du courant

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} . \qquad (12.23)$$

L'équation 12.23 permet d'écrire une équation qui a la même forme que la loi d'Ohm.

EXEMPLE 12.4 Un circuit *RLC* en série

On branche un générateur à courant alternatif ($\mathcal{E}_m = 170$ V, $f = 60{,}0$ Hz) à un circuit *RLC* en série. La résistance est de 150 Ω, la bobine a une inductance de 0,240 H et le condensateur a une capacité de 10,0 µF.

a. Quelle est l'impédance du circuit ?
b. Quelle est l'amplitude du courant ?
c. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de chaque dispositif ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	
$\mathcal{E}_m = 170\ \text{V}$	$\omega = 2\pi f = 120\pi\ \text{rad/s}$
$R = 150\ \Omega$	$C = 10{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F}$
$L = 0{,}240\ \text{H}$	

Inconnues		
	Z	
	i_m	
ΔV_{Rm}	ΔV_{Lm}	ΔV_{Cm}

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.22 pour calculer l'impédance du circuit :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ , \qquad \text{(i)}$$

avec les réactances données respectivement par les équations 12.19 et 12.13 :

$$X_L = \omega L \quad \text{et} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la réactance inductive et la réactance capacitive :

$$X_L = 120\pi\ \text{rad/s} \times 0{,}240\ \text{H} = 90{,}48\ \Omega \qquad \text{(iii)}$$

$$X_C = \frac{1}{120\pi\ \text{rad/s} \times 10{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F}} = 265{,}3\ \Omega\ . \qquad \text{(iv)}$$

L'impédance du circuit est donc

$$Z = \sqrt{(150\ \Omega)^2 + (90{,}5\ \Omega - 265{,}3\ \Omega)^2} = 230{,}3\ \Omega$$
$$= 230\ \Omega\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous trouvons l'amplitude du courant dans le circuit à l'aide de l'équation 12.23 :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}\ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$i_m = \frac{170\ \text{V}}{230{,}3\ \Omega} = 0{,}738\,1\ \text{A} = 0{,}738\ \text{A}\ .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

L'amplitude de la différence de potentiel aux bornes d'un dispositif est obtenue à partir de l'amplitude du courant et de la résistance, ou de la réactance :

$$\Delta V_{Rm} = R i_m \qquad \text{(vi)}$$

$$\Delta V_{Lm} = X_L i_m \qquad \text{(vii)}$$

$$\Delta V_{Cm} = X_C i_m\ . \qquad \text{(viii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons, à partir des résultats précédents :

$$\Delta V_{Rm} = 150\ \Omega \times 0{,}738\,1\ \text{A} = 111\ \text{V} \quad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_{Lm} = 90{,}48\ \Omega \times 0{,}738\,1\ \text{A} = 66{,}8\ \text{V} \quad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_{Cm} = 265{,}3\ \Omega \times 0{,}738\,1\ \text{A} = 196\ \Omega\ . \quad \text{(réponse)}$$

REMARQUE

Nous obtenons $\Delta V_{Rm} + \Delta V_{Lm} + \Delta V_{Cm} \neq \mathcal{E}_m$. La loi des mailles (*voir l'équation 12.20*) ne s'applique pas aux amplitudes, mais seulement aux valeurs instantanées, car les valeurs instantanées ne sont pas maximales en même temps.

Valider la réponse

L'ordre de grandeur des valeurs obtenues semble correct. L'impédance du circuit est plus élevée que la résistance, car la bobine et le condensateur influencent la valeur de l'amplitude du courant.

La constante de phase

La représentation de Fresnel permet aussi de calculer la constante de phase. Selon le triangle rectangle, présenté de nouveau à la figure 12.15 :

$$\tan\phi = \frac{\Delta V_{Lm} - \Delta V_{Cm}}{\Delta V_{Rm}} = \frac{X_L i_m - X_C i_m}{R i_m} .$$

L'amplitude du courant se simplifie :

Constante de phase

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} . \qquad (12.24)$$

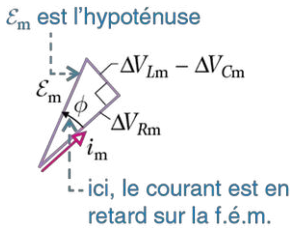


FIGURE 12.15
Le triangle issu de la représentation de Fresnel

Il y a trois possibilités :

- Lorsque $X_L > X_C$, la constante de phase est positive, et le courant est en retard sur la f.é.m. (*voir la figure 12.16a*). On dit alors que le circuit est plutôt inductif.
- Lorsque $X_L < X_C$, la constante de phase est négative, et le courant est en avance sur la f.é.m. (*voir la figure 12.16b*). On dit alors que le circuit est plutôt capacitif.
- Lorsque $X_L = X_C$, la constante de phase est nulle, ce qui implique que le courant et la f.é.m. sont en phase (*voir la figure 12.16c*). On dit alors que le circuit est résonant.

Il est possible de comparer l'équation 12.24 aux résultats des sections précédentes. Si le circuit ne possède qu'une bobine d'induction, $X_C = R = 0$ et $\phi = \pi/2$, ce qui correspond à la plus grande valeur possible de la constante de phase. Si le circuit possède uniquement un condensateur, $X_L = R = 0$ et $\phi = -\pi/2$. Ceci est la plus petite valeur possible de la constante de phase.

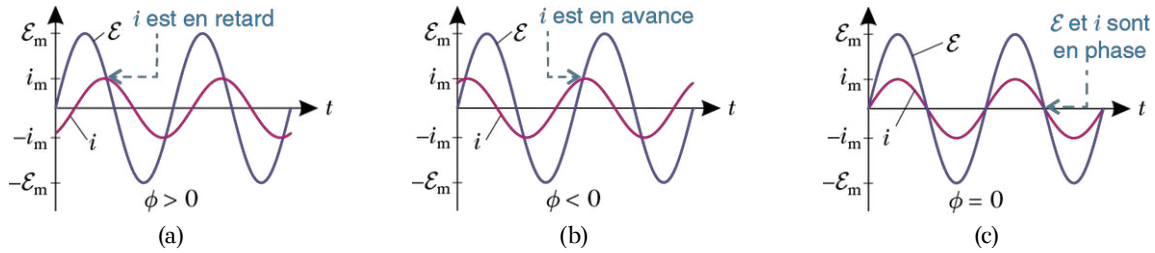


FIGURE 12.16
La f.é.m. et le courant en fonction du temps : (a) $X_L > X_C$; (b) $X_L < X_C$; (c) $X_L = X_C$.

EXEMPLE 12.5 Les valeurs instantanées

Un circuit *RLC* est constitué d'une résistance de 78,0 Ω, d'une bobine ayant une inductance de 0,0800 H et d'un condensateur ayant une capacité de 4,70 µF. On branche le circuit à un générateur dont l'amplitude est de 8,00 V et la fréquence, de 400 Hz.

a. Quelle est l'amplitude du courant ?
b. Quelle est la constante de phase ?
c. Calculez la différence de potentiel aux bornes de chaque élément à $t = 1{,}00$ ms.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues	
$R = 78{,}0\ \Omega$	i_m	ϕ
$L = 0{,}080\,0$ H	$\mathcal{E}$	ΔV_R
$C = 4{,}70 \times 10^{-6}$ F	ΔV_L	ΔV_C
$\mathcal{E}_m = 8{,}00$ V		
$f = 400$ Hz		
$t = 1{,}00 \times 10^{-3}$ s		

Nous calculons la fréquence angulaire, la réactance de la bobine et la réactance du condensateur :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 400\ \text{Hz} = 800\pi\ \text{rad/s} \qquad \text{(i)}$$

$$X_L = \omega L = 800\pi\ \text{rad/s} \times 0{,}080\,0\ \text{H} = 201{,}1\ \Omega \qquad \text{(ii)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{800\pi \times 4{,}70 \times 10^{-6}} = 84{,}66\ \Omega\ . \qquad \text{(iii)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous calculons l'amplitude du courant à l'aide de l'équation 12.23 :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}\ , \qquad \text{(iv)}$$

où l'impédance du circuit est donnée par l'équation 12.22 :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons l'impédance du circuit :

$$Z = \sqrt{(78{,}0\ \Omega)^2 + (201{,}1\ \Omega - 84{,}66\ \Omega)^2} = 140{,}1\ \Omega\ .$$

À l'aide de l'équation (iv), nous obtenons l'amplitude du courant :

$$i_m = \frac{8{,}00\ \text{V}}{140{,}1\ \Omega} = 57{,}09\ \text{mA} = 57{,}1\ \text{mA}\ .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.24, permettant d'obtenir la constante de phase :

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}\ . \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\phi = \arctan\left(\frac{201{,}1\ \Omega - 84{,}66\ \Omega}{78{,}0\ \Omega}\right)$$

$$\phi = 0{,}980\ \text{rad}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La constante de phase doit être positive, car $X_L > X_C$. Le courant est donc en retard par rapport à la f.é.m.

SOLUTION c.

Illustrer la situation

La figure 12.17 montre la représentation de Fresnel à un temps $t = 1{,}00$ ms, de telle sorte que $\omega t = 800\pi$ rad/s $\times$ 0,001 0 s $= 0{,}800\pi$ rad. Nous traçons le courant en retard d'un angle ϕ sur la f.é.m. et ΔV_R en phase avec le courant. De plus, ΔV_L est en avance de $\pi/2$ par rapport au courant, alors que ΔV_C est en retard de $\pi/2$ par rapport au courant.

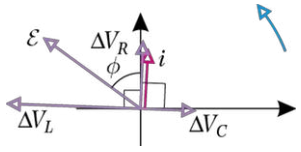


FIGURE 12.17
La représentation de Fresnel

Identifier la clé

La différence de potentiel aux bornes du générateur est

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)\ . \qquad \text{(vii)}$$

Pour la résistance, la différence de potentiel est obtenue par la loi d'Ohm :

$$\Delta V_R = Ri = Ri_m \sin(\omega t - \phi)\ . \qquad \text{(viii)}$$

Dans le cas de la bobine, nous obtenons la différence de potentiel à partir de la réactance. De plus, le courant est en retard de $\pi/2$ sur la différence de potentiel de la bobine, donc la différence de potentiel aux bornes de la bobine est en avance de $\pi/2$ sur le courant, comme le montre la figure 12.17 :

$$\Delta V_L = X_L i_m \sin(\omega t - \phi + \pi/2)\ . \qquad \text{(ix)}$$

Pour le condensateur, la différence de potentiel est en retard de $\pi/2$ sur le courant, comme le montre la figure 12.17 :

$$\Delta V_C = X_C i_m \sin(\omega t - \phi - \pi/2)\,. \qquad \text{(x)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons toutes les valeurs dans les équations (vii) à (x), où $\omega t = 0{,}800\pi$:

$$\mathcal{E} = 8{,}00\ \text{V}\ \sin(0{,}800\pi) = 4{,}70\ \text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_R = 78{,}0 \times 0{,}057\,09\ \sin\,(0{,}800\pi - 0{,}980)$$
$$= 4{,}45\ \text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_L = (201{,}1)(0{,}057\,09)\ \sin\left(0{,}8\pi - 0{,}98 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0{,}436\ \text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

$$\Delta V_C = (84{,}86)(0{,}057\,09)\ \sin\left(0{,}8\pi - 0{,}98 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -0{,}183\ \text{V}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La loi des mailles s'applique pour les valeurs instantanées : $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = 4{,}70$ V, ce qui correspond bien à $\mathcal{E}$ à cet instant.

La résonance

Le courant dans le circuit RLC dépend des caractéristiques de la résistance, de la bobine d'induction et du condensateur, mais aussi de la fréquence du générateur. Lorsque la fréquence est faible, l'amplitude du courant l'est aussi, car la réactance du condensateur ($X_C = 1/[\omega C]$) est élevée. Lorsque la fréquence est élevée, l'amplitude du courant est de nouveau faible, car la réactance de la bobine d'induction ($X_L = \omega L$) devient importante. Il y a une fréquence intermédiaire où l'amplitude du courant est maximale. Ceci se produit à une fréquence angulaire ω_0, lorsque la réactance inductive est égale à la réactance capacitive :

$$X_L = X_C$$
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Fréquence angulaire de résonance

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \qquad (12.25)$$

Lorsque $\omega = \omega_0$, on dit que le circuit est résonant ou en résonance. L'amplitude du courant est maximale, car l'impédance du circuit est simplement égale à la résistance du circuit :

$$i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,. \qquad (12.26)$$

De plus, le courant est en phase avec la f.é.m. ($\phi = 0$).

La figure 12.18 montre le graphique de l'amplitude du courant en fonction de la fréquence angulaire, pour quelques valeurs de résistance. On remarque que plus la résistance est faible, plus le maximum de la courbe est grand et plus la courbe est étroite. Lorsque la fréquence angulaire est plus faible que la fréquence angulaire de résonance, la réactance capacitive est importance et le circuit est plutôt capacitif. Lorsque la fréquence angulaire est plus élevée que la fréquence angulaire de résonance, le circuit est plutôt inductif, car c'est la réactance inductive qui est plus importante.

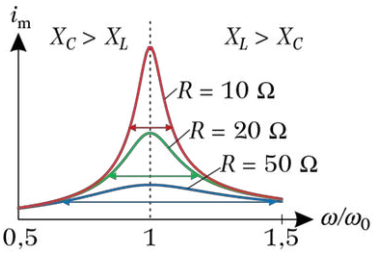


FIGURE 12.18
La courbe de résonance pour trois valeurs de résistance, lorsque $L = 0{,}100$ H et $C = 10\ \mu$C. Les flèches représentent les largeurs à mi-hauteur.

Les circuits résonants sont utilisés dans les systèmes de communications, car ces circuits peuvent être sensibles à un intervalle étroit de fréquences, alors qu'ils sont insensibles aux autres fréquences. La résonance se produit aussi dans les circuits mécaniques, comme nous le verrons dans le tome 3.

EXEMPLE 12.6 La radio AM

Vous voulez fabriquer un récepteur de radio AM à l'aide d'un circuit dont l'inductance est de 55 µH et la résistance, de 0,30 Ω. Le syntoniseur est un condensateur variable. Le signal radio a une fréquence de 730 kHz, et il produit une f.é.m. de 5,0 mV d'amplitude.

a. Quelle est la valeur de la capacité du condensateur variable pour que le circuit soit en résonance à 730 kHz ?

b. Quelle est alors l'amplitude du courant dans le circuit ?

c. Une autre onde radio, ayant une fréquence de 690 kHz, produit une f.é.m. dont l'amplitude est de 9,0 mV. Quelle est l'amplitude du courant causée par la deuxième onde radio ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues

$L = 55{,}0 \times 10^{-6}\ \text{H}$ $\quad R = 0{,}30\ \Omega$

$\omega_1 = 2\pi f_1 = 1{,}46 \times 10^6 \pi\ \text{rad/s}$ $\quad \mathcal{E}_{m1} = 0{,}0050\ \text{V}$

$\omega_2 = 2\pi f_2 = 1{,}38 \times 10^6 \pi\ \text{rad/s}$ $\quad \mathcal{E}_{m2} = 0{,}0090\ \text{V}$

Inconnues

C

i_{m1}

i_{m2}

SOLUTION a.

Identifier la clé

Pour être à la résonance, la fréquence angulaire de la f.é.m. doit être égale à la fréquence angulaire de résonance, donnée par l'équation 12.25 :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_1^2}\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$C = \frac{1}{55 \times 10^{-6}\ \text{H}\,(1{,}46 \times 10^6 \pi\ \text{rad/s})^2}$$

$$= 8{,}64 \times 10^{-10}\ \text{F} = 0{,}86\ \text{nF}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

À la résonance, l'impédance du circuit est simplement égale à la résistance. L'amplitude du courant se calcule alors à l'aide de la loi d'Ohm (*voir l'équation 12.26*) :

$$i_{m1} = \frac{\mathcal{E}_{m1}}{R}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons alors

$$i_{m1} = \frac{0{,}0050\ \text{V}}{0{,}30\ \Omega} = 1{,}67 \times 10^{-2}\ \text{A} = 17\ \text{mA}\,.$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

Pour la deuxième onde radio, le circuit n'est pas en résonance. L'amplitude du courant se calcule à l'aide de l'équation 12.23 :

$$i_{m2} = \frac{\mathcal{E}_{m2}}{Z}\,, \qquad \text{(iii)}$$

où Z est l'impédance du circuit pour la deuxième fréquence angulaire :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'impédance du circuit, en remplaçant les valeurs dans l'équation (iv) :

$$Z = 28{,}5\ \Omega\,. \qquad \text{(v)}$$

L'amplitude du courant est donc

$$i_{m2} = \frac{0{,}0090\ \text{V}}{28{,}5\ \Omega} = 3{,}16 \times 10^{-4}\ \text{A} = 0{,}32\ \text{mA}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Selon les résultats, la deuxième onde radio produit un courant 50 fois plus petit, même si l'amplitude de la f.é.m. est 2 fois plus élevée.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.5

Dans un circuit *RLC* en série, $\Delta V_{Rm} = 8$ V, $\Delta V_{Cm} = 6$ V et $\Delta V_{Lm} = 4$ V.

a. Le courant est-il en avance, en retard ou en phase avec la f.é.m. ?

b. La fréquence angulaire est-elle plus petite, égale ou plus grande que la fréquence angulaire de résonance ?

12.6 La puissance dans les circuits à courant alternatif

Le générateur d'un circuit à courant alternatif est normalement utilisé pour fournir de l'énergie électrique à un appareil, comme un moteur ou un grille-pain. Dans cette section, on cherche à trouver la puissance moyenne fournie en fonction de l'amplitude du courant et du déphasage.

Dans le cas des circuits à courant continu, nous avons vu que les résistances dissipent l'énergie électrique en énergie thermique, alors que les condensateurs et les bobines d'induction emmagasinent l'énergie. On obtient les mêmes résultats dans le cas de circuits à courant alternatif.

Soit un circuit à courant alternatif quelconque, dans lequel il y a un générateur. La f.é.m. et le courant dans le générateur sont respectivement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$$
$$i = i_m \sin(\omega t - \phi) .$$

La puissance instantanée fournie par le générateur est

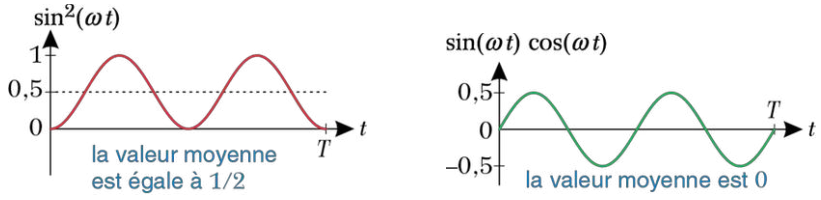
$$P = \mathcal{E}i = \left[\mathcal{E}_m \sin(\omega t)\right]\left[i_m \sin(\omega t - \phi)\right] . \qquad (12.27)$$

Pour mieux comprendre cette relation, on utilise l'identité trigonométrique $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ pour le deuxième terme entre crochets :

$$P = \mathcal{E}_m i_m \left[\sin^2(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\phi\right] .$$

La figure 12.19 montre chacun des termes de cette équation en fonction du temps. Le premier terme, proportionnel à un carré, est toujours positif et il varie entre 0 et 1. Le deuxième terme est une fonction qui varie entre –0,5 et 0,5.

Étant donné que la puissance instantanée varie rapidement, on calcule la puissance moyenne, évaluée sur une période. Comme le montre la figure 12.19, la



(a) (b)

FIGURE 12.19

(a) La fonction $\sin^2(\omega t)$ pour une période. (b) La fonction $\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ pour une période.

valeur moyenne* de $\sin^2(\omega t)$ est égale à 1/2, alors que la valeur moyenne de $\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ donne zéro. On obtient alors la puissance moyenne fournie par le générateur à courant alternatif :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{m}} i_{\text{m}} \cos(\phi) = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{m}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i_{\text{m}}}{\sqrt{2}}\right)\cos\phi \ . \tag{12.28}$$

De façon usuelle, on définit les valeurs efficaces de la f.é.m. et du courant en absorbant le facteur $1/\sqrt{2}$:

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{m}}}{\sqrt{2}} \tag{12.29}$$

$$i_{\text{eff}} = \frac{i_{\text{m}}}{\sqrt{2}} \ . \tag{12.30}$$

Avec ces définitions, la puissance moyenne fournie par le générateur est

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{m}} i_{\text{m}} \cos\phi = \mathcal{E}_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos\phi \ . \tag{12.31}$$

Puissance moyenne

Remarquez que lorsqu'on utilise les valeurs efficaces, l'équation 12.31 a la même forme que l'équation 6.28 de la page 211 ($P = \mathcal{E}i$), qui donne la puissance dans les circuits à courant continu. Ceci justifie la définition des valeurs efficaces.

La valeur efficace d'une quantité est proportionnelle à l'amplitude de cette quantité. Pour cette raison, on a les mêmes équations reliant le courant efficace et la différence de potentiel efficace que dans le cas des amplitudes. Par exemple, dans un circuit *RLC*, on obtient

$$i_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}}{Z} \tag{12.32}$$

$$\Delta V_{R\text{eff}} = R i_{R\text{eff}} \tag{12.33}$$

$$\Delta V_{C\text{eff}} = X_C i_{C\text{eff}} \tag{12.34}$$

$$\Delta V_{L\text{eff}} = X_L i_{L\text{eff}} \ , \tag{12.35}$$

où la différence de potentiel efficace est reliée à l'amplitude d'une différence de potentiel :

$$\Delta V_{\text{eff}} = \frac{\Delta V_{\text{m}}}{\sqrt{2}} \ . \tag{12.36}$$

La grande majorité des voltmètres et des ampèremètres sont calibrés pour afficher les valeurs efficaces lorsqu'on les utilise en mode « courant alternatif ». Par exemple, si vous mesurez la différence de potentiel d'une prise de courant en Amérique du Nord, le voltmètre indique environ 120 V, ce qui représente la valeur efficace de la différence de potentiel. L'amplitude de la différence de

* Pour une fonction périodique ayant une période T, la valeur moyenne se calcule à l'aide d'une intégrale :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

potentiel est plus grande d'un facteur $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que l'amplitude est égale à environ 170 V. Pour mesurer directement l'amplitude d'une différence de potentiel, on utilise un oscilloscope.

REMARQUE

Les définitions des valeurs efficaces, données par les équations 12.29, 12.30 et 12.36, sont valides uniquement pour des fonctions sinusoïdales. Dans les autres cas, on doit calculer la puissance moyenne à l'aide d'une intégrale pour obtenir la relation entre la valeur efficace et l'amplitude.

L'équation 12.31 montre que la puissance fournie par le générateur dépend du déphasage entre le courant et la f.é.m. Le facteur $\cos(\phi)$ est appelé le *facteur de puissance*. On remarque que le facteur de puissance ne dépend pas du signe de ϕ, donc la puissance fournie est la même, que le courant soit en retard ou en avance.

Pour maximiser la puissance, il faut que le facteur de puissance soit égal à 1, c'est-à-dire que le circuit soit complètement résistif ou en résonance. Dans le cas de moteurs, qui contiennent des enroulements de fil, l'inductance est assez importante. On ajoute alors des condensateurs pour annuler la réactance inductive et maximiser la puissance utilisée par les moteurs.

Dans un circuit *RLC*, l'énergie fournie par le générateur est dissipée en énergie thermique dans la résistance. La puissance moyenne absorbée par un condensateur et par une bobine est nulle. Ces dispositifs emmagasinent de l'énergie durant une partie du cycle, et ils redonnent l'énergie au circuit dans l'autre partie du cycle.

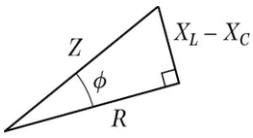


FIGURE 12.20
Le calcul du facteur de puissance

Il est possible d'écrire le facteur de puissance en fonction de l'impédance d'un circuit *RLC* en série. La figure 12.20 montre un triangle rectangle illustrant la relation $\tan\phi = (X_L - X_C)/R$. L'hypoténuse de ce triangle est l'impédance, car $R^2 + (X_L - X_C)^2 = Z^2$. En recourant à la trigonométrie, on obtient

$$\cos\phi = \frac{R}{Z}\,. \tag{12.37}$$

Comme $\mathcal{E}_{\text{eff}} = Zi_{\text{eff}}$, la puissance moyenne fournie par le générateur (qui est égale à la puissance moyenne dissipée par la résistance) peut s'écrire

$$P_{\text{moy}} = \frac{R}{Z}\,\mathcal{E}_{\text{eff}}\,i_{\text{eff}} = Ri_{\text{eff}}^2 = \frac{R}{Z^2}\,\mathcal{E}_{\text{eff}}^2\,. \tag{12.38}$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.6

Dans un circuit *RLC* en série, le courant est en retard sur la f.é.m. On veut modifier le circuit pour que la puissance fournie au circuit soit maximale.

a. Doit-on augmenter ou diminuer la fréquence angulaire de la f.é.m. ?

b. En gardant la fréquence angulaire constante, doit-on augmenter ou diminuer la capacité du condensateur ?

EXEMPLE 12.7 Un moteur électrique

Un moteur, branché à une prise de courant ($\mathcal{E}_{\text{eff}} = 120$ V et $f = 60{,}0$ Hz), a une puissance moyenne de 950 W. Le courant qui circule dans le moteur a une valeur efficace de 10,0 A.

a. Quel est le facteur de puissance ?

b. Quelle est la résistance du moteur ?

c. Quelle est l'inductance du moteur, si aucun condensateur n'est branché dans le circuit ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$\mathcal{E}_{\text{eff}} = 120$ V	$\omega = 2\pi f = 120\pi$ rad/s	$\cos\phi$
$i_{\text{eff}} = 10{,}0$ A	$P_{\text{moy}} = 950$ W	R
$C = 0$ F		L

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** pour trouver le facteur de puissance est l'équation 12.31 :

$$P_{\text{moy}} = \mathcal{E}_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{P_{\text{moy}}}{\mathcal{E}_{\text{eff}} i_{\text{eff}}} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\cos\phi = \frac{950 \text{ W}}{120 \text{ V} \times 10{,}0 \text{ A}} = 0{,}7917 = 0{,}792 . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous pouvons calculer la résistance du moteur à partir de l'équation 12.38, en utilisant la version qui inclut uniquement la résistance, le courant efficace et la puissance moyenne :

$$P_{\text{moy}} = R i_{\text{eff}}^2 \Rightarrow R = \frac{P_{\text{moy}}}{i_{\text{eff}}^2} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$R = \frac{950 \text{ W}}{(10{,}0 \text{ A})^2} = 9{,}50 \ \Omega . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Le moteur est un circuit inductif, car il comporte des bobines servant à produire un champ magnétique. La constante de phase est donc positive. On peut la calculer à partir du facteur de puissance :

$$\phi = +\arccos(0{,}7917) = 0{,}6573 \text{ rad} .$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.24, où $X_C = 0\ \Omega$, car il n'y a pas de condensateur dans le circuit :

$$\tan\phi = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow L = \frac{R \tan\phi}{\omega} . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

L'inductance est

$$L = \frac{9{,}50\ \Omega \tan(0{,}6573)}{120\pi \text{ rad/s}} = 19{,}4 \times 10^{-3} \text{ H} = 19{,}4 \text{ mH} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct. Nous avons calculé ϕ en radians, mais une valeur en degrés aurait aussi été correcte. Pour augmenter la puissance du moteur, nous pourrions ajouter un condensateur en série, de telle sorte que le facteur de puissance soit égal à 1, donc que le circuit soit à la résonance.

12.7 Les transformateurs

Le transport de l'énergie électrique se fait par la conduction dans des lignes de transport. Étant donné que les lignes de transport ont une certaine résistance, il y a dissipation d'énergie électrique par effet Joule dans ces conducteurs. Cette perte d'énergie électrique est proportionnelle au carré du courant ($P_{\text{moy}} = R i_{\text{eff}}^2$), comme nous l'avons vu à la section 12.6. Il faut donc utiliser un courant faible pour limiter les pertes d'énergie dans le transport. Dans ce cas, on doit augmenter la différence de potentiel pour pouvoir transporter une puissance élevée.

Au Québec, la majeure partie des centrales électriques sont très éloignées des centres urbains. Pour cette raison, Hydro-Québec utilise des lignes à haute tension, jusqu'à 765 kV, afin de réduire le courant et donc les pertes d'énergie électrique dans les lignes de transport.

Il serait très dangereux d'utiliser une si grande différence de potentiel dans les maisons. La différence de potentiel est diminuée à une valeur efficace de 240 V et de 120 V. Les transformateurs sont des appareils qui permettent d'augmenter ou de diminuer la différence de potentiel.

La f.é.m. produite dans une centrale électrique a une valeur efficace d'environ 10 kV. Un transformateur élévateur est utilisé pour augmenter la différence de potentiel à plusieurs centaines de kilovolts (jusqu'à 735 kV ou 765 kV pour les très longues lignes). Au bout de la ligne, un poste de distribution diminue la différence de potentiel à quelques milliers de volts, au moyen de transformateurs abaisseurs. Un dernier transformateur abaisseur, comme celui qui est illustré en début de chapitre, est employé près des résidences, pour réduire la différence de potentiel à 240 V.

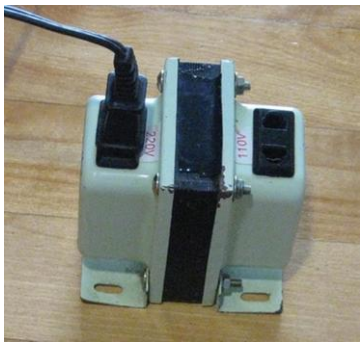


FIGURE 12.21
Un petit transformateur, utilisé pour faire fonctionner les appareils nord-américains en Europe

Les transformateurs sont aussi utilisés dans plusieurs appareils électroniques pour réduire la différence de potentiel à quelques volts. De même, si vous voulez utiliser un appareil conçu pour le marché nord-américain pendant un voyage en Europe, vous aurez besoin d'un transformateur comme celui qui est présenté à la figure 12.21. En effet, les prises de courant en Europe génèrent une différence de potentiel ayant une valeur efficace de 230 V, alors que les appareils nord-américains nécessitent une valeur efficace de 120 V.

Un transformateur simple est constitué de deux bobines enroulées autour d'un noyau de fer, comme le montre la figure 12.22 (la figure 12.23 illustre le symbole utilisé dans les schémas). On branche une source de f.é.m. alternative à la première bobine, qu'on appelle le *primaire* et qui possède N_p spires. La deuxième bobine, qu'on appelle le *secondaire* et qui possède N_s spires, est branchée à un circuit. Pour simplifier l'analyse, on suppose que le circuit du secondaire est simplement une résistance. Le noyau de fer est présent pour maximiser le nombre de lignes de champ magnétique qui circulent dans les spires du secondaire.

La source de f.é.m. du côté primaire produit un courant i_p qui varie de façon sinusoïdale. Ce courant produit un champ magnétique variable $\vec{\mathbf{B}}_p$ dans le noyau de fer. Les lignes de champ magnétique génèrent un flux magnétique dans les spires de la bobine secondaire. La variation du flux magnétique induit une f.é.m. sinusoïdale dans le secondaire.

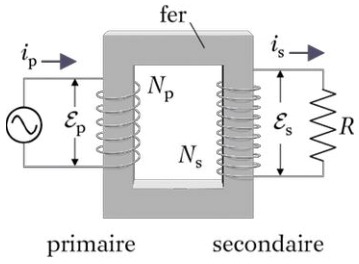


FIGURE 12.22
Le schéma d'un transformateur simple

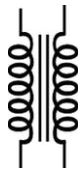


FIGURE 12.23
Le symbole représentant un transformateur

Pour un transformateur idéal, toutes les lignes de champ magnétique créées par la bobine primaire produisent un flux magnétique à travers les spires de la bobine secondaire. Alors, le flux magnétique à travers une spire de la bobine primaire est égal au flux magnétique à travers une spire de la bobine secondaire :

$$\Phi_{B,\mathrm{p}} = \Phi_{B,\mathrm{s}} \ .$$

Selon la loi de Faraday (*voir l'équation 10.5*),

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = -N_{\mathrm{p}} \frac{\mathrm{d}\Phi_{B,\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}} = -N_{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{d}\Phi_{B,\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t} \ .$$

Comme le flux est le même, on obtient

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{p}}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{s}}}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}} = \frac{N_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{p}}} \mathcal{E}_{\mathrm{p}} \ . \tag{12.39}$$

Lorsque $N_{\mathrm{s}} > N_{\mathrm{p}}$, l'amplitude de la f.é.m. du côté secondaire est plus élevée. Le transformateur est un *transformateur élévateur*. Lorsque $N_{\mathrm{s}} < N_{\mathrm{p}}$, l'amplitude de la f.é.m. du côté secondaire est plus faible, et le transformateur est un *transformateur abaisseur*.

La f.é.m. induite du côté secondaire génère un courant i_{s} dans la résistance R. Dans le cas d'un transformateur idéal, toute l'énergie électrique du primaire est fournie au secondaire. On obtient alors

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} i_{\mathrm{p}} = \mathcal{E}_{\mathrm{s}} i_{\mathrm{s}} \ .$$

En insérant l'équation 12.39, on a

$$i_{\mathrm{s}} = \frac{N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{s}}} i_{\mathrm{p}} \ . \tag{12.40}$$

Le fait d'augmenter l'amplitude de la f.é.m. réduit l'amplitude du courant.

Il y a un courant i_{s} qui circule du côté du secondaire, étant donné qu'une résistance est branchée à une f.é.m. ($i_{\mathrm{s}} = \mathcal{E}_{\mathrm{s}}/R$). Par induction mutuelle, ce courant induit un courant i_{p} du côté du primaire. D'après l'équation 12.39 et 12.40,

$$i_{\mathrm{p}} = \frac{N_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{p}}} \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{s}}}{R} = \left(\frac{N_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{p}}} \right)^2 \mathcal{E}_{\mathrm{p}} \ .$$

Le courant dans le circuit primaire est proportionnel à la f.é.m. dans ce circuit primaire. La constante de proportionnalité correspond à l'inverse d'une résistance équivalente :

$$R_{\text{éq}} = \left(\frac{N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{s}}} \right)^2 R \ . \tag{12.41}$$

Cette résistance équivalente correspond à la résistance dans le circuit primaire, causée par la résistance du circuit secondaire.

Ce résultat donne lieu à une nouvelle application pour le transformateur. Afin qu'un générateur transmette un maximum de puissance à un appareil, il faut que l'impédance interne du générateur soit égale à l'impédance de l'appareil. En branchant un transformateur entre le générateur et l'appareil, on peut *adapter l'impédance*, c'est-à-dire que la puissance fournie sera maximale si l'impédance équivalente du circuit primaire est égale à l'impédance interne du générateur. Par exemple, dans un système de son, l'impédance interne d'un amplificateur est de l'ordre du kilohm et celle d'un haut-parleur, de quelques ohms. Un transformateur, avec le bon nombre de spires, est alors branché entre les deux éléments pour qu'un maximum de la puissance audio soit transmise au haut-parleur.

EXEMPLE 12.8 Un transformateur élévateur

Un transformateur possède 80,0 spires du côté primaire et 600 spires du côté secondaire. On applique une différence de potentiel efficace de 20,0 V du côté primaire. Le secondaire est branché à un circuit *RLC* ayant un facteur de puissance égal à 1,00 et dont la résistance est de 2,00 kΩ.

a. Déterminez le courant efficace qui circule dans la résistance du circuit secondaire.

b. Déterminez le courant efficace dans le circuit primaire.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$N_p = 80,0$	$N_s = 600$	$i_{eff,s}$
$\mathcal{E}_{eff,p} = 20,0\ V$	$R = 2,00\ k\Omega$	$i_{eff,p}$
$\cos\phi = 1,00$		

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 12.39 permettant de calculer la f.é.m. du côté secondaire :

$$\mathcal{E}_{eff,s} = \frac{N_s}{N_p}\mathcal{E}_{eff,p} . \qquad \text{(i)}$$

La seconde **clé** est la loi d'Ohm, car le circuit secondaire est résonant, avec $\cos\phi = 1$:

$$i_{eff,s} = \frac{\mathcal{E}_{eff,s}}{R_s} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la f.é.m. du circuit secondaire :

$$\mathcal{E}_{eff,s} = \frac{600}{80,0}20,0\ V = 150\ V . \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons ensuite ce résultat dans l'équation (ii) :

$$i_{eff,s} = \frac{150\ V}{2,00\times10^3\ \Omega} = 0,0750\ A = 75,0\ mA .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.40 :

$$i_{eff,p} = \frac{N_s}{N_p}i_{eff,s} . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons la réponse au problème a. dans l'équation (iii) :

$$i_{eff,p} = \frac{600}{80,0}0,0750\ A = 0,563\ A = 563\ mA .$$

(réponse)

Valider la réponse

Un transformateur élévateur augmente la différence de potentiel en diminuant le courant. C'est bien ce que nous obtenons : le courant du circuit secondaire est plus faible que le courant du circuit primaire.

12.8 Les circuits redresseurs

Plusieurs appareils électroniques, comme les ordinateurs, ont besoin d'une différence de potentiel continue pour fonctionner. Si on veut les brancher à une prise de courant alternatif, on a besoin d'un bloc d'alimentation (*voir la figure 12.24*), qui diminue la différence de potentiel à quelques dizaines de volts et qui la transforme en une différence de potentiel continue. Le bloc d'alimentation comprend un transformateur abaisseur (pour réduire la différence de potentiel) et un *circuit redresseur*, qui produit une différence de potentiel continue.

FIGURE 12.24
Le bloc d'alimentation d'un ordinateur portable comprend un circuit redresseur.

Dans le circuit illustré à la figure 12.25a, une résistance R est branchée à une source de f.é.m. sinusoïdale. Un transformateur abaisseur est utilisé pour diminuer la différence de potentiel. L'élément essentiel d'un circuit redresseur est la diode, dont le symbole est . À la section 6.5 nous avons examiné la diode, un dispositif qui laisse passer le courant dans un sens (le sens indiqué par la flèche du symbole), alors qu'il bloque complètement le courant dans le sens opposé. Les diodes sont habituellement fabriquées à partir d'un semiconducteur, comme le silicium.

La figure 12.25b montre la différence de potentiel aux bornes de la résistance en fonction du temps. La diode ne laissant passer le courant que dans un sens, la différence de potentiel n'est plus négative. Par contre, elle est loin d'être constante.

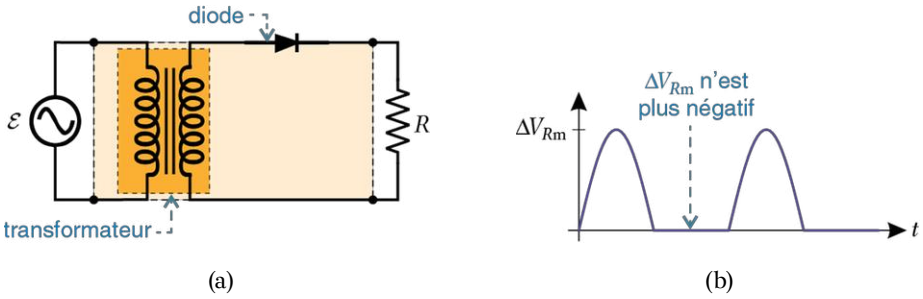


FIGURE 12.25
(a) Un bloc d'alimentation, avec un transformateur et une diode. (b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance en fonction du temps.

Pour réduire la variation de la différence de potentiel, on ajoute un condensateur en parallèle avec la résistance, comme dans le circuit de la figure 12.26a (*voir la page suivante*). Lorsque la résistance est branchée au circuit, le condensateur se charge. Lorsque le courant qui circule dans la diode diminue, le condensateur

se décharge à travers la résistance, avec une constante de temps $\tau = RC$. En choisissant bien la capacité du condensateur, on obtient une constante de temps suffisamment longue pour que la différence de potentiel aux bornes de la résistance varie très peu, comme le montre la figure 12.26b.

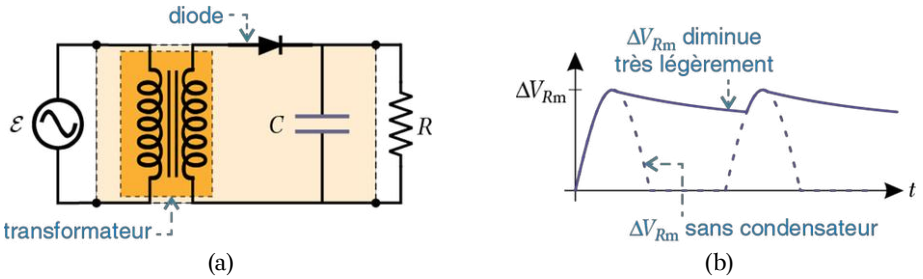


FIGURE 12.26

(a) Un bloc d'alimentation, avec un transformateur, une diode et un condensateur. (b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance en fonction du temps.

Le circuit redresseur illustré demeure très simple. Il est possible d'ajouter d'autres composantes pour que la variation de la différence de potentiel aux bornes de la résistance soit très faible. Il est important de remarquer que le circuit redresseur est conçu pour une résistance particulière.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les circuits alimentés par une f.é.m. sinusoïdale.

LES DÉFINITIONS

- Un **courant alternatif** est produit par une f.é.m. qui varie de façon sinusoïdale en fonction du temps :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)\,,$$

où $\mathcal{E}_m$ est l'amplitude.

- L'oscillation se produit à une **fréquence angulaire** $\omega = 2\pi f$.
- Le **courant** dans le circuit est

$$i = i_m \sin(\omega t - \phi)\,.$$

- La **constante de phase** indique le déphasage du courant par rapport à la f.é.m. :
  - $\phi = 0$: le courant et la f.é.m. sont en phase ;
  - $\phi > 0$: le courant est en retard ;
  - $\phi < 0$: le courant est en avance.

LES RÉSULTATS

- Les **éléments d'un circuit** à courant alternatif

élément	i_m	X	ϕ (rad)
résistance	$\dfrac{\Delta V_{Rm}}{R}$	—	0
bobine	$\dfrac{\Delta V_{Lm}}{X_L}$	ωL	$\dfrac{\pi}{2}$
condensateur	$\dfrac{\Delta V_{Cm}}{X_C}$	$\dfrac{1}{\omega C}$	$-\dfrac{\pi}{2}$

- La **puissance moyenne** dans un circuit à courant alternatif est

$$P_{moy} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_m i_m \cos\phi = \mathcal{E}_{eff} i_{eff} \cos\phi\,.$$

- Les **valeurs efficaces** sont proportionnelles aux amplitudes. Dans le cas d'une f.é.m. sinusoïdale,

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \qquad \Delta V_{eff} = \frac{\Delta V_m}{\sqrt{2}} \qquad i_{eff} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}\,.$$

LES APPLICATIONS

Dans un **circuit *RLC*** en série, l'amplitude du courant est proportionnelle à l'amplitude de la f.é.m. :

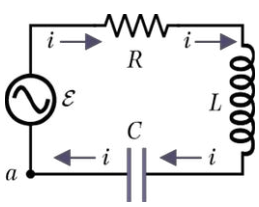
$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}$$
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\,,$$

où Z est l'impédance du circuit. La constante de phase se calcule ainsi :

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$
$$\cos\phi = \frac{R}{Z}\,.$$

À la résonance ($\omega = \omega_0$), le courant est maximal et le déphasage est nul. La fréquence angulaire de résonance est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

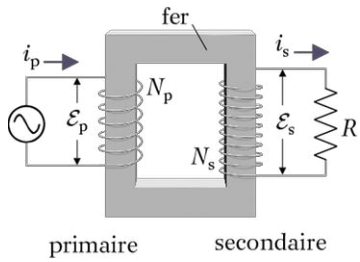


Un **transformateur** permet de changer l'amplitude de la f.é.m. et l'amplitude du courant. Il possède un enroulement de N_p spires du côté primaire et de N_s spires du côté secondaire. Pour un transformateur idéal,

$$\mathcal{E}_s = \frac{N_s}{N_p}\mathcal{E}_p$$
$$i_s = \frac{N_p}{N_s} i_p\,.$$

Lorsque le circuit secondaire est branché à une résistance R, il y a une résistance équivalente du côté primaire :

$$R_{éq} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R\,.$$

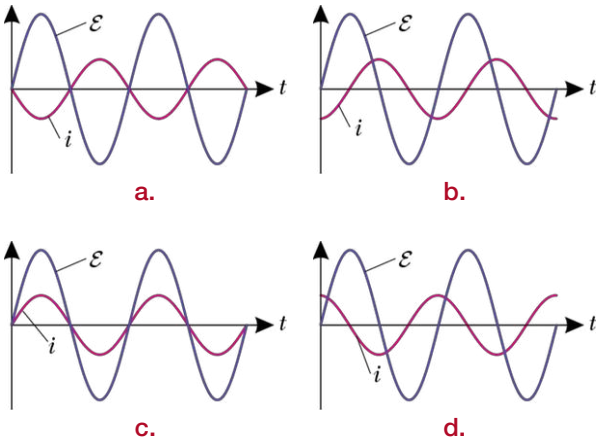


QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • **R** problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 12.1 Les circuits à courant alternatif

Q1 Une source de f.é.m. alternative est branchée à un appareil, ce qui forme un circuit. Déterminez le déphasage entre le courant et la f.é.m. pour les différents graphiques suivants.



Q2 Tracez la représentation de Fresnel pour les situations suivantes.

a. $\mathcal{E} = 12\text{ V}\sin(60t)$ et $i = 0{,}32\text{ A}\sin(60t - \pi/6)$;

b. $\mathcal{E} = 63{,}5\text{ V}\sin(30t)$ et $i = 8{,}40\text{ A}\sin(30t + \pi/3)$.

E3 Un oscilloscope peut afficher le signal d'un générateur sinusoïdal. Le graphique de la figure 12.27 représente la f.é.m. en fonction du temps. L'échelle horizontale est de 5,0 ms/div et l'échelle verticale, de 10 V/div. (Une division correspond à un carré sur l'écran.)

a. Déterminez la fréquence.

b. Quelle est l'amplitude de la f.é.m. ?

c. Écrivez l'équation de la f.é.m. en fonction du temps.

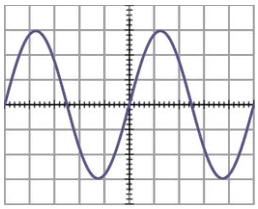


FIGURE 12.27 • Exercice 3

Section 12.2 Les résistances dans les circuits à courant alternatif

Q4 On branche une résistance R à un générateur à courant alternatif dont l'amplitude est $\mathcal{E}_m$ et la fréquence est f. Qu'arrive-t-il à l'amplitude du courant si on double la fréquence du générateur ?

Q5 Les trois circuits illustrés à la figure 12.28 sont branchés à un générateur dont l'amplitude de la f.é.m. est $\mathcal{E}_m$. Les résistances sont identiques. Classez les circuits selon un ordre croissant de l'amplitude du courant qui circule dans le générateur.

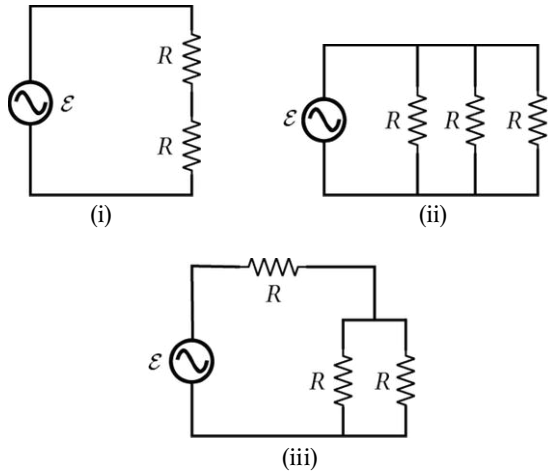


FIGURE 12.28 • Question 5

E6 Une source à courant alternatif possède une f.é.m. donnée par $\mathcal{E} = 12{,}0\text{ V}\sin(350t)$. On branche la source à une résistance de 68,0 Ω.

a. Quelle est l'amplitude du courant ?

b. Quelle est la fréquence du courant ?

c. Quel est le courant à $t = 10{,}0$ ms ?

d. Quelle est la f.é.m. de la source lorsque le courant est maximal ?

R7 Un générateur à courant alternatif possède une f.é.m. donnée par $\mathcal{E} = 15{,}6\text{ V}\sin(378t)$. On branche le générateur au circuit illustré à la figure 12.29, où $R_1 = 133{,}0\ \Omega$, $R_2 = 95{,}7\ \Omega$ et $R_3 = 63{,}4\ \Omega$. Quelle est l'amplitude du courant qui circule dans chacune des résistances ?

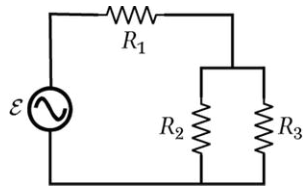


FIGURE 12.29 • Problème récapitulatif 7

Section 12.3 Les condensateurs dans les circuits à courant alternatif

Q8 Les trois circuits illustrés à la figure 12.30 sont branchés à un générateur dont l'amplitude de la f.é.m. est $\mathcal{E}_m$, et la fréquence angulaire est ω. Classez les circuits selon un ordre croissant de l'amplitude du courant qui circule dans le générateur.

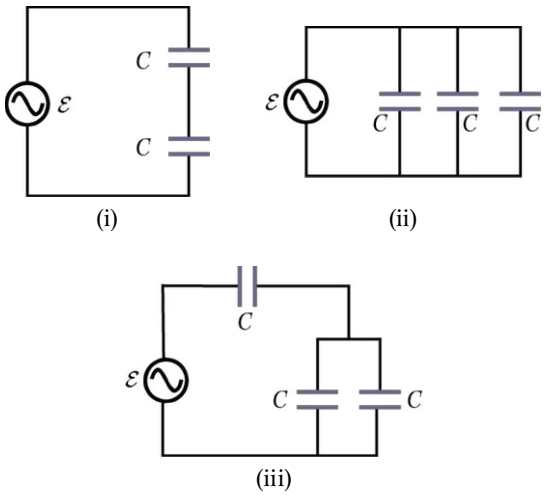


FIGURE 12.30 • Question 8

Q9 Un circuit est composé d'un générateur à courant alternatif, ayant une amplitude $\mathcal{E}_m$ et une fréquence f_0, branché à un condensateur ayant une capacité C. On double l'amplitude de la f.é.m., et on change sa fréquence à la valeur f. Quel est le rapport f/f_0 si l'amplitude du courant n'a pas changé ?

Q10 Un circuit est composé d'un générateur à courant alternatif, ayant une amplitude $\mathcal{E}_m$ et une fréquence f, branché à un condensateur ayant une capacité C. On ajoute un condensateur identique en série avec le premier. Par quel facteur la réactance capacitive change-t-elle ?

E11 Un condensateur de 2,50 µF est branché à un générateur à courant alternatif ayant une amplitude de 7,40 V et une fréquence de 3,00 kHz.

a. Quelle est la réactance capacitive ?

b. Quelle est l'amplitude du courant ?

c. Quel est le déphasage entre le courant et la f.é.m. ?

E12 Une source à courant alternatif possède une f.é.m. donnée par $\mathcal{E} = 37{,}5\ \text{V} \sin(228t)$. On branche la source à un condensateur de 1,80 µF.

a. Quelle est la réactance capacitive ?

b. Quelle est l'amplitude du courant ?

c. Quel est le courant à $t = 72{,}4$ ms ?

d. Quelle est la f.é.m. de la source lorsque le courant est maximal ?

P13 Le circuit de la figure 12.31 est constitué d'une source $\mathcal{E}$ et de trois condensateurs en parallèle dont les capacités sont $C_1 = 236$ nF, $C_3 = 524$ nF, et la capacité C_2 est inconnue. Le générateur a une amplitude de 15,0 V, et sa fréquence est de 120,0 Hz. L'amplitude du courant circulant dans le générateur est de 10,0 mA.

a. Quelle est la capacité du condensateur C_2 ?

b. Quelle est la charge emmagasinée dans le condensateur C_2 à $t = 26{,}7$ ms ?

c. Quel est le courant qui circule dans le condensateur C_2 à $t = 26{,}7$ ms ?

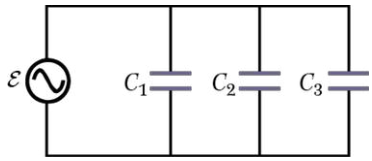


FIGURE 12.31 • Problème 13

R14 Le circuit de la figure 12.32 est composé d'une source à courant alternatif dont l'amplitude est de 12,0 V, et de quatre condensateurs. Les capacités des condensateurs sont $C_1 = 20{,}4$ µF, $C_2 = 3{,}12$ µF, $C_3 = 4{,}50$ µF et $C_4 = 2{,}34$ µF. Le courant circulant dans la source a une amplitude de 20,5 mA.

a. Quelle est la réactance capacitive du circuit ?

b. Quelle est la capacité équivalente du circuit ?

c. Quelle est la fréquence de la f.é.m. ?

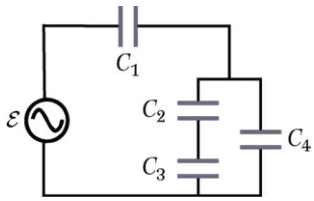


FIGURE 12.32 • Problème récapitulatif 14

Section 12.4 Les bobines d'induction dans les circuits à courant alternatif

Q15 Une bobine d'induction est branchée à un générateur à courant alternatif, ayant une amplitude $\mathcal{E}_{0m}$ et une fréquence f_0. On change l'amplitude et on double la fréquence, sans que l'amplitude du courant change. Quel est le rapport $\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{0m}$?

E16 Une bobine d'induction de 26,0 mH est branchée à un générateur ayant une amplitude de 30,0 V.

a. Quelle est l'amplitude du courant si la fréquence est de 1,80 kHz ?

b. Quelle est la fréquence si l'amplitude du courant est de 50,0 mA ?

E17 Une source à courant alternatif possède une f.é.m. donnée par $\mathcal{E} = 1{,}70\ \text{V}\ \sin(120\pi t)$. On branche la source à une bobine d'induction de 56,3 mH.

a. Quelle est la réactance inductive ?

b. Quelle est l'amplitude du courant ?

c. Quel est le courant à $t = 32{,}0$ ms ?

d. Quelle est la f.é.m. de la source lorsque le courant est maximal ?

E18 Un solénoïde de 2000 spires, dont la section transversale est de 36,00 cm^2 et dont la longueur est de 72,40 cm, est branché à un générateur à courant alternatif. Le générateur a une fréquence de 68,00 Hz, et son amplitude est de 4,500 V.

a. Quelle est l'inductance du solénoïde ?

b. Quelle est la réactance inductive ?

c. Quelle est l'amplitude du courant dans le circuit ?

d. Quel est le courant à $t = 10{,}00$ ms ?

E19 Une bobine d'induction, dont l'inductance est de 58,3 mH, est branchée à un générateur à courant alternatif dont l'amplitude est de 12,0 V et la fréquence angulaire de 650 rad/s.

a. Quel est le courant généré dans le circuit à $t = 60{,}0$ ms ?

b. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la bobine à cet instant ?

Section 12.5 Le circuit *RLC* en série

Q20 Dans un circuit *RLC* en série, on mesure la différence de potentiel aux bornes de chacun des dispositifs en fonction de la fréquence du générateur. On obtient le graphique de la figure 12.33. Identifiez chacun des dispositifs.

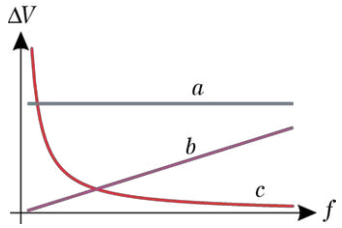


FIGURE 12.33 • Question 20

Q21 La figure 12.34 montre le courant et la f.é.m. d'un générateur dans un circuit *RLC* en série. Parmi les possibilités suivantes, lesquelles permettent d'obtenir un circuit en résonance ?

(i) La capacité du condensateur est augmentée.

(ii) La capacité du condensateur est diminuée.

(iii) L'inductance du circuit est augmentée.

(iv) L'inductance du circuit est diminuée.

(v) La fréquence de la f.é.m. est augmentée.

(vi) La fréquence de la f.é.m. est diminuée.

(vii) La résistance du circuit est diminuée.

(viii) La résistance du circuit est augmentée.

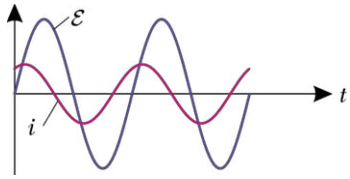


FIGURE 12.34 • Question 21

Q22 La figure 12.35 montre la représentation de Fresnel pour un circuit *RLC* en série alimenté par un générateur à courant alternatif.

a. Le courant est-il en avance ou en retard par rapport à la f.é.m. ?

b. Le circuit est-il plutôt inductif, plutôt capacitif ou résonant ?

c. On mesure l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de la bobine d'induction et du condensateur. Quelle amplitude est la plus importante ?

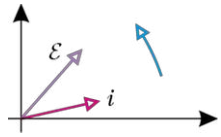


FIGURE 12.35 • Question 22

E23 Un circuit *RLC* en série a une fréquence de résonance de 1,20 kHz. Il est constitué d'un condensateur ayant une capacité C, d'une bobine ayant une inductance de 0,013 H et d'une résistance de 26 Ω. Quelle est la valeur de la capacité du condensateur ?

E24 Un circuit *RLC* en série a une résistance de 45,0 Ω, une bobine d'induction de 0,150 H et un condensateur de 22,0 µF. Le circuit est branché à un générateur ayant une amplitude de 170 V. La fréquence du générateur est telle que le courant est en phase avec la f.é.m.

a. Quelle est la fréquence ?

b. Quelle est l'amplitude du courant ?

c. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de chaque dispositif ?

E25 Dans un circuit *RLC*, une résistance de 328 Ω, une bobine d'induction de 256 mH et un condensateur de 9,47 µF sont branchés à un générateur à courant alternatif dont la fréquence est de 120 Hz. L'amplitude du courant dans le circuit est de 36,2 mA.

a. Quelle est l'impédance du circuit ?

b. Quelle est la constante de phase ?

c. Le circuit est-il inductif, capacitif ou résonant ?

d. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel de chacun des dispositifs ?

P26 Les bobines réelles possèdent une certaine résistance, en plus de leur inductance, car elles sont faites d'un enroulement de fil. Un circuit *RLC* possède une bobine réelle, ayant une résistance de 15,0 Ω et une inductance de 45,0 mH, un condensateur ayant une capacité de 20,0 µF, et une résistance de 40,0 Ω. Le circuit est branché à un générateur, dont l'amplitude est de 5,00 V et la fréquence, de 120 Hz.

a. Quelle est l'amplitude du courant dans le circuit ?

b. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de la bobine réelle ?

P27 Un circuit *RLC* est composé d'une résistance de 25,0 Ω, d'une bobine d'induction de 320 mH et d'un condensateur de 60,0 µF. Pour quelle fréquence, le courant est-il en retard de $\pi/8$ rad par rapport à la f.é.m. ?

P28 Dans un circuit *RLC* en série, le générateur a une amplitude de 170 V et une fréquence de 60,0 Hz. La résistance du circuit est de 120 Ω, la capacité est de 25,0 µF et l'inductance est de 40,0 mH. Lorsque la f.é.m. atteint sa valeur maximale :

a. Quelle est la valeur instantanée du courant dans le circuit ?

b. Calculez la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes de chaque dispositif.

c. Vérifiez que $\mathcal{E} = \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$.

P29 On branche un circuit *RLC* en série à une source ayant une amplitude de 15,0 V et une fréquence de 1,50 kHz. Le courant dans le circuit a une amplitude de 37,5 mA, et il est en retard de 0,250 rad.

a. Quelle est l'impédance du circuit ?

b. Quelle est l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes de la résistance ?

c. Quelle est la résistance du circuit ?

d. Si l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes du condensateur est de 6,00 V, quelle est l'inductance de la bobine d'induction ?

P30 Dans le circuit de la figure 12.36, le générateur a une amplitude de 15,0 V. Déterminez l'amplitude du courant fourni par le générateur :

a. lorsque la fréquence du générateur est très faible ;

b. lorsque la fréquence du générateur est très élevée.

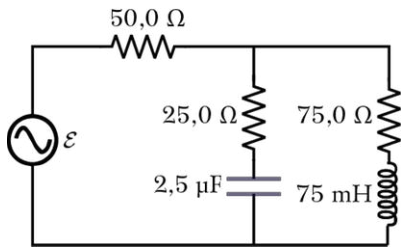


FIGURE 12.36 • Problème 30

P31 Un circuit *RLC* en série a une résistance $R = 50{,}0\ \Omega$, une capacité $C = 15{,}0\ \mu F$ et une inductance $L = 0{,}400$ H. Il est branché à un générateur ayant une fréquence qui peut être modifiée.

a. Quelle est la fréquence angulaire de résonance ?

b. À quelles fréquences angulaires (ω_1 et ω_2), l'amplitude du courant est-elle égale à la moitié de l'amplitude maximale du courant ?

c. Calculez la largeur à mi-hauteur relative $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_0$ de la courbe de résonance du circuit.

Section 12.6 La puissance dans les circuits à courant alternatif

E32 Un oscilloscope mesure un signal sinusoïdal dont la différence de potentiel a une amplitude de 15,15 V et une période de 0,050 s. Le facteur de puissance est de 0,542, et l'amplitude du courant est de 62,8 mA. Quelle est la puissance moyenne fournie au circuit ?

E33 Un circuit *RLC* en série possède une résistance de 70,0 Ω, une inductance $L = 40{,}0$ mH et une capacité C. Il est branché à un générateur ayant une valeur efficace de 40,0 V et une fréquence de 60,0 Hz.

a. Quelle est la valeur de la capacité pour que la puissance moyenne dissipée soit maximale ?

b. Quel est alors le facteur de puissance ?

c. Quelle est alors la puissance dissipée dans le circuit ?

E34 Un appareil est branché à un générateur qui fournit une différence de potentiel efficace de 120 V avec une fréquence de 60,0 Hz. L'appareil a une résistance de 35,0 Ω, une réactance inductive de 25,0 Ω et aucune réactance capacitive.

a. Quelle est l'impédance de l'appareil ?

b. Quelle est la constante de phase ?

c. Quelle est la valeur efficace du courant dans le circuit ?

d. Quelle est la puissance moyenne utilisée par l'appareil ?

E35 Dans un circuit *RLC*, une source alternative fonctionne avec une différence de potentiel efficace de 120 V à une fréquence de 60,0 Hz. La résistance dans le circuit est de 36,4 Ω et la constante de phase, de $\pi/4$ rad.

a. Quelle est l'impédance du circuit ?

b. Quelle est la puissance moyenne fournie par la source ?

E36 Un rhéostat permet de varier la puissance fournie à un appareil. Dans un circuit, un générateur a une f.é.m. efficace de 120 V et une fréquence de 60,0 Hz. Il est branché à une ampoule ayant une résistance R et à une bobine d'induction ayant une inductance L variable, servant de rhéostat (*voir la figure 12.37*). Lorsque l'inductance de la bobine est nulle, l'ampoule dissipe une puissance moyenne de 100 W. On veut diminuer cette puissance moyenne à 10,0 W lorsque l'inductance de la bobine est maximale.

a. Quelle est la résistance de l'ampoule ?

b. Quelle est l'inductance maximale de la bobine ?

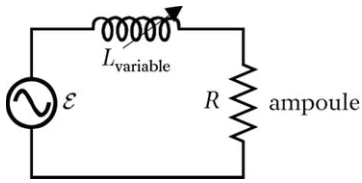


FIGURE 12.37 • Exercice 36

P37 Un moteur électrique est branché à un générateur ayant une valeur efficace de 120 V et une fréquence de 60,0 Hz. Le courant qui circule dans le circuit a une valeur efficace de 11,0 A, et le facteur de puissance est de 0,815. La réactance capacitive du moteur est nulle.

a. Quelle est la puissance moyenne du moteur ?

b. Quelle est l'impédance du moteur ?

c. Quelle est l'inductance du moteur ?

d. On ajoute un condensateur en série avec le moteur pour maximiser la puissance. Quelle est la valeur de la capacité nécessaire ?

e. Quelle est alors la puissance moyenne du moteur ?

P38 Dans un circuit *RLC* en série, $R = 180\ \Omega$, $L = 36{,}2$ mH et $C = 22{,}0\ \mu$F. La différence de potentiel aux bornes du circuit est donnée par $\mathcal{E} = 15{,}8\ \text{V} \sin(500t)$, où t est exprimé en secondes.

a. Quelle est l'impédance du circuit ?

b. Quelle est l'équation du courant circulant dans le circuit ?

c. Quelle est la puissance moyenne du circuit ?

P39 Un générateur est branché à un circuit dont les composantes sont inconnues (une «boîte noire»), comme le montre la figure 12.38. La f.é.m. et le courant en fonction du temps sont

$$\mathcal{E} = 40{,}0\ \text{V} \sin(\omega t)$$
$$i = 2{,}75\ \text{A} \sin(\omega t - 0{,}800)\ .$$

a. Quelle est l'impédance du circuit ?

b. Quel est le facteur de puissance ?

c. Quelle est la puissance moyenne du circuit ?

d. Le courant est-il en avance ou en retard sur la f.é.m. ?

e. Le circuit possède-t-il nécessairement un condensateur ?

f. Le circuit possède-t-il nécessairement une bobine d'induction ?

g. Le circuit possède-t-il nécessairement une résistance ?

FIGURE 12.38 • Problème 39

Section 12.7 Les transformateurs

Q40 Une ligne de transmission a une longueur ℓ_1 trois fois plus grande qu'une deuxième ligne de transmission. La première ligne de transmission fonctionne avec une différence de potentiel $\mathcal{E}_{1,\text{eff}}$ deux fois plus grande que la deuxième ligne. Les deux lignes sont faites d'aluminium, et elles ont le même diamètre. Elles sont alimentées à la même puissance.

a. Quel est le rapport R_1/R_2 entre les résistances des deux lignes ?

b. Quel est le rapport $i_{1,\text{eff}}/i_{2,\text{eff}}$ entre les valeurs efficaces du courant dans chacune des lignes ?

c. Quel est le rapport P_{R_1}/P_{R_2} entre les puissances dissipées dans les lignes de transmission ?

E41 Un appareil électronique utilise un transformateur idéal branché à une prise de courant alternatif ayant une f.é.m. efficace de 120 V. L'appareil a besoin d'une f.é.m. efficace de 6,00 V et d'un courant efficace de 300 mA. Le facteur de puissance est égal à 1,00.

a. Quelle est la résistance de l'appareil ?

b. Quel est le rapport N_p/N_s ?

c. Quelle est la valeur efficace du courant qui circule dans le primaire ?

E42 Un amplificateur d'un système de son a une résistance interne de 1,15 kΩ. Il produit une f.é.m. alternative qui alimente un haut-parleur dont la résistance est de 8,0 Ω. Pour que le maximum de puissance soit fourni au haut-parleur,

on doit utiliser un transformateur entre l'amplificateur et le haut-parleur, de telle sorte que la résistance équivalente au haut-parleur pour l'amplificateur soit égale à sa résistance interne. Quel est le rapport du nombre de spires N_p/N_s nécessaire ?

E43 Un générateur ayant une f.é.m. efficace de 120 V est branché à un transformateur idéal. Celui-ci possède 60,0 spires dans le circuit primaire et 2 500 spires dans le circuit secondaire. Le circuit secondaire est branché à une résistance de 27,0 kΩ.

a. Quelle est la f.é.m. efficace dans le circuit secondaire ?

b. Quelle est la valeur efficace du courant dans le circuit secondaire ?

c. Quelle est la résistance équivalente dans le circuit primaire ?

P44 Un transformateur abaisseur idéal est utilisé pour diminuer la différence de potentiel d'une ligne de transmission par un facteur 5,00, dans le but d'alimenter un édifice. La résistance totale de la ligne de transmission est de 1,60 Ω. Le transformateur fournit à l'édifice une puissance moyenne de 73,8 kW, avec une différence de potentiel efficace de 240 V. Quelle est la valeur moyenne du taux de dissipation d'énergie thermique de la ligne de transmission ?

P45 Dans le circuit de la figure 12.39, une f.é.m. ayant une valeur efficace de 120 V est branchée à un transformateur idéal et à une résistance $R_1 = 60{,}0\ \Omega$. Le primaire a 300 spires et le secondaire, 50,0 spires. Le secondaire est branché à une résistance $R_2 = 12{,}0\ \Omega$.

a. Quelle est la valeur efficace du courant dans le primaire ?

b. Quelle est la valeur efficace de la différence de potentiel aux bornes de la résistance R_1 ?

c. Quelle est la valeur efficace de la différence de potentiel aux bornes de la résistance R_2 ?

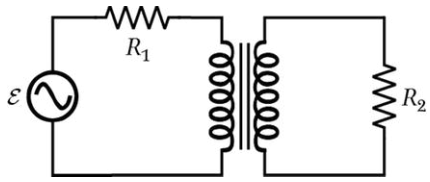


FIGURE 12.39 • Problème 45

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

12.1 (ii)	Le vecteur tournant est en rotation en sens antihoraire. La valeur instantanée de la f.é.m., qui correspond à la composante verticale du vecteur, augmente.
12.2 (iii)	Le courant et la différence de potentiel sont deux quantités différentes. Lorsqu'on les trace dans le même diagramme, on utilise des échelles différentes. Les échelles reliant la longueur des vecteurs et l'amplitude de chaque quantité sont manquantes. On ne peut pas relier les amplitudes de la différence de potentiel et du courant pour trouver la résistance.
12.3 $i_{C\mathrm{m}}$ diminue.	La réactance capacitive est $X_C = 1/(\omega C) = 1/(2\pi f C)$. En diminuant la fréquence f, cela augmente la réactance capacitive. Selon l'équation 12.14, l'amplitude du courant diminue.
12.4 $i_{L\mathrm{m}}$ augmente.	La réactance inductive est $X_L = \omega L = 2\pi f L$. En diminuant la fréquence, cela fait diminuer la réactance inductive. Selon l'équation 12.18, l'amplitude du courant augmente.
12.5 **a.** i est en avance.	Avec $\Delta V_{L\mathrm{m}} = X_L i_{\mathrm{m}}$ et $\Delta V_{C\mathrm{m}} = X_C i_{\mathrm{m}}$, on a $X_L < X_C$. La constante de phase est négative, ce qui signifie que le courant est en avance sur la f.é.m.
b. $\omega < \omega_0$	La réactance capacitive est plus importante à basse fréquence, car $X_C = 1/(\omega C)$ et $X_L = \omega L$. Comme $X_L < X_C$, la fréquence angulaire doit être plus faible que la fréquence de résonance, pour laquelle $X_L = X_C$.
12.6 **a.** ω doit diminuer.	Le courant en retard implique que $\phi > 0$, $X_L > X_C$ et $\omega > \omega_0$. Pour que la puissance soit maximale, il faut que la fréquence soit égale à la fréquence de résonance ω_0, donc on doit diminuer ω.
b. C doit diminuer.	Avec $\phi > 0$, $X_L > X_C$, donc $\omega L > 1/(\omega C)$. Avec ω constante, on obtient une puissance maximale lorsque $\phi = 0$, c'est-à-dire que $\omega = \omega_0$. Ceci est possible si on diminue C.

Annexe A

Le système international d'unités

Les données suivantes proviennent du Bureau international des poids et mesures, *Le système international d'unités*, 8e édition, 2006.

Consulter le site du Bureau international des poids et mesures pour plus de détails.

Les unités de base

Nom	Unité	Symbole	Définition
temps, durée	seconde	s	La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. (1968)
longueur	mètre	m	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. (1983)
masse	kilogramme	kg	Le kilogramme est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme. (1889)
courant électrique	ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur. (1948)
température thermodynamique	kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. (1968)
quantité de matière	mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. (1971)
intensité lumineuse	candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian. (1979)

Quelques unités dérivées

Grandeur	Unité	Symbole	Équivalence	Unité de base
angle plan	radian	rad	m/m	1
aire	mètre carré	m^2		m^2
volume	mètre cube	m^3		m^3
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}	s^{-1}
masse linéique	kilogramme par mètre	kg/m		kg/m
masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3		kg/m^3
vitesse	mètre par seconde	m/s		m/s
accélération	mètre par seconde carrée	m/s^2		m/s^2
force	newton	N		$kg \cdot m/s^2$
énergie, travail, chaleur	joule	J	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
puissance	watt	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
quantité de mouvement	kilogramme mètre par seconde	$kg \cdot m/s$		$kg \cdot m/s$
vitesse angulaire	radian par seconde	rad/s		1/s
accélération angulaire	radian par seconde carrée	rad/s^2		$1/s^2$
moment d'inertie	kilogramme mètre carré	$kg \cdot m^2$		$kg \cdot m^2$
moment de force, couple	newton mètre	$N \cdot m$		$kg \cdot m^2/s^2$
moment cinétique, spin	kilogramme mètre carré par seconde	$kg \cdot m^2/s$		$kg \cdot m^2/s$
pression, contrainte	pascal	Pa	N/m^2	$kg/(m \cdot s^2)$
charge électrique	coulomb	C	$A \cdot s$	$A \cdot s$
charge linéique	coulomb par mètre	C/m		$A \cdot s/m$
charge surfacique	coulomb par mètre carré	C/m^2		$A \cdot s/m^2$
charge volumique	coulomb par mètre cube	C/m^3		$A \cdot s/m^3$
potentiel électrique, force électromotrice	volt	V	W/A	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$
champ électrique	volt par mètre	V/m	N/C	$kg \cdot m/(A \cdot s^3)$
capacité électrique	farad	F	C/V	$A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$
densité de courant	ampère par mètre carré	A/m^2		A/m^2
résistance électrique	ohm	Ω	V/A	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$
conductance électrique	siemens	S	A/V	$A^2 \cdot s^3/(kg \cdot m^2)$
champ magnétique	tesla	T	$N/(A \cdot m)$	$kg/(A \cdot s^2)$
flux magnétique	weber	Wb	$T \cdot m^2$	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^2)$
inductance	henry	H	$V \cdot s/A$	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^2)$
éclairement énergétique	watt par mètre carré	W/m^2		kg/s^3
activité d'un radionucléide	bécquerel	Bq	s^{-1}	s^{-1}
dose absorbée	gray	Gy	J/kg	m^2/s^2
équivalent de dose	sievert	Sv	J/kg	m^2/s^2

D'autres unités utilisées dans le SI

Grandeur	Unité	Symbole	Valeur	Grandeur	Unité	Symbole	Valeur
temps	minute	min	1 min = 60 s	angle plan	degré	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	heure	h	1 h = 60 min		minute	′	$1′ = (1/60)°$
	jour	d	1 d = 24 h		seconde	″	$1″ = (1/60)′$
superficie	hectare	ha	$1 ha = 1 \times 10^4 m^2$	masse	tonne	t	1 t = 1 000 kg
volume	litre	L	$1 L = 0{,}001 m^3$				

Les préfixes du SI

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m	10^{1}	déca	da
10^{6}	méga	M	10^{-6}	micro	µ	10^{2}	hecto	h
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n	10^{-1}	déci	d
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p	10^{-2}	centi	c
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f			

D'autres unités en usage avec le SI

Grandeur	Unité	Symbole	Conversion
pression	bar	bar	1 bar = 100 kPa
	millimètre de mercure	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
longueur	ångström	Å	1 Å = 0,1 nm = 100 pm
distance	mille marin	M	1 M = 1 852 m
section efficace	barn	b	1 b = 100 fm^2 = 1×10^{-28} m^2
vitesse	nœud	kn	1 kn = (1 852/3 600) m/s
logarithme d'un rapport	néper	Np	
	bel	B	

Les règles d'écriture

- Les symboles des unités sont imprimés en caractères romains (droits), quelle que soit la police employée dans le texte où ils figurent. En général, les symboles des unités sont écrits en minuscules, mais, si le nom de l'unité dérive d'un nom propre, la première lettre du symbole est une majuscule. Le symbole du litre constitue une exception à cette règle.

  Dans l'expression $V = 2$ V, V représente le potentiel électrique et V indique des volts.
  m pour mètre
  N pour newton
  Pa pour pascal
  L pour litre

- Si on utilise un préfixe de multiple ou de sous-multiple, ce préfixe fait partie de l'unité et il précède le symbole de l'unité, sans espace entre le symbole du préfixe et le symbole de l'unité. Un préfixe n'est jamais utilisé seul, et on n'utilise jamais de préfixe composé.

  5 nm et non 5 mμm

- Les symboles d'unités sont des entités mathématiques et non des abréviations. Ils ne doivent donc pas être suivis d'un point, sauf s'ils se trouvent à la fin d'une phrase. Ils restent invariables au pluriel, et il ne faut pas mélanger des symboles avec des noms d'unités dans une même expression, puisque les noms ne sont pas des entités mathématiques.

  50 cm et non 50 cm.
  4 km et non 4 kms

- Les règles classiques de multiplication ou de division algébriques s'appliquent pour former les produits et quotients de symboles d'unités. La multiplication doit être indiquée par une espace ou un point à mi-hauteur centré (·), pour éviter que certains préfixes soient interprétés à tort comme des symboles d'unités. La division est indiquée par une ligne horizontale, une barre oblique (/) ou des exposants négatifs.

  45 N · m ou 45 N m, mais pas 45 Nm
  ms pour milliseconde
  m · s pour mètre seconde
  23 m/s ou 23 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ou 23 m · s^{-1}

- Lorsque l'on combine plusieurs symboles d'unités, on doit prendre soin d'éviter toute ambiguïté, par exemple en utilisant des crochets ou des parenthèses, ou des exposants négatifs. Il ne faut pas utiliser plus d'une barre oblique dans une expression donnée s'il n'y a pas de parenthèses pour lever toute ambiguïté.

  m · kg/(s^3 · A), mais pas
  m · kg/s^3/A ni m · kg/s^3 · A

- La valeur d'une grandeur s'exprime comme le produit d'un nombre par une unité; le nombre qui multiplie l'unité est la valeur numérique de la grandeur exprimée au moyen de cette unité. La valeur numérique d'une grandeur dépend du choix de l'unité. Ainsi, la valeur d'une grandeur particulière est indépendante du choix de l'unité, mais la valeur numérique est différente selon l'unité choisie.

  10 m/s et 36 km/h représentent la même vitesse.

- Les symboles des grandeurs sont en général formés d'une seule lettre en italique, mais ils peuvent être précisés par des informations complémentaires en indice, en exposant ou entre parenthèses.

Annexe B

Les constantes fondamentales

Les constantes présentées ici sont les valeurs recommandées de 2010 par le Committee on Data for Science and Technology (CODATA).

Visiter le site Internet du CODATA.

Les nombres entre parenthèses dans les valeurs recommandées représentent l'incertitude sur les derniers chiffres. Par exemple, $6{,}673\,84(80) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} = (6{,}673\,84 \pm 0{,}000\,80) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Nom	Symbole	Valeur approchée	Valeur recommandée	Unité
vitesse de la lumière dans le vide	c	$3{,}00 \times 10^{8}$	299 792 458	m/s
constante magnétique	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$4\pi \times 10^{-7}$	$\mathrm{N/A^2}$
constante électrique, $1/(c\mu_0)$	ϵ_0	$8{,}854 \times 10^{-12}$	$8{,}854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$	F/m
constante gravitationnelle	G	$6{,}674 \times 10^{-11}$	$6{,}673\,84(80) \times 10^{-11}$	$\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
constante de Planck	h	$6{,}626 \times 10^{-34}$	$6{,}626\,069\,57(29) \times 10^{-34}$	J · s
hc en eV · nm	hc	1 240	1 239,841 930(18)	eV · nm
constante de Planck réduite, $h/(2\pi)$	$\hbar$	$1{,}055 \times 10^{-34}$	$1{,}054\,571\,726(47) \times 10^{-34}$	J · s
$\hbar c$ en MeV · fm	$\hbar c$	197,3	197,326 971 8(44)	MeV · fm
charge élémentaire	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$1{,}602\,176\,565(35) \times 10^{-19}$	C
constante de structure fine, $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	α	$7{,}297 \times 10^{-3}$	$7{,}297\,352\,569\,8(24) \times 10^{-3}$	
inverse	α^{-1}	137,0	137,035 999 074(44)	
magnéton de Bohr, $e\hbar/(2m_e)$	μ_B	$927{,}4 \times 10^{-26}$	$927{,}400\,968(20) \times 10^{-26}$	J/T
en eV/T		$5{,}788 \times 10^{-5}$	$5{,}788\,381\,806\,6(38) \times 10^{-5}$	eV/T
magnéton nucléaire, $e\hbar/(2m_p)$	μ_N	$5{,}05 \times 10^{-27}$	$5{,}050\,783\,53(11) \times 10^{-27}$	J/T
en eV/T		$3{,}152 \times 10^{-8}$	$3{,}152\,451\,260\,5(22) \times 10^{-8}$	eV/T
constante de Rydberg, $\alpha^2 m_e c/(2h)$	R_∞	$1{,}097 \times 10^{7}$	10 973 731,568 539(55)	$\mathrm{m^{-1}}$
$R_\infty hc$ en eV	$R_\infty hc$	13,6	13,605 692 53(30)	eV
rayon de Bohr, $\alpha/(4\pi R_\infty)$	a_0	$5{,}29 \times 10^{-11}$	$5{,}291\,772\,109\,2(17) \times 10^{-11}$	m
masse de l'électron	m_e	$9{,}109 \times 10^{-31}$	$9{,}109\,382\,91(40) \times 10^{-31}$	kg
en u		$5{,}486 \times 10^{-4}$	$5{,}485\,799\,094\,6(22) \times 10^{-4}$	u
énergie au repos	$m_e c^2$	0,511	0,510 998 928(11)	MeV
longueur d'onde de Compton (électron), $h/m_e c$	λ_C	$2{,}426 \times 10^{-12}$	$2{,}426\,310\,238\,9(16) \times 10^{-12}$	m
masse du proton	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$	$1{,}672\,621\,777(74) \times 10^{-27}$	kg
en u		1,007 3	1,007 276 466 812(90)	u
énergie au repos	$m_p c^2$	938,3	938,272 046(21)	MeV
masse du neutron	m_n	$1{,}675 \times 10^{-27}$	$1{,}674\,927\,351(74) \times 10^{-27}$	kg
en u		1,008 7	1,008 664 916 00(43)	u
énergie au repos	$m_n c^2$	939,6	939,565 379(21)	MeV
masse de l'atome d'hydrogène	$m_{^1\mathrm{H}}$	1,007 8	1,007 825 032 1(4)	u
masse de la particule alpha ($^4_2\mathrm{He}$)	m_α	4,001 5	4,001 506 179 125(62)	u
masse du muon	m_μ	$1{,}883 \times 10^{-28}$	$1{,}883\,531\,475(96) \times 10^{-28}$	kg
énergie au repos	$m_\mu c^2$	105,7	105,658 371 5(35)	MeV
nombre d'Avogadro	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$	$6{,}022\,141\,29(27) \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
constante des gaz parfaits	R	8,314	8,314 462 1(75)	J/(mol · K)
constante de Boltzmann, R/N_A	k	$1{,}381 \times 10^{-23}$	$1{,}380\,648\,8(13) \times 10^{-23}$	J/K
constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}670 \times 10^{-8}$	$5{,}670\,373(21) \times 10^{-8}$	$\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$
constante de Wien	b	$2{,}898 \times 10^{-3}$	$2{,}897\,772\,1(26) \times 10^{-3}$	m · K
unité de masse atomique	u	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}660\,538\,921(73) \times 10^{-27}$	kg
en $\mathrm{MeV/c^2}$		931,5	931,494 061(21)	$\mathrm{MeV/c^2}$
électronvolt	eV	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$1{,}602\,176\,565(35) \times 10^{-19}$	J

Annexe C

Les données utiles

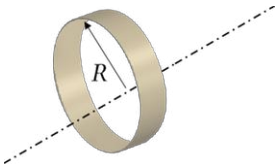
TABLEAU C.1

Quelques unités de longueur utilisées avec le SI (tableau 1.4 du tome 1).

Nom	Valeur
Unité astronomique (ua)	$1{,}496 \times 10^{11}$ m
année-lumière (al)	$9{,}461 \times 10^{15}$ m
parsec (pc)	$3{,}086 \times 10^{16}$ m
angström (Å)	1×10^{-10} m
mille marin	1852 m

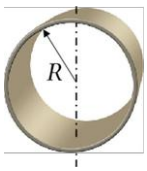
TABLEAU C.2

Le moment d'inertie de quelques solides homogènes de masse M pour un axe de rotation passant par le centre de masse (tableau 11.3 du tome 1).



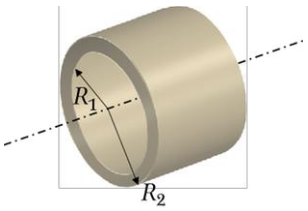
cerceau
par rapport à son axe

$$I_{cm} = MR^2$$



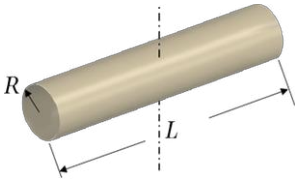
cerceau
par rapport à son diamètre

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$$



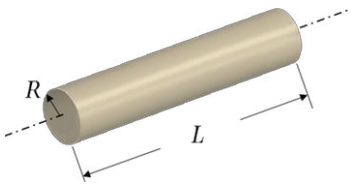
cylindre creux
par rapport à son axe

$$I_{cm} = \frac{1}{2}M\,(R_2^2 + R_1^2)$$



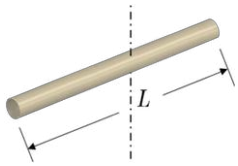
cylindre
par rapport à son diamètre central

$$I_{cm} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$



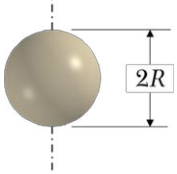
cylindre (disque)
par rapport à son axe

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$$



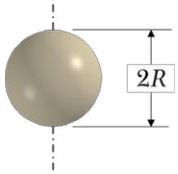
tige mince
par rapport à son diamètre central

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$



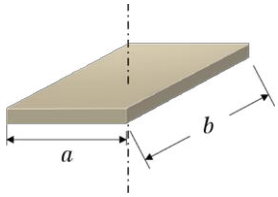
sphère pleine
par rapport à son diamètre

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$$



sphère creuse
par rapport à son diamètre

$$I_{cm} = \frac{2}{3}MR^2$$



plaque
(axe perpendiculaire)

$$I_{cm} = \frac{1}{12}M\,(a^2 + b^2)$$

TABLEAU C.3

La valeur approximative de la constante diélectrique κ et de la rigidité diélectrique $\vec{E}_{max}$ à 20 °C (tableau 5.1)

Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)	Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)
Air	1,000 59	3	Plexiglas	3,4	
Eau	80,4		Polyéthylène	2,25	
Germanium	16		Polystyrène	2,6	24
Glycérine	42,5		Porcelaine	6 à 8	
Méthanol	33,6		PVC	3,4	40
Mica	3 à 6	150	Teflon	2,1	60
Papier	3	16	Verre	4 à 7	10 à 14

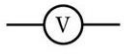
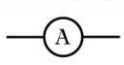
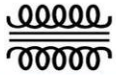
TABLEAU C.4

La résistivité (ρ) et le coefficient thermique de résistivité (α) de quelques métaux à 20 °C (tableau 6.1)

Matériau	ρ ($\Omega \cdot$ m)	α (K^{-1})
Aluminium	$2{,}65 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Argent	$1{,}59 \times 10^{-8}$	$3{,}8 \times 10^{-3}$
Cuivre	$1{,}68 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Fer	$8{,}57 \times 10^{-8}$	$5{,}0 \times 10^{-3}$
Laiton	$6{,}08 \times 10^{-8}$	$2{,}0 \times 10^{-3}$
Nichrome	$1{,}08 \times 10^{-6}$	4×10^{-4}
Nickel	$6{,}93 \times 10^{-8}$	$5{,}9 \times 10^{-3}$
Or	$2{,}21 \times 10^{-8}$	$3{,}4 \times 10^{-3}$
Platine	$1{,}05 \times 10^{-7}$	$3{,}92 \times 10^{-3}$
Plomb	$1{,}92 \times 10^{-7}$	$4{,}3 \times 10^{-3}$
Tungstène	$5{,}28 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$

TABLEAU C.5

Les symboles des composants utilisés dans les circuits (tableau 7.1)

Composant	Symbole	Composant	Symbole
Pile		Voltmètre	
Condensateur		Ampèremètre	
Fil		Bobine d'induction	
Interrupteur		Générateur	
		Transformateur	
Résistance		Diode	

Annexe D

Quelques données astronomiques

Les propriétés orbitales

Nom	Rayon moyen (10^6 km)	Période orbitale (jours)	Inclinaison de l'orbite (°)	Excentricité de l'orbite
Mercure	57,91	87,97	7,00	0,21
Vénus	108,2	224,70	3,39	0,01
Terre	149,60	365,26	0,00	0,02
Lune	0,384	27,32	5,14	0,05
Mars	227,94	686,98	1,85	0,09
Jupiter	778,33	4 332,71	1,31	0,05
Saturne	1 429,4	10 759,5	2,49	0,06
Uranus	2 870,99	30 685	0,77	0,05
Neptune	4 504,3	60 190	1,77	0,01

Les propriétés physiques

Nom	Rayon équatorial (km)	Masse (kg)	Masse volumique (g/cm^3)	Période sidérale de rotation* (jours)
Soleil	$6{,}95 \times 10^5$	$1{,}99 \times 10^{30}$	1,41	24,6
Mercure	2 440	$3{,}30 \times 10^{23}$	5,43	58,6
Vénus	6 052	$4{,}87 \times 10^{24}$	5,24	−243
Terre	6 378	$5{,}974 \times 10^{24}$	5,52	0,997 3
Lune	1 738	$7{,}35 \times 10^{22}$	3,34	27,32
Mars	3 397	$6{,}42 \times 10^{23}$	3,93	1,03
Jupiter	71 492	$1{,}90 \times 10^{27}$	1,33	0,41
Saturne	60 268	$5{,}68 \times 10^{26}$	0,69	0,45
Uranus	25 559	$8{,}68 \times 10^{25}$	1,32	−0,72
Neptune	24 766	$1{,}02 \times 10^{26}$	1,64	0,67

*Les valeurs négatives de période orbitale indiquent une rotation rétrograde.

D'autres données

Nom	Accélération en chute libre† (g)	Vitesse de libération (km/s)	Vitesse orbitale moyenne (km/s)	Température à la surface (K)	Pression (atm)
Mercure	0,378	4,44	47,87	440	0
Vénus	0,907	10,36	35,02	730	93
Terre	1,000	11,19	29,79	287	1
Mars	0,377	5,03	24,13	218	0,007
Jupiter	2,364	59,5	13,06	120	
Saturne	0,916	35,5	9,66	88	
Uranus	0,889	21,3	6,80	59	
Neptune	1,125	23,5	5,44	48	

†À l'équateur de l'astre

Annexe E

Les formules mathématiques

Les symboles mathématiques

$=$	égal
$\equiv$	défini par
$\neq$	différent
$\approx$	approximativement égal
$<$	plus petit
$\leq$	plus petit ou égal
$\ll$	beaucoup plus petit
$>$	plus grand
$\geq$	plus grand ou égal
$\gg$	beaucoup plus grand
∞	l'infini
$\propto$	proportionnel
$\sim$	du même ordre de grandeur
$\lvert x \rvert$	valeur absolue de x
$!$	factorielle
$\ln$	logarithme népérien
$\log_a$	logarithme en base a
$\log$	logarithme en base 10
$\lim_{x \to a}$	limite lorsque x tend vers a
$\sum$	somme
$f(x)$	une fonction de x
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	dérivée de f par rapport à x
$\frac{\partial f}{\partial x}$	dérivée partielle de f par rapport à x
$\mathrm{d}x$	différentielle de x
Δx	variation de x
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	intégrale de f

L'équation quadratique

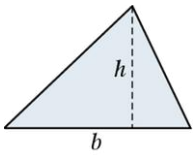
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a comme solution :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La géométrie

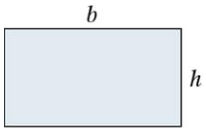
Le triangle

$$A = \frac{bh}{2}$$



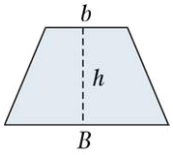
Le rectangle

$$A = bh$$



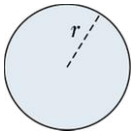
Le trapèze

$$A = \left(\frac{b+B}{2}\right)h$$



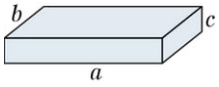
Le cercle

$$C = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$



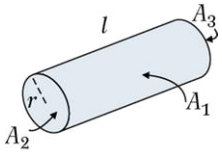
La boîte

$$V = abc$$



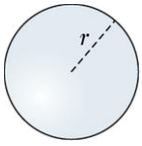
Le cylindre

$$A_1 = 2\pi rl$$
$$A_2 = A_3 = \pi r^2$$
$$V = \pi r^2 l$$



La sphère

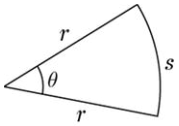
$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



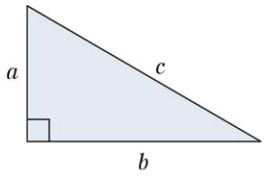
L'arc de cercle

$$s = r\theta$$

(θ en radians)



Le théorème de Pythagore



Pour un triangle rectangle,
$a^2 + b^2 = c^2$.

Les fonctions trigonométriques

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

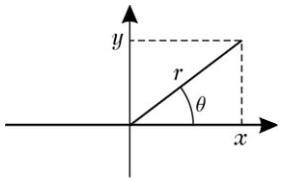
$$\sin\theta = \frac{x}{r}$$

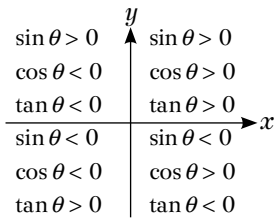
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$$





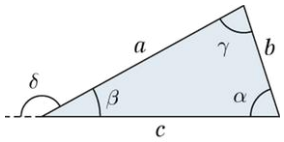
Les triangles

$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi$ rad

$\delta = \alpha + \gamma$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Les identités trigonométriques

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad \text{(E.1)}$$

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta \quad \text{(E.2)}$$

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta \quad \text{(E.3)}$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{(E.4)}$$

$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta \quad \text{(E.5)}$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \text{(E.6)}$$

$$\tan(\theta + 180°) = \tan\theta \quad \text{(E.7)}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{(E.8)}$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \text{(E.9)}$$

$$\text{cosec}^2\theta - \text{cotan}^2\theta = 1 \quad \text{(E.10)}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{(E.11)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{(E.12)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{(E.13)}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad \text{(E.14)}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \text{(E.15)}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{(E.16)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{(E.17)}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{(E.18)}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \quad \text{(E.19)}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{(E.20)}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{(E.21)}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \text{(E.22)}$$

Les exposants et les logarithmes

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad \log_a(a^x) = x$$

$$\ln(e^x) = x \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \qquad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln x$$

Les développements en série et les approximations

Le binôme

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad (\text{si } |x| \ll 1)$$

L'exponentielle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Le logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Les fonctions trigonométriques (θ en rad)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots \qquad (|\theta| < \pi/2)$$

L'approximation des petits angles

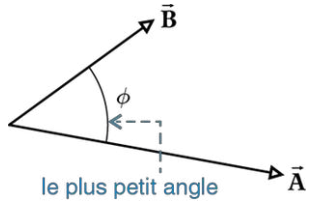
$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{array}\right\} \qquad (|\theta| \ll 1\,\text{rad})$$

Cette approximation est valable pour $|\theta| \leq 5{,}0°$.

Les produits de vecteurs

Le produit scalaire

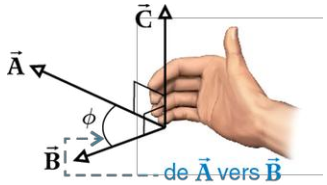
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\phi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

Le produit vectoriel



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$C = AB\sin\phi$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Les dérivées

Dans les équations suivantes, a et n représentent des constantes, alors que u et v représentent des fonctions quelconques de x.

$$\frac{da}{dx} = 0 \qquad \text{(E.23)}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{(E.24)}$$

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx} \qquad \text{(E.25)}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{(E.26)}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \qquad \text{(E.27)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{(E.28)}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \qquad \text{(E.29)}$$

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{(E.30)}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \text{(E.31)}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(E.32)}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)} \qquad \text{(E.33)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \text{(E.34)}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \text{(E.35)}$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x) \qquad \text{(E.36)}$$

$$\frac{d}{dx}\text{cotan}(x) = -\text{cosec}^2(x) \qquad \text{(E.37)}$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \tan(x)\sec(x) \qquad \text{(E.38)}$$

$$\frac{d}{dx}\text{cosec}(x) = -\text{cotan}(x)\,\text{cosec}(x) \qquad \text{(E.39)}$$

L'alphabet grec

Alpha	A	α	Êta	H	η	Nu	N	ν	Tau	T	τ
Bêta	B	β	Thêta	Θ	θ, ϑ	Xi	Ξ	ξ	Upsilon	Υ	υ
Gamma	Γ	γ	Iota	I	ι	Omicron	O	o	Phi	Φ	ϕ, φ
Delta	Δ	δ	Kappa	K	κ	Pi	Π	π, ϖ	Khi	X	χ
Epsilon	E	ϵ, ε	Lambda	Λ	λ	Rhô	P	ρ, ϱ	Psi	Ψ	ψ
Zêta	Z	ζ	Mu	M	μ	Sigma	Σ	σ, ς	Oméga	Ω	ω

Les intégrales

Une constante arbitraire doit être ajoutée à chaque intégrale indéfinie. Les arguments des fonctions trigonométriques doivent être exprimés en rad. Les lettres a, b et n représentent des constantes, alors que les lettres u et v représentent des fonctions quelconques de x.

$$\int au\,\mathrm{d}x = a\int u\,\mathrm{d}x \tag{E.40}$$

$$\int (u+v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x + \int v\,\mathrm{d}x \tag{E.41}$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \tag{E.42}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{E.43}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{E.44}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| \tag{E.45}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} \tag{E.46}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bx| \tag{E.47}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{E.48}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (x^2 > a^2) \tag{E.49}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \quad (x^2 < a^2) \tag{E.50}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| \tag{E.51}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x^2 < a^2) \tag{E.52}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{E.53}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{E.54}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{E.55}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \tag{E.56}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{E.57}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \tag{E.58}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \tag{E.59}$$

$$\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = (ax-1)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2} \tag{E.60}$$

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)\,\mathrm{e}^{ax} \tag{E.61}$$

$$\int \ln(ax)\,\mathrm{d}x = x\ln|ax| - x \tag{E.62}$$

$$\int x\ln(x) = x^2\left(\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{4}\right) \tag{E.63}$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax) \tag{E.64}$$

$$\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax) \tag{E.65}$$

$$\int \tan(ax) = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax)| \tag{E.66}$$

$$\int \operatorname{cotan}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax)| \tag{E.67}$$

$$\int \sec(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| \tag{E.68}$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec}(ax) - \operatorname{cotan}(ax)| \tag{E.69}$$

$$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \tag{E.70}$$

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} \tag{E.71}$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\operatorname{cotan}(ax) \tag{E.72}$$

$$\int \sec^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax) \tag{E.73}$$

$$\int \tan^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax) - x \tag{E.74}$$

$$\int \operatorname{cotan}^2(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\operatorname{cotan}(ax) - x \tag{E.75}$$

$$\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{E.76}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}\,\mathrm{e}^{-ax^2} = \frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{E.77}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0) \tag{E.78}$$

Annexe F

Les propriétés des éléments

Le tableau suivant donne le numéro atomique (Z), la masse molaire (M) et la masse volumique (ρ) à 20 °C.

Consulter le site WebElements pour plus de détails.

Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)	Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)
Actinium	Ac	89	[227]	10,070	Erbium	Er	68	167,26	9,066
Aluminium	Al	13	26,982	2,700	Étain	Sn	50	118,71	7,310
Américium	Am	95	[243]	13,670	Europium	Eu	63	151,96	5,244
Antimoine	Sb	51	121,76	6,697	Fer	Fe	26	55,845	7,874
Argent	Ag	47	107,87	10,490	Fermium	Fm	100	[257]	
Argon	Ar	18	39,948		Flerorium	Fl	114	[289]	
Arsenic	As	33	74,922	5,727	Fluor	F	9	18,998	
Astate	At	85	[210]		Francium	Fr	87	[223]	
Azote	N	7	14,007		Gadolinium	Gd	64	157,25	7,901
Baryum	Ba	56	137,33	3,510	Gallium	Ga	31	69,723	5,904
Berkélium	Bk	97	[247]	14,780	Germanium	Ge	32	72,61	5,323
Béryllium	Be	4	9,0122	1,848	Hafnium	Hf	72	178,49	13,310
Bismuth	Bi	83	208,98	9,780	Hassium	Hs	108	[270]	
Bohrium	Bh	107	[272]		Hélium	He	2	4,0026	
Bore	B	5	10,811	2,460	Holmium	Ho	67	164,93	8,795
Brome	Br	35	79,904		Hydrogène	H	1	1,0079	
Cadmium	Cd	48	112,41	8,650	Indium	In	49	114,82	7,310
Calcium	Ca	20	40,078	1,550	Iode	I	53	126,90	4,940
Californium	Cf	98	[251]	15,100	Iridium	Ir	77	192,22	22,650
Carbone	C	6	12,011	2,267	Krypton	Kr	36	83,80	
Cérium	Ce	58	140,12	6,689	Lanthane	La	57	138,91	6,146
Césium	Cs	55	132,91	1,879	Lawrencium	Lr	103	[262]	
Chlore	Cl	17	35,453		Lithium	Li	3	6,941	0,535
Chrome	Cr	24	51,996	7,140	Livermorium	Lv	116	[293]	
Cobalt	Co	27	58,933	8,900	Lutécium	Lu	71	174,97	9,841
Copernicium	Cn	112	[285]		Magnésium	Mg	12	24,305	1,738
Cuivre	Cu	29	63,546	8,920	Manganèse	Mn	25	54,938	7,470
Curium	Cm	96	[247]	13,510	Meitnerium	Mt	109	[276]	
Darmstadtium	Ds	110	[281]		Mendélévium	Md	101	[258]	
Dubnium	Db	105	[268]		Mercure	Hg	80	200,59	
Dysprosium	Dy	66	162,50	8,551	Molybdène	Mo	42	95,96	10,280
Einsteinium	Es	99	[252]		Néodyme	Nd	60	144,24	6,800

Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)	Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)
Néon	Ne	10	20,180		Rutherfordium	Rf	104	[267]	
Neptunium	Np	93	[237]	20,45	Samarium	Sm	62	150,36	7,353
Nickel	Ni	28	58,693	8,908	Scandium	Sc	21	44,956	2,985
Niobium	Nb	41	92,906	8,570	Seaborgium	Sg	106	[271]	
Nobélium	No	102	[259]		Sélénium	Se	34	78,960	4,819
Or	Au	79	196,97	19,300	Silicium	Si	14	28,086	2,330
Osmium	Os	76	190,23	22,610	Sodium	Na	11	22,990	0,968
Oxygène	O	8	15,999		Soufre	S	16	32,065	1,960
Palladium	Pd	46	106,42	12,023	Strontium	Sr	38	87,62	2,630
Phosphore	P	15	30,974	1,823	Tantale	Ta	73	180,95	16,650
Platine	Pt	78	195,08	21,090	Technétium	Tc	43	[98]	11,500
Plomb	Pb	82	207,2	11,340	Tellure	Te	52	127,60	6,240
Plutonium	Pu	94	[244]	19,816	Terbium	Tb	65	158,93	8,219
Polonium	Po	84	[209]	9,196	Thallium	Tl	81	204,38	11,850
Potassium	K	19	39,098	0,856	Thorium	Th	90	232,04	11,724
Praséodyme	Pr	59	140,91	6,640	Thulium	Tm	69	168,93	9,321
Prométhium	Pm	61	[145]	7,264	Titane	Ti	22	47,867	4,507
Protactinium	Pa	91	231,04	15,370	Tungstène	W	74	183,84	19,250
Radium	Ra	88	[226]	5,000	Uranium	U	92	238,03	19,050
Radon	Rn	86	[222]		Vanadium	V	23	50,942	6,110
Rhénium	Re	75	186,21	21,020	Xénon	Xe	54	131,29	
Rhodium	Rh	45	102,91	12,450	Ytterbium	Yb	70	173,06	6,570
Roentgenium	Rg	111	[280]		Yttrium	Y	39	88,906	4,472
Rubidium	Rb	37	85,468	1,532	Zinc	Zn	30	65,38	7,140
Ruthénium	Ru	44	102,91	12,370	Zirconium	Zr	40	91,224	6,511

Pour les éléments dont tous les isotopes sont instables, la colonne de la masse molaire indique la masse molaire de l'isotope le plus stable entre crochets.

Annexe G

Le tableau périodique des éléments

1	2																	
1 **H** 1,007 9																		2 **He** 4,002 6
3 **Li** 6,941	4 **Be** 9,012 2											5 **B** 10,811	6 **C** 12,011	7 **N** 14,007	8 **O** 15,999	9 **F** 18,998	10 **Ne** 20,180
11 **Na** 22,990	12 **Mg** 24,305											13 **Al** 26,982	14 **Si** 28,086	15 **P** 30,974	16 **S** 32,065	17 **Cl** 35,453	18 **Ar** 39,948
19 **K** 39,098	20 **Ca** 40,078	21 **Sc** 44,956	22 **Ti** 47,867	23 **V** 50,942	24 **Cr** 51,996	25 **Mn** 54,938	26 **Fe** 55,845	27 **Co** 58,933	28 **Ni** 58,693	29 **Cu** 63,546	30 **Zn** 65,38	31 **Ga** 69,723	32 **Ge** 72,61	33 **As** 74,922	34 **Se** 78,96	35 **Br** 79,904	36 **Kr** 83,80
37 **Rb** 85,468	38 **Sr** 87,62	39 **Y** 88,906	40 **Zr** 91,224	41 **Nb** 92,906	42 **Mo** 95,96	43 **Tc** [98]	44 **Ru** 101,07	45 **Rh** 102,91	46 **Pd** 106,42	47 **Ag** 107,87	48 **Cd** 112,41	49 **In** 114,82	50 **Sn** 118,71	51 **Sb** 121,76	52 **Te** 121,60	53 **I** 126,90	54 **Xe** 131,29
55 **Cs** 132,91	56 **Ba** 137,33	57-70 * **Lu** 174,97	72 **Hf** 178,49	73 **Ta** 180,95	74 **W** 183,64	75 **Re** 186,21	76 **Os** 190,23	77 **Ir** 192,22	78 **Pt** 195,08	79 **Au** 196,97	80 **Hg** 200,59	81 **Tl** 204,38	82 **Pb** 207,2	83 **Bi** 208,98	84 **Po** [209]	85 **At** [210]	86 **Rn** [222]
87 **Fr** [223]	88 **Ra** [226]	89-102 ** **Lr** [262]	104 **Rf** [267]	105 **Db** [268]	106 **Sg** [271]	107 **Bh** [272]	108 **Hs** [270]	109 **Mt** [276]	110 **Ds** [281]	111 **Rg** [280]	112 **Cn** [285]	113 **Uut** [284]	114 **Fl** [289]	115 **Uup** [288]	116 **Lv** [293]	117 **Uus** [294] ?	118 **Uuo** [294]

* lanthanides	57 **La** 138,91	58 **Ce** 140,12	59 **Pr** 140,91	60 **Nd** 144,24	61 **Pm** [145]	62 **Sm** 150,36	63 **Eu** 151,96	64 **Gd** 157,25	65 **Tb** 158,93	66 **Dy** 162,50	67 **Ho** 164,93	68 **Er** 167,26	69 **Tm** 168,93	70 **Yb** 173,06
** actinides	89 **Ac** [227]	90 **Th** 232,04	91 **Pa** 231,04	92 **U** 238,03	93 **Np** [237]	94 **Pu** [244]	95 **Am** [243]	96 **Cm** [247]	97 **Bk** [247]	98 **Cf** [251]	99 **Es** [252]	100 **Fm** [257]	101 **Md** [258]	102 **No** [259]

Les symboles des éléments sont ceux qui sont recommandés par l'International Union of Pure and Applied Chemistry.

Consulter le site WebElements pour plus de détails.

Réponses aux questions et exercices

CHAPITRE 1

1 $q_{(ii)} < q_{(iv)} < q_{(iii)} < q_{(i)} < q_{(v)}$

2 **a.** $q = 1{,}5$ nC **b.** $\Delta N_e = 9{,}4 \times 10^9$ électrons

3 $F = 9{,}649 \times 10^4$ C/mol

4 $q = 5{,}36 \times 10^7$ C

5 **a.** $X = {}^{63}_{30}Zn$ **b.** $X = {}^{12}_{6}C$ **c.** $X = {}^{4}_{2}He$

6 **a.** La charge du conducteur est négative.
b. La charge du conducteur est nulle.

7 **a.** La force est orientée vers la gauche (attractive), car un conducteur neutre est attiré par un objet chargé.
b. La force est orientée vers la droite (répulsive), car le contact fait en sorte que la charge positive est partagée entre les deux sphères. Les deux sphères ont alors des charges de même signe et elles se repoussent.

8 **a.** (iii) < (iv) < (i) < (ii) **b.** (i) < (ii) < (iii) < (iv)

9 $q = 9{,}0\ \mu C$

10 **a.** $\vec{F} = \vec{0}$
b. $\vec{F} = \dfrac{kqQ}{R^2}$ vers le chiffre 4

11 (i) < (iii) < (iv) < (ii)

12 **a.** Au point d **b.** $q_3 < 0$

13 (i) = (iv) < (ii) = (iii)

14 $r = 36$ mm

15 $q_1 = 590$ nC et $q_2 = -590$ nC

16 **a.** $F_e = 8{,}24 \times 10^{-8}$ N **b.** $\dfrac{F_e}{F_g} = 2{,}27 \times 10^{39}$
c. $\dfrac{F_{é \leftarrow p}}{F_{é \leftarrow T}} = 9{,}24 \times 10^{21}$

17 **a.** $F_{1 \leftarrow 2} = 1{,}90$ N **b.** $F_{2 \leftarrow 1} = 1{,}90$ N **c.** $m_1 = 0{,}825$ kg
d. $m_2 = 0{,}422$ kg **e.** $a_1 = 0{,}575$ m/s^2

18 **a.** $\vec{a}_p = 4{,}13 \times 10^{10}$ m/s^2 vers la gauche
b. $\vec{a}_e = 7{,}59 \times 10^{13}$ m/s^2 vers la droite

19 **a.** $x = 2d/3$ à droite de q_1
b. $q_3 = -4q/9$

20 **a.** $x = 6{,}00$ cm à droite de q_1 **b.** $q_3 = -12{,}0$ nC

21 $\vec{F}_3 = 66\,\text{N}\,\vec{i}$

22 **a.** $\vec{u}_{1 \to 3} = 0{,}942\vec{i} + 0{,}336\vec{j}$
b. $\vec{u}_{3 \to 1} = -0{,}942\vec{i} - 0{,}336\vec{j}$
c. $\vec{u}_{2 \to 3} = 0{,}866\vec{i} - 0{,}500\vec{j}$
d. $\vec{u}_{3 \to 2} = -0{,}866\vec{i} + 0{,}500\vec{j}$

23 **a.** $\vec{F} = (-2{,}28\vec{i} + 6{,}90\vec{j})$ N
b. $\vec{F} = 7{,}27$ N à $18{,}3°$ en sens antihoraire de la partie positive de l'axe des y

24 $\vec{F} = (-0{,}39\vec{i} - 1{,}57\vec{j})$ N

25 **a.** $\vec{F}_1 = (-5{,}84\vec{i} - 5{,}44\vec{j})$ N
b. $\vec{F}_1 = 7{,}98$ N à $43{,}0°$ sous la partie négative de l'axe des x

26 **a.** $\vec{F} = -\dfrac{k\vec{p}Q}{\left(r^2 + \dfrac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$
b. $\vec{F} \approx -\dfrac{k\vec{p}Q}{r^3}$

27 $\theta_1 = 18{,}4°$ et $\theta_2 = 9{,}44°$

28 **a.** $q_{1f} = q_{2f} = \pm 2{,}50\ \mu C$
b. $q_{1i} = 12{,}0\ \mu C$ et $q_{2i} = -7{,}00\ \mu C$ ou $q_{1i} = -12{,}0\ \mu C$ et $q_{2i} = 7{,}00\ \mu C$

29 $(x_3\,;\, y_3) = (0{,}83\,;\, 4{,}17)$ cm

30 **a.** $\vec{r}_{1 \to 3} = 8{,}0\ \text{cm}\,\vec{k}$ **b.** $\vec{u}_{1 \to 3} = \vec{k}$
c. $\vec{r}_{2 \to 3} = (-7{,}5\vec{i} - 10{,}0\vec{j} + 8{,}0\vec{k})$ cm
d. $\vec{u}_{2 \to 3} = (-0{,}51\vec{i} - 0{,}67\vec{j} + 0{,}54\vec{k})$

31 **a.** $\vec{F}_{3 \leftarrow 1} = 3{,}5\ \text{N}\,\vec{k}$
b. $\vec{F}_{3 \leftarrow 2} = (0{,}85\vec{i} + 1{,}1\vec{j} - 0{,}91\vec{k})$ N
c. $\vec{F}_3 = (0{,}85\vec{i} + 1{,}1\vec{j} + 2{,}6\vec{k})$ N
d. $F_3 = 3{,}0$ N

32 **a.** $\vec{F} = (1{,}30\vec{i} - 3{,}67\vec{j} + 3{,}50\vec{k}) \times 10^{-13}$ N
b. $\vec{a} = (1{,}43\vec{i} - 4{,}03\vec{j} + 3{,}83\vec{k}) \times 10^{17}$ m/s^2

33 $q = Q/2$

CHAPITRE 2

1 **a.** Vers le haut **b.** Vers la droite **c.** Vers la droite
d. Le champ est nul, donc il n'y a aucune orientation.
e. Vers l'ouest

2 $\vec{a} = -2{,}63 \times 10^{13}\ \text{m/s}^2\,\vec{i}$

3 **a.** Vers le haut **b.** $E = 8{,}6 \times 10^2$ N/C

4 **a.** $q = 2e = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C
b. $\vec{E} = (3{,}50\vec{i} - 4{,}69\vec{j} - 2{,}50\vec{k}) \times 10^3$ N/C
c. $E = 6{,}36 \times 10^3$ N/C

5 $E = \dfrac{mg}{q} \tan\theta$

6 $E = 1{,}38 \times 10^4$ N/C

7 $\vec{E} = \vec{0}$

8 **a.** Vers la gauche ou vers la droite, selon la position
b. Vers la droite
c. Vers la gauche
d. Dans la région (i), car les champs produits par les charges sont opposés, et on est plus près de la plus petite charge en valeur absolue.
e. Non, car les champs produits par les charges ne seront pas orientés dans la même direction.

9 **a.** (iv), car les charges produisent des champs avec des composantes x positives égales et des composantes y de valeurs opposées.
b. L'énoncé (ii), car les charges produisent des champs avec des composantes y positives égales et des composantes x de valeurs opposées.

10 **a.** $\vec{\mathbf{u}}_r = -0{,}25\vec{\imath} - 0{,}97\vec{\jmath}$
b. $\vec{\mathbf{E}} = (-3{,}7\times10^{3}\vec{\imath} - 1{,}5\times10^{4}\vec{\jmath})$ N/C

11 **a.** $\vec{\mathbf{u}}_r = 0{,}667\vec{\imath} + 0{,}0741\vec{\jmath} + 0{,}741\vec{k}$
b. $\vec{\mathbf{E}} = (-59{,}3\vec{\imath} - 6{,}59\vec{\jmath} - 65{,}9\vec{k})\times10^{3}$ N/C
c. $E = 8{,}89\times10^{4}$ N/C

12 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (18{,}2\vec{\imath} - 1{,}37\vec{\jmath})\times10^{6}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{E}} = (16{,}9\vec{\imath} - 4{,}83\vec{\jmath})\times10^{6}$ N/C

13 Sur l'axe des x, à 20,5 cm de q_1, du côté de q_2

14 À $x_3 = 2{,}84$ cm

15 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = -9{,}48\times10^{5}\ \text{N/C}\,\vec{\jmath}$ **b.** $\vec{\mathbf{F}}_e = -2{,}84\ \text{N}\,\vec{\jmath}$

16 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (4{,}82\vec{\imath} - 0{,}659\vec{\jmath})\times10^{3}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{F}}_e = (-14{,}5\vec{\imath} + 1{,}98\vec{\jmath})$ mN

17 $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{kq}{L^2}\left[\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\imath} - \left(1 - \dfrac{1}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}\right]$

18 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-1{,}9\vec{\imath} - 7{,}1\vec{\jmath})\times10^{4}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{F}}_e = (2{,}1\vec{\imath} + 7{,}8\vec{\jmath})\times10^{-4}$ N

19 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (2{,}21\vec{\imath} + 1{,}01\vec{\jmath} - 2{,}19\vec{k})\times10^{6}$ N/C
b. $E = 3{,}26\times10^{6}$ N/C

20 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-0{,}81\vec{\imath} + 2{,}29\vec{\jmath} - 2{,}18\vec{k})\times10^{6}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{a}} = (1{,}4\vec{\imath} - 4{,}03\vec{\jmath} + 3{,}84\vec{k})\times10^{17}$ m/s^2

21 **a.** $p = 1{,}881\times10^{-29}$ C · m $= 5{,}639$ D
b. Non, car notre modèle donne une valeur 3,05 fois trop grande.

22 $\vec{\mathbf{p}} = (-2{,}2\vec{\imath} + 2{,}8\vec{\jmath})\times10^{-7}$ C · m

23 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = 6{,}93\ \text{N/C}\,\vec{k}$ **b.** $\vec{\mathbf{F}}_e = -1{,}11\times10^{-18}\ \text{N}\,\vec{k}$

25 **a.** $dq = \lambda\,dx = \dfrac{Q}{L}\,dx$ **b.** $\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\imath}$ **c.** $r = d - x$
d. $\displaystyle\int_0^L \frac{k\lambda\vec{\imath}}{(d-x)^2}\,dx = \frac{kQ\vec{\imath}}{L}\int_0^L \frac{dx}{(d-x)^2}$

26 **a.** $dq = \lambda\,dx$ **b.** $\vec{\mathbf{u}}_r = \dfrac{-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
c. $r = \sqrt{x^2+y^2}$
d. $\vec{\mathbf{E}} = -k\lambda\vec{\imath}\displaystyle\int_0^L \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + k\lambda y\vec{\jmath}\int_0^L \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

27 **a.** $dq = \lambda\,dx = \dfrac{Q}{L}\,dx$ **b.** $\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\imath}$
c. $r = d - x$ (attention : $x < 0$)
d. $\displaystyle\int_{-L}^{0} \frac{k\lambda\vec{\imath}}{(d-x)^2}\,dx = \frac{kQ\vec{\imath}}{L}\int_{-L}^{0} \frac{dx}{(d-x)^2}$

28 **a.** $dq = \lambda R\,d\theta$ **b.** $\vec{\mathbf{u}}_r = \sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}$
c. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{k\lambda}{R}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath})\,d\theta$

29 $Q = a\ln\left(\dfrac{2d+L}{2d}\right) = a\ln\left(1 + \dfrac{L}{2d}\right)$

30 $\vec{\mathbf{E}} = -2{,}02\times10^{5}\ \text{N/C}\,\vec{\imath}$

31 $\vec{\mathbf{E}} = 4{,}49\times10^{5}\ \text{N/C}\,\vec{\jmath}$

33 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-1{,}41\vec{\imath} + 3{,}71\vec{\jmath})\times10^{5}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{F}}_e = (-9{,}87\vec{\imath} + 26{,}0\vec{\jmath})$ mN

34 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$

35 $E = 2{,}52\times10^{7}$ N/C

36 $\vec{\mathbf{E}} = (-3{,}52\vec{\imath} + 1{,}46\vec{\jmath})\times10^{7}$ N/C

37 $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Q\sin(\theta/2)}{2\pi\epsilon_0 R^2\theta}\vec{\imath}$

38 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$
b. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{2}{d} - \dfrac{1}{\sqrt{L^2 + (d/2)^2}}\right]\vec{\jmath}$

39 $\vec{\mathbf{E}} = (-41{,}6\vec{\imath} - 11{,}3\vec{\jmath})$ kN/C

40 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-0{,}437\vec{\imath} + 1{,}70\vec{\jmath})\times10^{6}$ N/C
b. $\vec{\mathbf{F}}_e = (52{,}5\vec{\imath} - 204\vec{\jmath})$ mN

41 **a.** $\mathcal{P}_3 > \mathcal{P}_2 > \mathcal{P}_1$ (où $E = 0$) **b.** $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_3 > \mathcal{P}_2$

42 $\vec{\mathbf{E}} = -10{,}38\times10^{6}\ \text{N/C}\,\vec{k}$

43 **a.** $\sigma_1 = 36\ \mu\text{C/m}^2$ **b.** $\sigma_1' = 48\ \mu\text{C/m}^2$

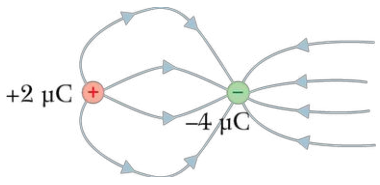
44 **a.** $z = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ **b.** $E = \dfrac{Q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}$

45 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ **b.** $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{k}\left[\dfrac{2}{\sqrt{17}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right]$

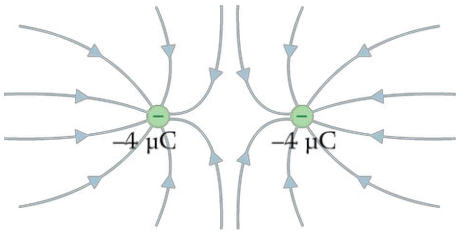
46 **a.** Vers la droite pour a et b
b. Vers la gauche pour a et b
c. Au point b, car les lignes sont plus rapprochées.

47 $q_1 = -3\ \mu\text{C}$

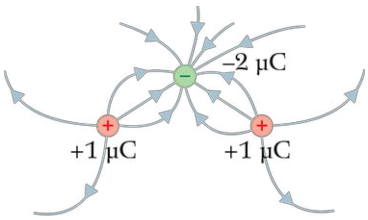
48 **a.**



b.



c.



49 **a.** La vitesse change d'orientation.
b. Le module de la vitesse augmente.
c. Le module de la vitesse diminue.
d. Le module de la vitesse diminue.
e. Le module de la vitesse augmente.
f. La vitesse change d'orientation.

50 $\vec{\mathbf{a}} = (111\vec{\imath} - 65{,}5\vec{\jmath})\ \text{m/s}^2$

51 **a.** $a = 4{,}39 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2$ **b.** $v = 3{,}25 \times 10^6\ \text{m/s}$
c. $E = 2{,}50\ \text{kN/C}$ **d.** $\sigma = 44{,}2\ \text{nC/m}^2$

52 **a.** $d = 0{,}16\ \text{m}$ **b.** $t = 4{,}4 \times 10^{-7}\ \text{s}$

53 $v = 2{,}2 \times 10^6\ \text{m/s}$

54 $q = -2e$

55 **a.** $v_x = 6{,}93 \times 10^5\ \text{m/s}$ et $v_y = -1{,}53 \times 10^5\ \text{m/s}$
b. $\Delta y = 7{,}1\ \text{mm}$

56 $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}8 \times 10^6\ \text{N/C}\ \overrightarrow{\text{vers le haut}}$

57 **a.** $\vec{\mathbf{v}} = 1{,}68 \times 10^7\ \text{m/s}\,\vec{\imath}$
b. $\vec{\mathbf{v}} = (1{,}68 \times 10^7\,\vec{\imath} + 4{,}69 \times 10^5\,\vec{\jmath})\ \text{m/s}$
c. $\Delta y = 7{,}01\ \text{mm}$

58 **a.** Oui, la plaque du bas **b.** À $x = 0{,}069\,34\ \text{m}$

59 $\phi = 90°$

60 $\tau_{\text{max}} = 2{,}5 \times 10^{-22}\ \text{N} \cdot \text{m}$

61 $\vec{\boldsymbol{\tau}} = -3{,}52 \times 10^{-5}\ \text{N} \cdot \text{m}\,\vec{\boldsymbol{k}}$

CHAPITRE 3

1 **a.** (i) et (ii) **b.** Les trois **c.** Les trois
d. (ii) **e.** (ii)

2 **a.** (i) **b.** (i) et (ii) **c.** (i)

3 **a.** (ii) **b.** (ii) **c.** (ii)

4 **a.** Le flux double.
b. Le flux diminue de moitié.
c. Le flux augmente d'un facteur π.
d. Le flux diminue d'un facteur $\sqrt{2}$ (le flux est multiplié par $\sqrt{2}/2$).

5 $\Phi_E = 0{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

6 $\Phi_E = 303\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

7 **a.** $\Phi_E = 61{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
b. Le flux est multiplié par 0,577.
c. Le flux est multiplié par 1,53.

8 $\Phi_E = 36\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

9 **a.** $\Phi_{\text{avant}} = 3{,}60\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
$\Phi_{\text{arrière}} = -3{,}60\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
$\Phi_{\text{droite}} = -2{,}16\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
$\Phi_{\text{gauche}} = 2{,}16\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
$\Phi_{\text{haut}} = \Phi_{\text{bas}} = 0{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
b. $\Phi_E = 0{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

10 **a.** Le flux ne change pas.
b. Le flux est divisé par 2.
c. Le flux devient nul.
d. Le flux ne change pas.

11 $\Phi_E = 1{,}92 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

12 $\Phi_E = -3{,}39 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

13 **a.** $\Phi_E = -E\pi R^2$ **b.** $\Phi_E = E\pi R^2$

14 **a.** $\Phi_E = -2{,}82 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
b. $\Phi_E = -471\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

15 **a.** $\Phi_E = -100\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
b. $Q_{\text{int}} = -8{,}89 \times 10^{-10}\ \text{C}$

16 **a.** $\Phi_E = -5Q/(2\epsilon_0)$
b. $\Phi_E = 0$

17 **a.** $R_{\text{max}} = 2{,}00\ \text{cm}$
b. $\Phi_E = -2{,}26 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$

18 **a.** $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_6 = 0{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, car $\vec{\mathbf{E}}$ est parallèle à la surface. $\Phi_3 = -0{,}450\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ et $\Phi_5 = 0{,}900\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
b. $\Phi_E = 0{,}450\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
c. $Q_{\text{int}} = 3{,}98 \times 10^{-12}\ \text{C}$

19 La réponse est (v), car la charge à l'intérieur des trois surfaces est $Q_{\text{int}} = \lambda L$.

20 La réponse est (i), car seul le cylindre a la même symétrie que la distribution de charges.

21 La réponse est (i), car le flux dépend uniquement de la charge à l'intérieur. L'énoncé (II) est faux, car la tige n'a pas la symétrie sphérique de la surface de Gauss.

22 **a.** $r = 5{,}0\ \text{cm}$ **b.** $Q_{\text{int}} = Q_1$
c. $r = 10\ \text{cm}$ **d.** $Q_{\text{int}} = Q_1 + Q_2$

23 a. $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$ b. $E = 0$ c. $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

24 $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r$

25 a. $E = 135$ kN/C b. $E = 120$ kN/C

26 $\vec{\mathbf{E}} = 2{,}40 \times 10^3$ N/C $\overrightarrow{\text{vers la gauche}}$

27 a. $\vec{\mathbf{E}} = 90$ N/C $\overrightarrow{\text{vers le bas}}$
b. $\vec{\mathbf{E}} = 7{,}3 \times 10^2$ N/C $\overrightarrow{\text{vers le bas}}$
c. $\vec{\mathbf{E}} = 90$ N/C $\overrightarrow{\text{vers le haut}}$

28 a. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}\vec{\mathbf{u}}_r$ b. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[1 - \dfrac{2(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}\right]\vec{\mathbf{u}}_r$
d. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$
e. $r = 0$ et $r = \left[\dfrac{b^3 + c^3}{2}\right]^{1/3}$

29 a. $\vec{\mathbf{E}} = 10{,}2$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ b. $\vec{\mathbf{E}} = 7{,}19$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}13$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ d. $\vec{\mathbf{E}} = -2{,}35$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$
e. $r = 0{,}00$ cm et $r = 27{,}7$ cm

30 a. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{\mathbf{u}}_r$ b. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho a^2 + 2b\sigma_1}{2\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r$
d. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho a^2 + 2b\sigma_1 + 2c\sigma_2}{2\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r$

31 a. $\vec{\mathbf{E}} = 43{,}1$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ b. $\vec{\mathbf{E}} = 38{,}8$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = -18$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ d. $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}5$ kN/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$

32 a. $\vec{\mathbf{E}}_{\text{plan}} = 169$ kN/C$\,\vec{\imath}$ b. $\vec{\mathbf{E}}_{\text{cyl}} = 178$ kN/C$\,\vec{\imath}$
c. $q = -10{,}7$ nC

33 $\dfrac{F}{A} = \dfrac{|\sigma_+ \sigma_-|}{2\epsilon_0}$

35 a. $Q_{\text{int}} = -q$ b. $Q_{\text{ext}} = -2q$

36 a. $E = 0{,}00$ N/C b. $E = 18{,}2$ kN/C

37 a. $\sigma = 9{,}38\ \mu\text{C/m}^2$
b. $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}06 \times 10^6$ N/C$\,\vec{\mathbf{u}}_n$

38 $\sigma_2 = -\sigma_1 r_1 / r_2$

39 a. $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ b. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ d. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$
e. $\sigma_{\text{int}} = \dfrac{-Q_1}{4\pi b^2}$ $\sigma_{\text{ext}} = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\,(b+e)^2}$

40 a. $\vec{\mathbf{E}} = 0{,}0$ N/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ b. $\vec{\mathbf{E}} = -1{,}1 \times 10^6$ N/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$
c. $\vec{\mathbf{E}} = 0{,}0$ N/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$ d. $\vec{\mathbf{E}} = 3{,}2 \times 10^5$ N/C$\,\vec{\mathbf{u}}_r$
e. $\sigma_{\text{int}} = 2{,}4\ \mu\text{C/m}^2$ $\sigma_{\text{ext}} = 3{,}3\ \mu\text{C/m}^2$

41 $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}$ $\overrightarrow{\text{vers le bas}}$

42 $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}06 \times 10^6$ N/C $\overrightarrow{\text{vers le bas}}$

43 $\lambda = 45$ nC/m

CHAPITRE 4

1 a. $\Delta U < 0$ b. $\Delta U > 0$ c. $\Delta U < 0$ d. $\Delta U = 0$

2 $W_{\text{ext}} = -6{,}4 \times 10^{-4}$ J

3 $\Delta\vec{\mathbf{s}} = -12{,}8$ mm$\,\vec{\imath}$

4 a. $\Delta U = -6{,}59 \times 10^{-16}$ J b. $E = 2{,}42 \times 10^3$ N/C

5 $\Delta U = -9{,}5 \times 10^{-16}$ J

6 a. $\Delta U = -6{,}4 \times 10^{-17}$ J
b. $v = 1{,}3 \times 10^7$ m/s

7 a. $V_b - V_a = 0$ b. $V_b - V_a < 0$ c. $V_b - V_a > 0$

8 a. v augmente.
b. v ne change pas.
c. v diminue.

9 $\Delta V = 1{,}1$ kV

10 a. $K_{\text{f}} = 1000$ eV $= 1{,}602 \times 10^{-16}$ J
b. $v_{\text{f}} = 1{,}875 \times 10^7$ m/s

11 a. $v = 1{,}53 \times 10^7$ m/s b. $\Delta V = 2{,}44$ MV

12 a. $W_{\text{ext}} = 1{,}52$ J
b. Il faut fournir de l'énergie au système pour déplacer la charge de l'infini au point $\mathcal{P}$.

13 a. La plaque du haut b. $v = 1{,}72 \times 10^7$ m/s

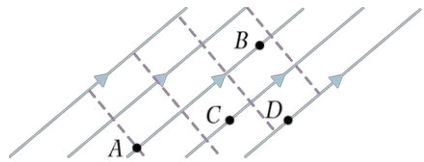
14 a. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{u}}_r$
b. $V_a - V_c = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_c}{r_a}$
c. $\lambda = 24{,}2$ nC/m

15 a. $V = -\dfrac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$
b. $V = -\dfrac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$

16 a. $V_b - V_a = 27{,}0$ kV b. $\Delta K = -94{,}5 \times 10^{-3}$ J

17 Un travail nul, car la différence de potentiel est nulle.

18 a.



b. $V_B < V_D < V_C < V_A$

19 a. Les points a et b, car ils sont plus près de la plus petite charge en valeur absolue.

b. Oui, les points a et b font partie d'une équipotentielle qui entoure la charge positive.

20 (iii) < (ii) < (i)

21 **a.** $V_b - V_a = -5{,}4 \times 10^5$ V
b. $V_b - V_c = -5{,}4 \times 10^5$ V

22 $V = 1{,}42$ kV

23 **a.** $V_a = 1{,}4 \times 10^6$ V **b.** $V_b = -5{,}9 \times 10^5$ V
c. $W_{ext} = 9{,}8$ J

24 **a.** $y = -3{,}00$ cm et $y = 1{,}50$ cm
b. $x = 2{,}12$ cm et $x = -2{,}12$ cm

25 $q_1 = -4{,}00\, q_2$

26 (ii) < (i) = (iv) < (iii)

27 $W_{ext} = -1{,}16$ J

28 $W_{ext} = -\dfrac{kq^2}{L}$

29 $U = \dfrac{22{,}8\, kq^2}{L}$

30 $v_i = 9{,}62 \times 10^6$ m/s

31 $v = 132$ m/s

32 $W_{ext} = \dfrac{1}{2} kQq \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} \right)$

33 **a.** $U = -27{,}2$ eV **b.** $K = 13{,}6$ eV **c.** $W_{ext} = 13{,}6$ eV

34 $v_i = 84{,}8$ m/s

35 $r_{min} = 362$ pm

36 $v_p = 4{,}69 \times 10^6$ m/s ; $v_\alpha = 1{,}18 \times 10^6$ m/s

37 **a.** $dq = \lambda\, dx = \dfrac{Q}{L}\, dx$ **b.** $r = d - x$
c. $V = \dfrac{kQ}{L} \displaystyle\int_0^L \frac{1}{(d-x)}\, dx$

38 **a.** $dq = \lambda\, dx$ **b.** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
c. $V = k\lambda \displaystyle\int_0^L \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx$

39 **a.** $dq = \lambda R\, d\theta$ **b.** $V = k\lambda \displaystyle\int_0^\pi d\theta$ **c.** $V = k\lambda\pi$

40 **a.** $V_1 = 1{,}89 \times 10^6$ V **b.** $V_2 = 2{,}87 \times 10^6$ V
c. $V_2 - V_1 = 9{,}7 \times 10^5$ V

41 $v_i = 10{,}8$ m/s

42 **a.** $V_1 = 9{,}81 \times 10^6$ V **b.** $V_2 = 6{,}72 \times 10^6$ V
c. $V_2 - V_1 = -3{,}09 \times 10^6$ V

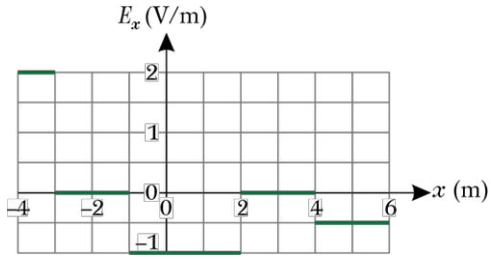
43 $\sigma = -1{,}26 \times 10^{-5}$ C/m^2

44 $\Delta V = 1{,}81 \times 10^4$ V

45 **a.** (iii) < (ii) < (i)
b. $\vec{\mathbf{E}}_{(i)}$ opposé à l'axe des y
$\vec{\mathbf{E}}_{(ii)}$ opposé à l'axe des y
$\vec{\mathbf{E}}_{(iii)}$ dans le sens de l'axe des y

46 **a.** (i) et (v) **b.** (ii) < (i) = (v) < (iii) = (iv)

47



48 **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-70{,}0x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + 24{,}0z\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 24{,}0y\,\vec{\boldsymbol{k}}) \times 10^3$
b. $\vec{\mathbf{E}} = (84{,}0\vec{\boldsymbol{\imath}} + 43{,}2\vec{\boldsymbol{\jmath}} - 60{,}0\vec{\boldsymbol{k}}) \times 10^3$ V/m
c. $F = 2{,}80$ N

50 $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{kp}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \left[3xy\vec{\boldsymbol{\imath}} + (2y^2 - x^2)\, \vec{\boldsymbol{\jmath}} \right]$

51 (iii), car le potentiel est constant et continu à l'intérieur des conducteurs et il diminue en $1/r$ à l'extérieur.

52 **a.** (i)
b. (ii)

53 $Q = -10{,}0$ nC

55 $Q_1 = -16{,}3$ µC et $Q_2 = -8{,}70$ µC

56 **a.** $Q_1 = -2{,}14$ µC et $Q_2 = -3{,}86$ µC
b. $V_1 = V_2 = -385$ kV
c. $N = 8{,}83 \times 10^{13}$ électrons

57 **a.** $V = 2{,}6 \times 10^6$ V
b. $V = 3{,}9 \times 10^6$ V
c. $V = 9{,}0 \times 10^6$ V

58 $W_{moteur} = 0{,}500$ J

59 **a.** $W_{ext} = 6{,}0$ J **b.** $Q = 4{,}80 \times 10^3$ C

60 **a.** $W_{moteur} = 15$ J **b.** $Q = 2{,}8$ C

61 $180° < \theta < 360°$ (en sens antihoraire)

62 $U_{max} = 2{,}11 \times 10^{-23}$ J

63 $U = -151$ µJ

CHAPITRE 5

1 **a.** La charge reste constante.
b. La charge devient nulle.

2 **a.** La capacité reste la même.
b. La capacité reste la même.
c. La capacité reste la même.

3 $Q = 73{,}8$ µC

4 **a.** $Q_i = -0{,}54$ nC **b.** $Q_f = 0{,}24$ nC
c. $i = 7{,}8 \times 10^{-7}$ C/s

5 **a.** La capacité double.
b. La capacité diminue de moitié.
c. La capacité est multipliée par 2,5.

6 a avec C_2 et C_4 ; b avec C_1 ; c avec C_3

7 **a.** $\kappa = 7{,}45$ **b.** De la porcelaine

8 $Q = 15$ nC

9 $C = 71$ pF

11 **a.** $Q_1/Q_2 = 1$ **b.** $(\Delta V_1)/(\Delta V_2) = 3$

12 $U_{(ii)} < U_{(iii)} < U_{(i)}$

13 **a.** $C = 11{,}7$ pF **b.** $Q = 8{,}45$ nC **c.** $U = 3{,}04$ µJ

14 $u_E = 4{,}0 \times 10^{-5}$ J/m^3

15 $C = 10{,}0$ pF

16 **a.** $C = 1{,}00$ µF **b.** $d = 2{,}67$ µm
c. $A = 641$ cm^2 **d.** $Q = 316$ µC

17 **a.** $K = 0{,}16$ J **b.** $v = 1{,}1$ m/s

18 **a.** $Q_i = 150$ µC **b.** $C = 50{,}0$ µF **c.** $i = 8{,}33$ C/s

19 $W = 2{,}01$ mJ

20 $W = 797$ µJ

21 (i) < (iii) < (ii)

22 **a.** $C_{éq} = 10{,}00$ µF
b. $Q_1 = 1{,}20$ mC et $Q_2 = 0{,}80$ mC
c. $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 200$ V

23 **a.** $C_{éq} = 2{,}40$ µF
b. $Q_1 = Q_2 = 480$ µC
c. $\Delta V_1 = 80{,}0$ V et $\Delta V_2 = 120$ V

24 $C_{éq} = 29{,}7$ µF

25 $N = 6$

26 $C_1 = 9{,}00$ µF

27 $U = 0{,}13$ J

28 $U = 0{,}030$ J

30 **a.** $C_{éq} = 3{,}43$ µF
b. $Q_1 = 12{,}9$ µC, $Q_2 = 21{,}4$ µC et $Q_3 = 34{,}3$ µC
c. $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 4{,}29$ V et $\Delta V_3 = 5{,}71$ V
d. $U_1 = 27{,}6$ µJ, $U_2 = 45{,}9$ µJ et $U_3 = 98{,}0$ µJ

31 **a.** $C_{éq} = 10{,}80$ µF
b. $U = 77{,}8$ mJ
c. $Q_1 = 576$ µC, $Q_2 = 720$ µC et $Q_3 = 576$ µC
d. $\Delta V_1 = 48{,}0$ V, $\Delta V_2 = 120$ V et $\Delta V_3 = 72{,}0$ V
e. $U_1 = 13{,}8$ mJ, $U_2 = 43{,}2$ mJ et $U_3 = 20{,}7$ mJ

32 **a.** $C_{éq} = 5{,}00$ µF **b.** $\Delta V_5 = 64{,}0$ V

33 **a.** $Q_1 = Q_3 = 10{,}8$ µC et $Q_2 = Q_4 = 20{,}0$ µC
b. $Q_1 = 10{,}3$ µC, $Q_2 = 20{,}6$ µC, $Q_3 = 11{,}6$ µC, $Q_4 = 19{,}3$ µC

34 **a.** $Q_1 = Q_2 = 37$ µC, $\Delta V_1 = 7{,}4$ V et $\Delta V_2 = 4{,}6$ V
b. $Q_1' = 28$ µC, $Q_2' = 45$ µC et $\Delta V_1' = \Delta V_2' = 5{,}7$ V

35 **a.** $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 34{,}7$ V
b. $Q_1 = 0{,}052$ mC et $Q_2 = 0{,}19$ mC

36 **a.** $C_{éq} = \dfrac{\epsilon_0 A(\kappa_1 + \kappa_2)}{2d}$ **b.** $C_{éq} = \dfrac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\dfrac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)$

37 **a.** $C_{éq} = 29$ nF **b.** $C_{éq} = 29$ nF

38 $C_{éq} = \dfrac{\epsilon_0 A}{d}\left(\dfrac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} + \dfrac{\kappa_3}{2}\right)$

39 **a.** $C = \dfrac{(N-1)\epsilon_0 A}{d}\left(1 - \dfrac{\theta}{180°}\right)$
b. $C = \dfrac{(N-1)\epsilon_0 A}{d}$

CHAPITRE 6

1 $i_{(ii)} = i_{(iii)} > i_{(iv)} > i_{(i)}$

2 $i = 4$ mA, vers la gauche

3 $i = 27$ mA, vers la gauche

4 $N_é = 3{,}7 \times 10^{21}$ électrons

5 $i = 34$ mA

6 **a.** $n = 6{,}026 \times 10^{28}$ m^{-3} **b.** $v_d = 7{,}34 \times 10^{-6}$ m/s
c. $\Delta t = 1{,}58$ jour

7 **a.** $\vec{\mathbf{J}} = 22$ A/m^2 $\overrightarrow{\text{vers la gauche}}$
b. $\vec{\mathbf{v}}_d = 1{,}63 \times 10^{-9}$ m/s $\overrightarrow{\text{vers la droite}}$

8 $q = 24{,}0$ C

9 **a.** $i = \dfrac{J_0 \pi R^2}{3}$ **b.** $i = \dfrac{J_0 \pi R^2}{6}$

10 **a.** La densité de courant double.
b. La densité de courant double.
c. La densité de courant est divisée par 4.
d. La densité de courant est plus faible dans le fil d'aluminium.

11 **a.** $\sigma = 5{,}21 \times 10^6$ A/(V · m) **b.** $i = 2{,}34 \times 10^{-4}$ A

12 **a.** $\vec{\mathbf{v}}_d = 8{,}69 \times 10^{-6}$ m/s $\vec{j}$
b. $\vec{\mathbf{J}} = -9{,}20 \times 10^4$ A/m^2 $\vec{j}$
c. $\rho = 2{,}68 \times 10^{-8}$ V · m/A

13 $E = 61{,}1$ mV/m

14 **a.** $\tau = 2{,}8 \times 10^{-14}$ s **b.** $E = 3{,}1$ mV/m **c.** du laiton

15 (ii), car la résistivité diminue lorsque la température augmente.

16 J diminue, car la résistivité du semi-conducteur augmente lorsque la température diminue.

17 $T = 1{,}7 \times 10^2$ °C

18 $J = 0{,}124$ A/m^2

19 $R_{(ii)} < R_{(i)} < R_{(iii)}$

20 **a.** $R_2 < R_1 < R_3$
b. $\Delta V_2 < \Delta V_1 < \Delta V_3$

21 La résistance est multipliée par 4 car la longueur est doublée, et l'aire de la section est divisée par 2 (le volume du fil ne change pas).

22 $\frac{r_{\text{fer}}}{r_{\text{nickel}}} = 1{,}112$

23 $d = 10{,}6$ mm

24 $R = 0{,}0143\ \Omega$

25 $R = 2{,}25 \times 10^{-4}\ \Omega$

26 $R = 16{,}7\ \Omega$

27 **a.** $\rho = 2{,}65 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ **b.** $J = 3{,}77 \times 10^{5}\ \text{A/m}^2$
c. $E = 10{,}0$ mV/m

28 **a.** $R = 28{,}0\ \Omega$ **b.** $N = 490$ spires

29 $T = 421\ ^\circ\text{C}$

30 **a.** $R = 0{,}016\ \Omega$ **b.** $i = 1{,}2$ A
c. $v_d = 0{,}55$ mm/s

31 $i_{(\text{iii})} < i_{(\text{ii})} < i_{(\text{i})} < i_{(\text{iv})}$

32 $i = 4{,}00$ mA

33 $R_0 = 23\ \Omega$

34 **a.** $i = 11{,}3$ mA **b.** $R_{\text{no}} = 564\ \Omega$

35 **a.** $i = 10{,}87$ A **b.** $R = 10{,}6\ \Omega$

36 $P = 25$ W

37 $P = 5{,}04$ kW

38 **a.** $P = 2{,}40$ kW **b.** $i = 10{,}0$ A
c. coût = 0,77 $

39 **a.** $q = 4{,}00$ mC **b.** $P = 5{,}80$ mW
c. $\Delta U = 0{,}348$ J

40 **a.** $R = 18{,}0\ \Omega$ **b.** $R_0 = 17{,}3\ \Omega$
c. $N = 269$ spires

CHAPITRE 7

1 **a.** Deux nœuds et deux mailles
b. Trois nœuds et trois mailles
c. Aucun nœud et une maille

2 $i = 0{,}70$ A, vers le haut

3 **a.** $i_1 = i_2 + i_3$
b. $\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_4 i_3 = 0$
c. $-R_2 i_2 - \mathcal{E}_2 - R_3 i_2 - \frac{Q}{C} + r_4 i_3 = 0$

4 $i = 34{,}1$ mA, en sens antihoraire

5 **a.** $i = 1{,}08$ A
b. $\Delta V_1 = 81{,}1$ V et $\Delta V_2 = 38{,}9$ V
c. $P_1 = 87{,}7$ W et $P_2 = 42{,}1$ W

6 **a.** $i_3 = 18{,}0$ mA, vers le bas
b. $V_b - V_a = -2{,}75$ V

7 **a.** $Q_1 = 138\ \mu\text{C}$
b. $i_{R_2} = 58{,}4$ mA et $i_{R_4} = 6{,}72$ mA

9 $\Delta V_{(\text{iii})} < \Delta V_{(\text{i})} < \Delta V_{(\text{ii})}$

10 $r = 0{,}63\ \Omega$

11 $r = 0{,}40\ \Omega$

12 **a.** $P_{\mathcal{E}} = 10{,}9$ W **b.** $P_r = 2{,}64$ W
c. $P_{\text{batterie}} = 8{,}26$ W

13 $r = \frac{R}{\Delta V_R}(\mathcal{E} - \Delta V_R)$

14 **b.** $P_{R,\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}$

15 $R = 0{,}835\ \Omega$ ou $0{,}147\ \Omega$

16 $\mathcal{E} = 0{,}687$ V et $r = 318\ \Omega$

17 **a.** En parallèle
b. En série
c. En parallèle

18 **a.** L'ampoule de 100 W **b.** L'ampoule de 60 W

19 (vi) < (ii) = (iii) < (iv) < (i) < (v)

20 **a.** $\Delta V = 4{,}8$ V **b.** $R = 1{,}8\ \Omega$ **c.** $i = 2{,}7$ A
d. $i_{\text{total}} = 2{,}7$ A. Le courant qui circule dans chaque ampoule est le même que le courant total, car les ampoules sont branchées en série.

21 $P_{\mathcal{E}} = 1{,}90$ W

22 **a.** $R_{\text{éq}} = 22{,}0\ \Omega$ **b.** $R_{\text{éq}} = 7{,}4\ \Omega$ **c.** $R_{\text{éq}} = 3{,}5\ \Omega$
d. $R_{\text{éq}} = 3{,}3\ \Omega$ **e.** $R_{\text{éq}} \to \infty$ **f.** $R_{\text{éq}} = 0{,}0\ \Omega$

23 $\mathcal{E} = 1{,}3$ V

24 $R = \frac{R_o}{\sqrt{3}}$

25 **a.** $P_{\mathcal{E}} = 0{,}383$ W et $V_b - V_a = -3{,}66$ V
b. $P_{\mathcal{E}} = 0{,}635$ W et $V_b - V_a = 0{,}00$ V

26 $i_1 = 0{,}112$ mA et $\Delta V_1 = 1{,}34$ V
$i_2 = 0{,}179$ mA et $\Delta V_2 = 1{,}34$ V
$i_3 = 0{,}291$ mA et $\Delta V_3 = 6{,}98$ V
$i_4 = 0{,}157$ mA et $\Delta V_4 = 8{,}33$ V
$i_5 = 0{,}448$ mA et $\Delta V_5 = 3{,}67$ V

27 **a.** $i = \frac{4\mathcal{E}}{40 + 14R}$
b. $P = \frac{16\mathcal{E}^2 R}{(40 + 14R)^2}$
c. $R = 2{,}86\ \Omega$

28 $\Delta V_2 < \Delta V_1 = \Delta V_3$

29 **a.** $i_{\text{réel}} = 4{,}29$ mA **b.** $i_{\text{mes}} = 4{,}17$ mA
c. Erreur relative = 2,8 %

30 **a.** $\Delta V_{\text{réel}} = 23{,}5$ V **b.** $\Delta V_{\text{mes}} = 22{,}6$ V
c. Erreur relative = 4 %

31 Erreur relative = 0,5 %

32 $i_{\mathcal{E}_1} = 38$ mA, de la borne + à la borne –
$i_{\mathcal{E}_2} = 55$ mA, de la borne – à la borne +
$i_{\mathcal{E}_3} = 16$ mA, de la borne + à la borne –

33 $i = 429$ A

34 **a.** $i = 0{,}714$ mA, vers la gauche
b. $V_b - V_a = 1{,}04$ V

35 **a.** $i_{\mathcal{E}_1} = 0{,}500$ A, vers le haut
$i_{\mathcal{E}_2} = 0{,}500$ A, vers le bas
$i_{\mathcal{E}_3} = 0{,}000$ A
b. $\Delta V_1 = 5{,}50$ V; $\Delta V_2 = 2{,}50$ V; $\Delta V_3 = 4{,}00$ V

36 **a.** $i_2 = 933$ µA, vers le bas
b. $R_3 = 2{,}00$ kΩ **c.** $R_1 = 252$ Ω

37 **a.** $i_3 = 6{,}70$ mA **b.** $V_b - V_c = 8{,}00$ V
c. $V_b - V_d = -4{,}00$ V **d.** $V_b - V_f = 3{,}00$ V

38 La résistance ne surchauffe pas, car $P_{R_1} = 0{,}401$ W $< 0{,}500$ W.

39 **a.** $P_{\mathcal{E}_1} = 1{,}73$ mW, la pile absorbe de l'énergie.
b. $i = 959$ µA **c.** $V_b - V_a = -6{,}59$ V

40 L'intensité initiale est élevée. Ensuite, l'intensité diminue graduellement jusqu'à ce qu'elle atteigne zéro.

41 **a.** $\tau_{(ii)} < \tau_{(i)} < \tau_{(iii)}$
b. Les charges maximales sont toutes égales, car $Q_m = C\mathcal{E}$.
c. $i_{m,(iii)} < i_{m,(i)} < i_{m,(ii)}$

42 **a.** $\tau_{(ii)} = \tau_{(iv)} < \tau_{(i)} = \tau_{(iii)}$
b. $R_{(ii)} = R_{(iv)} < R_{(i)} = R_{(iii)}$
c. $i_{m,(iii)} < i_{(i)} = i_{m,(iv)} < i_{m,(ii)}$

44 **a.** $\Delta V_C = 75{,}9$ V
b. $\Delta V_R = 44{,}1$ V
c. $U_E = 0{,}056$ J

45 $t = 19$ ms

46 **a.** $t = 41{,}6$ ms **b.** $t = 20{,}8$ ms

47 **a.** $\tau = 3{,}75$ s **b.** $Q_m = 775$ µC **c.** $i = 54{,}4$ µA

48 **a.** $t_{1/2} = RC \ln 2$
b. Le graphique est une droite, dont la pente est $C \ln 2$ et l'ordonnée à l'origine, zéro.

49 **a.** $Q = 10{,}2$ µC **b.** $i_2 = 357$ µA **c.** $t = 48{,}7$ ms

50 **a.** $i = 17{,}3$ mA **b.** $Q = 130{,}0$ µC

51 **a.** $i_1 = 110$ mA et $i_2 = i_3 = 54{,}8$ mA
b. $i_1 = i_2 = 82{,}2$ mA et $i_3 = 0{,}00$ mA

52 **a.** $U_C = \dfrac{Q_m^2}{2C} = \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$
b. $U_\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$
c. $U_R = \displaystyle\int_0^\infty P_R \, dt = R \int_0^\infty i^2 \, dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$

53 **a.** $Q_m = 16{,}8$ µC **b.** L'armature inférieure
c. $\tau = 97{,}8$ ms

CHAPITRE 8

1 **a.** $d\vec{\ell} = dy\,\vec{j}$ **b.** $\vec{u}_r = \dfrac{-y\vec{j} + d\vec{k}}{\sqrt{y^2 + d^2}}$
c. $d\vec{\ell} \times \vec{u}_r = \dfrac{d\,dy\,\vec{i}}{\sqrt{y^2 + d^2}}$
d. $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 id}{4\pi}\vec{i} \displaystyle\int_0^L \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}$

2 **a.** $\vec{R} = 7{,}0\vec{k}$ **b.** $\vec{R} = -5{,}0\vec{i} - 22\vec{j} - 4{,}0\vec{k}$
c. $\vec{R} = 2{,}0\vec{i} - 5{,}0\vec{j} + 6{,}0\vec{k}$ **d.** $\vec{R} = \vec{0}$

3 $\vec{B} = 8{,}3 \times 10^{-6}\,\text{T}\,\vec{i}$

4 $\vec{B} = 6{,}49 \times 10^{-6}\,\text{T}$ entrant dans la page

6 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ sortant de la page

7 $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 i}{4\pi R}(4 + \pi)\,\vec{i}$

8 $\vec{B} = -1{,}43 \times 10^{-6}\,\text{T}\,\vec{i}$

9 $i = 0{,}815$ A; en sens horaire

10 $B_{\mathcal{P}_1} < B_{\mathcal{P}_3} < B_{\mathcal{P}_2}$

11 $B_{\mathcal{P}_3} < B_{\mathcal{P}_2} < B_{\mathcal{P}_1}$

12 À $y = 4{,}7$ cm

13 À 4,5 cm à gauche du fil 1

14 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 id}{2\pi\left(R^2 + \dfrac{d^2}{4}\right)}\vec{j}$

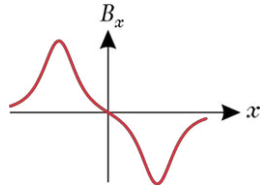
15 $\vec{B} = 1{,}50 \times 10^{-5}\,\text{T}\,\vec{j}$

16 **a.** $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 iy}{\pi\left(y^2 + d^2\right)}\vec{k}$
b. $y = \pm d$
c. $B_{\max} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$

17 $\vec{B} = (-4{,}00\vec{i} - 0{,}48\vec{j} + 5{,}76\vec{k}) \times 10^{-6}\,\text{T}$

18 **a.** $\vec{\mu}_{(i)}$ vers le bas; $\vec{\mu}_{(ii)}$ vers le haut; $\vec{\mu}_{(iii)}$ vers le haut; $\vec{\mu}_{(iv)}$ vers le bas
b. $\vec{F}_{(i)}$ vers le haut; $\vec{F}_{(ii)}$ vers le bas; $\vec{F}_{(iii)}$ vers le haut; $\vec{F}_{(iv)}$ vers le bas

19



20 a. $\vec{\mu} = -4{,}1\ \text{A} \cdot \text{m}^2\,\vec{k}$
b. $\vec{B} = -4{,}8 \times 10^{-7}\ \text{T}\,\vec{k}$

21 a. $\mu = 0{,}022\ \text{A} \cdot \text{m}^2$ b. $i = 71\ \text{A}$

22 $\vec{B} = -1{,}45 \times 10^{-6}\ \text{T}\,\vec{\imath}$

23 a. $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 NiR^2}{2}\left\{\dfrac{1}{\left[R^2 + y^2\right]^{3/2}} + \dfrac{1}{\left[R^2 + (s-y)^2\right]^{3/2}}\right\}\vec{j}$

24 (iii) < (ii) < (i)

25 (i) < (iii) < (ii) = (iv)

26 (iv) < (i) < (ii) = (iii)

27 a. $\displaystyle\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0{,}000\ \text{T} \cdot \text{m}$

b. $\displaystyle\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0{,}045\ \text{T} \cdot \text{m}$

c. $\displaystyle\int_c^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = -0{,}045\ \text{T} \cdot \text{m}$

d. $\displaystyle\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0{,}000\ \text{T} \cdot \text{m}$

28 $i = 2{,}50\ \text{A}$

29 a. $B = 31{,}8\ \mu\text{T}$ b. $B = 50{,}0\ \mu\text{T}$

30 a. $B = \dfrac{\mu_0 ir}{2\pi a^2}$ b. $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$
c. $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\left[1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right]$ d. $B = 0$

31 a. $B = 53{,}3\ \mu\text{T}$ b. $B = 60{,}0\ \mu\text{T}$
c. $B = 6{,}15\ \mu\text{T}$ d. $B = 0{,}0\ \mu\text{T}$

33 $B = 20{,}6\ \mu\text{T}$

34 a. $B = \dfrac{\mu_0 i_0 r^2}{3R^3}$ b. $B = \dfrac{\mu_0 i_0}{3r}$

35 $B_1 = B_2 < B_4 < B_3$

36 $i = 8{,}19\ \text{A}$

37 $\ell = 600\ \text{m}$

38 a. $R = 2{,}05\ \Omega$ b. $B = 5{,}42\ \text{mT}$

39 a. $\vec{B} = (400\vec{j} + 368\vec{k})\ \mu\text{T}$
b. $\vec{B} = -26{,}7\ \mu\text{T}\,\vec{\imath}$

40 a. $\vec{B} = 62{,}4\ \text{mT}\,\vec{k}$ b. $\vec{B} = 31{,}4\ \text{mT}\,\vec{k}$
c. $\vec{B} = 199\ \mu\text{T}\,\vec{k}$

CHAPITRE 9

1 $F_{(i)} = F_{(iv)}$ (forces nulles) < $F_{(ii)} = F_{(iii)} < F_{(v)}$

2 a. Non, la force doit entrer dans la page.
b. Non, la force doit être perpendiculaire à la vitesse.
c. Oui, la force a la bonne orientation.

3 q_1 est négative, et q_2 est positive.

4 $\vec{F}_m = (18{,}3\vec{\imath} + 8{,}68\vec{j}) \times 10^{-16}\ \text{N}$

5 $\vec{B} = 2{,}3\vec{k}\ \text{T}$

6 a. $\vec{F}_m = 2{,}13 \times 10^{-15}\ \text{N}$ à 20° au sud de l'ouest
b. $\vec{a} = 1{,}28 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$ à 20° au sud de l'ouest

7 a. $v = 1{,}19 \times 10^8\ \text{m/s}$
b. $\vec{a} = 2{,}63 \times 10^{18}\ \text{m/s}^2$ vers le bas

8 a. $v = 6{,}23 \times 10^5\ \text{m/s}$ b. Vers l'ouest

9 a. $\vec{B} = (-1{,}64\vec{j} - 4{,}38\vec{k})\ \mu\text{T}$
b. $\vec{F} = 7{,}90 \times 10^{-19}\ \text{N}\,\vec{\imath}$

10 a. $\vec{B}_1$ est entrant, et $\vec{B}_2$ est sortant.
b. La région 2, car le rayon de courbure est plus petit.

11 a. Les ions 3 et 4 b. $m_4 < m_1 < m_2 < m_3$

12 $B = 492\ \mu\text{T}$

13 a. $T = 2{,}92 \times 10^{-7}\ \text{s}$ b. $F_m = 5{,}56 \times 10^{-14}\ \text{N}$
c. $B = 0{,}224\ \text{T}$

14 a. $v = 8{,}8 \times 10^6\ \text{m/s}$ b. $v = 1{,}8 \times 10^7\ \text{m/s}$

15 a. Le faisceau est dévié vers l'est. b. $a = 6{,}3 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$
c. $r = 0{,}67\ \text{m}$

16 a. $T = 2{,}38 \times 10^{-10}\ \text{s}$ b. $p = 1{,}83\ \text{mm}$
c. $r = 1{,}09\ \text{mm}$

17 $\Delta t = 1{,}1\ \mu\text{s}$

18 a. $\phi = 71°$ b. $p = 0{,}59\ \text{m}$ c. $r = 0{,}27\ \text{m}$

19 a. $\vec{B}$ orienté selon $\vec{k}$
b. $\vec{B}$ orienté selon $-\vec{j}$
c. $\vec{B}$ orienté selon $\vec{\imath}$

20 a. (ii), car $\vec{F}_{\text{rés}} = \vec{0}$
b. (iii), car $F_m > F_e$
c. (i), car $F_m < F_e$

21 $v = 5{,}27 \times 10^5\ \text{m/s}$

22 a. $f = 2{,}1 \times 10^6\ \text{Hz}$ b. $v = 3{,}4 \times 10^6\ \text{m/s}$

24 $M = 33{,}97\ \text{u}$

25 a. $V_a > V_b$ b. $V_c > V_d$ c. $V_e > V_f$ d. $V_h > V_g$

26 Entre a et c

27 B = 0,76 T

28 a. $\Delta V_H = 0{,}11\ \mu\text{V}$ b. $v_d = 18\ \mu\text{m/s}$
c. $E_H = 13\ \mu\text{V/m}$

29 $\vec{v} = -1{,}22\ \text{m/s}\,\vec{j}$

30 a. $B_1 = 8{,}94\ \text{mT}$ b. $B_2 = 20{,}6\ \text{mT}$

31 La force magnétique est vers la gauche.

32 Le courant doit être vers la droite.

33 $F_{(i),x} < F_{(iii),x} < F_{(ii),x} < F_{(iv),x}$

34 $F/\ell = 8{,}33 \times 10^{-6}\ \text{N/m}$

35 a. $i = 7{,}50\ \text{A}$
b. Les sens des courants sont opposés.

36 $\vec{\mathbf{F}} = 60{,}0 \text{ mN}$ vers la gauche

37 $m = 102 \text{ mg}$

38 $\vec{\mathbf{B}} = 30{,}4 \text{ mT}$ sortant de la page

39 $\vec{\mathbf{F}} = (-2{,}52\vec{\imath} + 4{,}36\vec{\jmath} + 20{,}5\vec{k}) \text{ mN}$

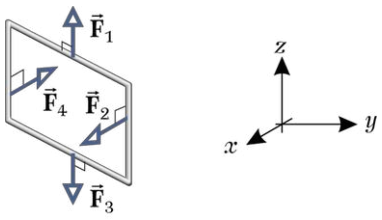
40 $\vec{\mathbf{F}} = (7{,}48\vec{\jmath} + 25{,}9\vec{k}) \times 10^{-6} \text{ N}$

41 $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\mu_0 i_1 i_2 \ell b}{2\pi a\,(a+b)}$ vers le fil

42 $\vec{\mathbf{B}} = 369 \text{ µT}\,\vec{k}$

43 **a.** (i) en sens horaire et (ii) en sens antihoraire
b. $\Delta U < 0$ dans chaque situation

44 **a.**



b. $\vec{\mathbf{F}}_1 = 0{,}13 \text{ N}\,\vec{k}$; $\vec{\mathbf{F}}_2 = 0{,}20 \text{ N}\,\vec{\imath}$;
$\vec{\mathbf{F}}_3 = -0{,}13 \text{ N}\,\vec{k}$; $\vec{\mathbf{F}}_4 = -0{,}20 \text{ N}\,\vec{\imath}$
c. Les forces $\vec{\mathbf{F}}_2$ et $\vec{\mathbf{F}}_4$ peuvent faire tourner le cadre dans le sens horaire. Les forces $\vec{\mathbf{F}}_1$ et $\vec{\mathbf{F}}_3$ ne peuvent pas faire tourner le cadre.
d. $\tau = 0{,}015 \text{ N} \cdot \text{m}$

45 **a.** $\vec{\boldsymbol{\mu}} = (-0{,}20\vec{\imath} + 0{,}35\vec{\jmath}) \text{ A} \cdot \text{m}^2$
b. $\vec{\boldsymbol{\tau}} = -0{,}10 \text{ N} \cdot \text{m}\,\vec{k}$
c. Dans le sens horaire, selon une vue en plongée

46 $K_{\max} = 0{,}03 \text{ J}$

47 $W_{\text{ext}} = 1{,}77 \times 10^{-5} \text{ J}$

48 $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 1{,}35 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$ horaire

49 $\vec{\mathbf{F}}_{1 \leftarrow 2} = \dfrac{-3\mu_0 \mu_1 \mu_2}{2\pi z^4}\,\vec{k}$

50 $\vec{\mathbf{F}} = -1{,}76 \times 10^{-4} \text{ N}\,\vec{k}$

51 **a.** $L = \sqrt{12}\hbar$ **b.** $L_z = 3\hbar$ **c.** $\mu_{\text{orb},z} = -3\mu_{\text{B}}$

52 **a.** $\mu_{\text{orb},z} = 2\mu_{\text{B}} = 1{,}85 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
b. $\mu_{\text{s},z} = -\mu_{\text{B}} = -9{,}27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

53 $B = 1{,}34 \times 10^5 \text{ T}$

54 **a.** $m_\ell = -2$ **b.** $U_{\max} = 1{,}39 \times 10^{-4} \text{ eV}$
c. $m_\ell = +2$ **d.** $U_{\min} = -1{,}39 \times 10^{-4} \text{ eV}$
e. $E_{\text{abs}} = 6{,}95 \times 10^{-5} \text{ eV}$

CHAPITRE 10

1 Les situations (i), (ii) et (v)

2 $\Phi_b < \Phi_a < \Phi_c$

3 $\Phi_a = \Phi_b = \Phi_c$

4 $\Phi_B = 0{,}012\,0 \text{ Wb}$

5 $\Phi_B = 6{,}72 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

6 $i = 1{,}72 \text{ A}$

7 $\Phi_B = \dfrac{25{,}0a^2 b}{2}$

8 $|\mathcal{E}| = 1{,}57 \text{ V}$

9 $|\mathcal{E}| = 0{,}030 \text{ V}$

10 **a.** $|\mathcal{E}| = 0{,}75 \text{ V}$ **b.** $|\mathcal{E}| = 0{,}00 \text{ V}$ **c.** $|\mathcal{E}| = 0{,}38 \text{ V}$

11 **a.** $|\mathcal{E}| = 4{,}21 \text{ mV}$ **b.** $i_{\text{ind}} = 3{,}76 \text{ mA}$

12 $i_{\text{ind}} = 9{,}03 \text{ mA}$

13 **a.** $|\mathcal{E}| = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\dfrac{d+h}{d}\right) \left|\dfrac{\text{d}i_{\text{fil}}}{\text{d}t}\right|$
b. $i = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(\dfrac{d+h}{d}\right) \omega i_{\text{m}} \cos(\omega t)$

14 $i = 2{,}0 \times 10^{-9} \text{ A}$

15 **a.** $\mathcal{E} = 13{,}9 \text{ mV}$ **b.** $R = 8{,}00\ \Omega$ **c.** $P = 24{,}2 \text{ µW}$

16 **a.** En sens horaire
b. En sens antihoraire
c. En sens antihoraire
d. En sens antihoraire

17 **a.** $\mathcal{E} = 2{,}54 \text{ mV}$
b. En sens antihoraire

18 **a.** $\mathcal{E} = 75 \text{ µV}$
b. En sens horaire

19 **a.** $i_{\text{ind}} = 57{,}0 \text{ mA}$
b. En sens antihoraire

20 **a.** $i_{\text{ind}} = 16{,}2 \text{ mA}$
b. En sens horaire

21 **a.** $\mathcal{E}_{\text{ind}} = 0{,}166 \text{ V}$
b. $i = 0{,}134 \text{ A}$
c. Vers la droite

22 Vers la gauche

23 **a.** En sens horaire
b. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{m}}$ vers le haut

24 **a.** Il n'y a pas de courant induit.
b. En sens antihoraire

25 $\mathcal{E} = 2{,}53 \text{ V}$

26 **a.** $\mathcal{E} = 0{,}522 \text{ V}$
b. $i = 3{,}48 \text{ mA}$

27 **a.** $i = 0{,}200 \text{ A}$ **b.** En sens antihoraire
c. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 74{,}8 \text{ mN}$, vers la gauche **d.** $P_{\text{ext}} = 0{,}389 \text{ W}$
e. $P_R = 0{,}389 \text{ W}$

28 **a.** $\mathcal{E} = 45{,}0 \text{ µV}$
b. $\vec{\mathbf{E}} = 1{,}80 \times 10^{-5} \text{ V/m}$ vers le bas

c. $i = 3{,}75$ µA, en sens antihoraire
d. $\vec{\mathbf{F}}_m = 5{,}63 \times 10^{-10}$ N vers la gauche

29 a. $i = \dfrac{2Bv^2t}{R}$ b. $i_{max} = \dfrac{\sqrt{2}cBv}{R}$

30 a. $i = 1{,}70$ mA, en sens antihoraire
b. $t = 0{,}127$ s et $t = 1{,}56$ s
c. $t = 0{,}844$ s
d. $i = 4{,}41$ mA, en sens horaire

31 a. $i_{ind} = \dfrac{\mu_0 iv}{2\pi R}\ln\left(\dfrac{d+\ell}{d}\right)$, en sens antihoraire

b. $P_R = \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{\mu_0 iv}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+\ell}{d}\right)\right]^2$

c. $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = \dfrac{v}{R}\left[\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+\ell}{d}\right)\right]^2$ vers la gauche

32 a. $i_{ind} = 56{,}8$ µA, en sens antihoraire
b. $P_R = 2{,}74 \times 10^{-9}$ W
c. $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = 5{,}49 \times 10^{-10}$ N vers la gauche

33 $i_{ind} = 92{,}4$ mA

34 $\mathcal{E}_m = 1{,}52$ V

35 a. $\mathcal{E} = 1018\sin(50\pi t)$ V
b. $\mathcal{E}_m = 1018$ V
c. $t = \left(\dfrac{4n+1}{100}\right)$ s, où $n = 0, 1, 2, \ldots$

36 $N = 8{,}0$ spires

37 $\mathcal{E}_m = 0{,}15$ mV

38 a. $\Phi_B = bhB + \dfrac{\pi r^2}{2}B\cos(2\pi ft)$

b. $i_{ind} = \left(\dfrac{\pi^2 r^2 Bf}{R}\right)\sin(2\pi ft)$

c. $\mathcal{E}_m = \pi^2 r^2 Bf$

d. $P_m = \dfrac{\pi^4 r^4 B^2 f^2}{R}$

39 parcours (i) < parcours (ii) = parcours (iii)

40 $E = 6{,}60 \times 10^{-6}$ V/m

41 a. $E = 23{,}6$ µV/m b. $E = 39{,}4$ µV/m

42 $\vec{\mathbf{B}}_1$ est sortant, et $\vec{\mathbf{B}}_2$ est entrant.

43 $B = 16{,}8$ µT

44 $\dfrac{dE}{dt} = 3{,}51 \times 10^{12}$ V/(m · s)

45 a. $E = 8{,}01 \times 10^5$ V/m b. $B = 4{,}42 \times 10^{-11}$ T

CHAPITRE 11

1 a. $\mathcal{E}_1 = 0{,}129$ V b. $i_{ind} = 103$ mA

2 $M = 12{,}8$ mH

3 a. $M = 1{,}47$ µH b. $\mathcal{E} = 2{,}24$ mV
c. $i = 4{,}07$ mA d. Dans le sens horaire

4 a. $M = \mu_0 nN\pi r_{sol}^2$

b. $|\mathcal{E}_{sol}| = \mu_0 nN\pi r_{sol}^2 \dfrac{di}{dt}$

5 a. $M = 1{,}18$ mH
b. $|\mathcal{E}_{sol}| = 47{,}4$ mV

6 $L_4 < L_2 < L_1 = L_5 < L_3$

7 a. Le courant augmente ;
b. le courant diminue ;
c. le courant est constant.

8 $t_1 < t_2 = t_5 < t_3 = t_4$

9 $|\mathcal{E}_L| = 1{,}05$ V

10 a. $|\mathcal{E}_L| = 0{,}720$ V
b. La borne de droite

11 $L/\ell = 302$ µH/m

12 a. $\Phi_B = 1{,}37$ µWb
b. $L = 20{,}6$ µH

13 $\mathcal{E}_L = 36{,}9$ V

14 a. $L_{éq} = L_1 + L_2$

b. $L_{éq} = \left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right)^{-1}$

15 a. $L_{éq} = L_1 + L_2 - M$
b. $L_{éq} = L_1 + L_2 + M$

16 a. $B = \dfrac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$

b. $\Phi_B = \dfrac{\mu_0 Nih}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

17 $i_{(i)} < i_{(iii)} < i_{(ii)}$

18 $i_{(i)} < i_{(iii)} < i_{(ii)}$

19 a. $\tau_{(i)} = \tau_{(iii)} < \tau_{(ii)} = \tau_{(iv)}$
b. $L_{(i)} = L_{(iii)} < L_{(ii)} = L_{(iv)}$
c. $\mathcal{E}_{(iii)} = \mathcal{E}_{(iv)} < \mathcal{E}_{(i)} = \mathcal{E}_{(ii)}$

20 $t = 1{,}11$ ms

21 a. $\tau = 495$ µs b. pour $t \to \infty$
c. $i_m = 90{,}9$ mA d. $P_L = 18{,}9$ mW

22 a. $t = 2{,}12$ ms b. $\Delta V_L = 6{,}36$ V
c. $P_R = 0{,}963$ W

23 a. 143 mA b. 215 mA

24 a. $i_1 = i_2 = i_4 = 160$ mA ; $i_3 = 0$ mA
b. $i_1 = 274$ mA ; $i_2 = i_4 = 103$ mA ; $i_3 = 171$ mA
c. $i_1 = 0{,}0$ mA ; $i_2 = i_3 = i_4 = 171$ mA
d. $\mathcal{E}_L = 27{,}4$ V

25 a. $R = 2{,}55\ \Omega$ b. $L = 3{,}83$ mH
c. $\tau = 970$ µs d. $i = 0{,}977$ A

28 $U_3 < U_1 < U_2$

29 $L = 0{,}749$ H

30 **a.** $i = 82{,}5$ mA **b.** $U_L = 3{,}75$ mJ
c. $P_R = 3{,}20$ W **d.** $P_{\mathcal{E}} = 4{,}13$ W

31 **a.** $U_L = 42{,}2$ mJ **b.** $t = 5{,}20$ ms **c.** $P_L = 2{,}81$ W

32 **a.** $U_L = 767$ µJ
b. $B = 1{,}23$ mT
c. $u_B = 0{,}598$ J/m^3

33 **a.** $u_B = \dfrac{\mu_0 i^2}{2\pi^2 d^2}$ **b.** $u_E = \dfrac{8\epsilon_0 \rho^2 i^2}{\pi^2 d^4}$

34 $u = 0{,}347$ J/m^3

35 **a.** $\omega = 1{,}08 \times 10^3$ rad/s **b.** $i_m = 2{,}29$ A

36 **a.** $T = 6{,}00$ ms **b.** $L = 0{,}192$ H
c. $U_{Lm} = 72{,}8$ µJ

37 **a.** $\omega = 159$ rad/s **b.** $U_L = 6{,}04$ µJ
c. $U_{C_1} = 11{,}0$ µJ et $U_{C_2} = 4{,}59$ µJ
d. $E_{méc} = 21{,}6$ µJ ; elle est conservée.

38 **a.** $t = 318$ µs
b. $P_L = 61{,}2 \sin(4{,}45 \times 10^3 t)$ W

39 Régime critique : (ii) et (iii)
Régime surcritique : (i) et (v)

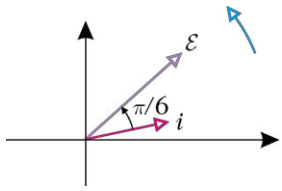
40 **a.** $\omega_a = 685$ rad/s
b. $Q = -20{,}1$ µC
c. amplitude = 35,4 µC

41 $i(t) = Q_m e^{-Rt/(2L)} \left[\dfrac{R}{2L} \cos(\omega_a t) + \omega_a \sin(\omega_a t) \right]$

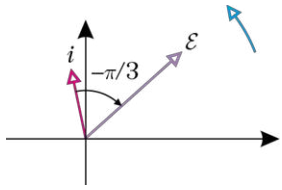
CHAPITRE 12

1 **a.** $\phi = \pi$ rad **b.** $\phi = \pi/2$ rad **c.** $\phi = 0$ rad
d. $\phi = -\pi/2$ rad

2 **a.**



b.



3 **a.** $f = 40$ Hz **b.** $\mathcal{E}_m = 30$ V
c. $\mathcal{E} = 30 \text{ V} \sin(80\pi t)$

4 L'amplitude du courant ne change pas, car celle-ci ne dépend pas de la fréquence.

5 $i_{(i)} < i_{(iii)} < i_{(ii)}$

6 **a.** $i_{Rm} = 176$ mA **b.** $f = 55{,}7$ Hz
c. $i_R = -61{,}9$ mA **d.** $\mathcal{E}_m = 12{,}0$ V

7 $i_{1m} = 91{,}2$ mA, $i_{2m} = 36{,}3$ mA et $i_{3m} = 54{,}8$ mA

8 $i_{(i)} < i_{(iii)} < i_{(ii)}$

9 $f/f_0 = 1/2$

10 X_C devient deux fois plus grande.

11 **a.** $X_C = 21{,}2\ \Omega$ **b.** $i_m = 0{,}349$ A
c. $\phi_C = -\pi/2$ rad

12 **a.** $X_C = 2{,}44$ kΩ **b.** $i_{Cm} = 15{,}4$ mA
c. $i_C = -10{,}7$ mA **d.** $\mathcal{E} = 0{,}0$ V

13 **a.** $C_2 = 124$ nF **b.** $Q_2 = 1{,}79$ µC **c.** $i_C = 400$ µA

14 **a.** $X_C = 585\ \Omega$ **b.** $C_{éq} = 3{,}47$ µF **c.** $f = 78{,}3$ Hz

15 $\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{0m} = 2$

16 **a.** $i_m = 0{,}102$ A **b.** $f = 3{,}67$ kHz

17 **a.** $X_L = 21{,}2\ \Omega$ **b.** $i_{Lm} = 80{,}1$ mA
c. $i_L = -70{,}2$ mA **d.** $\mathcal{E} = 0{,}00$ V

18 **a.** $L = 24{,}99$ mH **b.** $X_L = 10{,}68\ \Omega$
c. $i_m = 0{,}4214$ A **d.** $i = 0{,}1794$ A

19 **a.** $i_L = -84{,}4$ mA
b. $\Delta V_L = 11{,}6$ V

20 *a* : une résistance, *b* : une bobine d'induction, *c* : un condensateur

21 (i), (iii), (v), car dans le graphique, $\phi < 0$.

22 **a.** Le courant est en retard.
b. Le circuit est plutôt inductif.
c. $\Delta V_{Lm} > \Delta V_{Cm}$

23 $C = 1{,}4$ µF

24 **a.** $f = f_0 = 87{,}6$ Hz
b. $i_m = i_{max} = 3{,}78$ A
c. $\Delta V_{Rm} = 170$ V, $\Delta V_{Lm} = \Delta V_{Cm} = 312$ V

25 **a.** $Z = 332\ \Omega$
b. $\phi = 0{,}160$ rad = 9,17°
c. Le circuit est plutôt inductif.
d. $\Delta V_{Rm} = 11{,}9$ V, $\Delta V_{Lm} = 6{,}99$ V et $\Delta V_{Cm} = 5{,}07$ V

26 **a.** $i_m = 78{,}3$ mA **b.** $\Delta V_{Lm} = 2{,}91$ V

27 $f = 39$ Hz

28 **a.** $i = 0{,}899$ A
b. $\Delta V_R = 108$ V, $\Delta V_L = -10{,}3$ V, $\Delta V_C = 72{,}3$ V

29 **a.** $Z = 400\ \Omega$ **b.** $\Delta V_{Rm} = 14{,}5$ V
c. $R = 388\ \Omega$ **d.** $L = 27{,}5$ mH

30 **a.** $i_m = 0{,}120$ A **b.** $i_m = 0{,}200$ A

31 **a.** $\omega_0 = 408$ rad/s
b. $\omega_1 = 314$ rad/s, $\omega_2 = 531$ rad/s
c. $\Delta\omega/\omega_0 = 0{,}530$

32 $P_{moy} = 0{,}258$ W

33 **a.** $C = 176$ µF **b.** $\cos\phi = 1{,}00$
c. $P_{moy} = 22{,}9$ W

34 **a.** $Z = 43{,}0\ \Omega$ **b.** $\phi = 0{,}620$ rad
c. $i_{eff} = 2{,}79$ A **d.** $P_{moy} = 272$ W

35 **a.** $Z = 51{,}5\ \Omega$ **b.** $P_{moy} = 198$ W

36 **a.** $R = 144\ \Omega$ **b.** $L = 1{,}15$ H

37 **a.** $P_{moy} = 1{,}08$ kW **b.** $Z = 10{,}9\ \Omega$ **c.** $L = 16{,}8$ mH
d. $C = 420$ µF **e.** $P_{moy,max} = 1{,}32$ kW

38 **a.** $Z = 194\ \Omega$
b. $i = 81{,}4\text{ mA}\sin(500t + 0{,}384)$
c. $P_{moy} = 0{,}596$ W

39 **a.** $Z = 14{,}5\ \Omega$ **b.** $\cos(\phi) = 0{,}697$
c. $P_{moy} = 38{,}3$ W **d.** En retard, car $\phi > 0$
e. Non car $\phi > 0$ **f.** Oui, car $\phi > 0$
g. Oui, car $\cos\phi \neq 0$

40 **a.** $R_1/R_2 = \ell_1/\ell_2 = 3$
b. $i_{1,eff}/i_{2,eff} = \mathcal{E}_{2,eff}/\mathcal{E}_{1,eff} = 1/2$
c. $P_{R_1}/P_{R_2} = 3/4$

41 **a.** $R_{app} = 20{,}0\ \Omega$ **b.** $N_p/N_s = 20{,}0$
c. $i_{p,eff} = 15{,}0$ mA

42 $N_p/N_s = 12$

43 **a.** $\mathcal{E}_{s,eff} = 5{,}00$ kV **b.** $i_{s,eff} = 0{,}185$ A
c. $R_{éq} = 15{,}6\ \Omega$

44 $P_{moy} = 6{,}05$ kW

45 **a.** $i_{p,eff} = 0{,}244$ A **b.** $\Delta V_{1,eff} = 14{,}6$ V
c. $\Delta V_{2,eff} = 17{,}6$ V

Crédits

Page couverture : Carl Johnson

Chapitre 1 : p. 3 : René Lafrance ; **p. 4 :** EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 5 :** S_E/Shutterstock.com ; **p. 15 :** Wikipedia Commons.

Chapitre 2 : p. 33 : Narchuk/Shutterstock.com ; **p. 34 :** Michael Faraday by Thomas Phillips. National Portrait Gallery/Wikipedia Commons.

Chapitre 3 : p. 81 : PETER MENZEL/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 82 :** Wolfgang Volk ; **p. 94 :** Carl Friedrich Gauss by G. Biermann. Photo A. Wittmann/Wikipedia Commons.

Chapitre 4 : p. 119 : John Lund/Getty Images ; **p. 126 :** Dr. Manuel/Wikipedia Commons ; **p. 146 :** Nitromethane/Wikipedia Commons ; **p. 149 :** ADAM HART-DAVIS/SCIENCE PHOTO LIBRARY.

Chapitre 5 : p. 163 : © LesCunliffe/Dreamstime.com ; **p. 164 :** Wikipedia Commons.

Chapitre 6 : p. 189 : lenetstan/Shutterstock.com ; **p. 203 :** Rama/Wikimedia Commons ; **p. 205 :** SHEILA TERRY/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 208 :** René Lafrance.

Chapitre 7 : p. 219 : Don Farrall/Getty Images ; **p. 221 :** Rama/Wikimedia Commons ; **p. 228 :** René Lafrance.

Chapitre 8 : p. 253 : Maximilien Brice, CERN ; **p. 254 :** Martinonline/Wikipedia Commons ; **p. 257 :** imagedb.com/Shutterstock.com ; **p. 258 :** Gary A. Glatzmaier (University of California, Santa Cruz) and Paul H. Roberts (University of California, Los Angeles) ; NGDC ; SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 272 :** SHEILA TERRY/SCIENCE PHOTO LIBRARY.

Chapitre 9 : p. 293 : United States Air Force photo by Senior Airman Joshua Strang ; **p. 297 :** LAWRENCE BERKELEY LABORATORY/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 301 :** NASA/Van Allen Probes/Goddard Space Flight Center ; NASA/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 306 :** © 2008 CERN, for the benefit of the CMS Collaboration ; **p. 325 :** © 1992 Richard Megna – Fundamental Photographs ; **p. 326 :** Splarka/Wikipedia Commons ; Saperaud/Wikipedia Commons.

Chapitre 10 : p. 337 : Hydro-Québec ; **p. 338 :** © Thomas Jenkins/Dreamstime.com ; **p. 364 :** Fonollosa/Iberfoto/The Image Works.

Chapitre 11 : p. 375 : © Rainfall/Dreamstime.com ; **p. 381 :** © BigJoker/iStockphoto.

Chapitre 12 : p. 407 : Scott Rothstein/Shutterstock.com ; **p. 430 :** René Lafrance ; **p. 433 :** © Nickondr/iStockphoto.

Index

A

Aimant, 255-257, 325, 326
  pôles, 255
  temporaire, 256
Alpha, particule, 77 (E52)
Alphabet grec, 452
Ampère
  boucle d', 274
  théorème d', 274
  théorème d'_-Maxwell, 359-362, 364
Ampère (unité), 191
Ampère, André-Marie, 191, 254, 272
Ampèremètre, 233
Amplitude, 393
  de la charge dans un circuit *RLC*, 396
  de la f.é.m., 408
  du courant, 409
    circuit *RLC*, 420
    dans un condensateur, 415
    dans une bobine d'induction, 418
    dans une résistance, 411, 412
Angström, 445, 447
Année lumière, 447
Annihilation, 9
Antiparticule, 9
Arc électrique, 146
Armatures d'un condensateur, 164
Atome, 7
Aurore polaire, 301
Auto-induction, 379-381
  f.é.m., 380-381

B

Balance de torsion, 2
Batterie, 150
Biot, Jean-Baptiste, 260
Biot-Savart, loi de, 260-264
Bloc d'alimentation, 433
Bobine
  d'Helmholtz, 287 (P23)
  d'induction, 379
    amplitude du courant, 418
    circuit *LC*, 391-395
    circuit *RL*, 382-385
    circuit *RLC*, 395-396, 419-425
    constante de phase, 417, 418
    dans un circuit à courant alternatif, 416-418
    réactance inductive, 418
    symbole, 379
  énergie dans une, 388
  hélicoïdale, *voir* Solénoïde
  inductance, 379
  inductance mutuelle, 377
  toroïdale, 277, 278
Bohr
  magnéton, 322
  modèle de, 28 (E16), 77 (E53), 157 (P33)
Bohr, Niels, 77 (E53), 322
Boucle d'Ampère, 274
Bougie d'allumage, 381
Bouteille
  de Leyde, 2
  magnétique, 300, 301
Branche, 220

C

Cage de Faraday, 83, 104
Capacité d'un condensateur, 164
  avec diélectrique, 170
  cylindrique, 168
  équivalente
    en parallèle, 174
    en série, 176
  plan, 167
  sphérique, 169
  unité, 164
Capteur à effet Hall, 309
Ceintures de radiation de Van Allen, 301
Cellule photovoltaïque, 150
Cérès, 82
Champ électrique
  à partir du potentiel, 142
  constant, 35
  d'un anneau, 53
  d'un cylindre infini, 98
  d'un dipôle, 43, 159 (P50)
  d'un disque, 54
  d'un plan infini, 57, 100
  d'une charge ponctuelle, 37
  d'une distribution continue, 48
  d'une sphère, 95, 96
  de plaques parallèles, 58, 106
  définition, 34-35
  densité d'énergie, 173
  disruptif, 146
  et champ magnétique, 356
  et conduction, 195-199
  et différence de potentiel, 126
  et énergie potentielle, 121
  et potentiel électrique, 129
  flux du, 87-90
  force électrique, 36
  induit, 356-357
  principe de superposition, 39
  rigidité diélectrique, 170
  tableau du module, 35
  uniforme, 35, 57
    et énergie potentielle, 122
  unité du, 35, 126, 127
Champ magnétique
  d'un barreau aimanté, 257, 270
  d'un dipôle, 269
  d'un fil, 258, 263-265
  d'un solénoïde
    idéal, 280
    points éloignés, 270
    points sur l'axe, 282
  d'une boucle de courant, 267-269
  et champ électrique, 362
  et flux électrique, 362
  force magnétique, 294-295, 311-314
  induit, 362
  terrestre, 257
  unité du, 260

Champs croisés, 302
Charge
  densité de, 44
  distribution continue, 44-49
  élémentaire, 7
  libre, 108
  liée, 108
  linéique, 44
  nette, 8
  ponctuelle, 37
    champ électrique, 37
    dans un champ électrique, 62-67
    dans un champ magnétique, 297-301
    lignes de champ électrique, 60
    potentiel électrique, 131-134
  porteur de, 191
  principe de conservation de la, 8
  propriétés, 7-10
  quantification de la, 7
  surfacique, 44
  test, 35
  unité de, 7
  volumique, 44, 45
Circuit
  en courant alternatif, 408-411
  en courant continu, 220-241
  LC, 391-395
    énergie dans le, 394
  RC, 237-241
  redresseur, 433-434
  RL, 382-385
  RLC
    en courant alternatif, 419-425
    en courant continu, 395-396
Circulation, 273
Coefficient thermique de résistivité, 201
  tableau, 199, 448
Compteur de Geiger-Müller, 155 (P14)
Condensateur, 164
  amplitude du courant, 415
  armatures, 164
  association de, 174-180
  avec diélectrique, 169-170
  capacité, 164
  charge d'un, 165
  circuit *LC*, 391-395
  circuit *RC*, 237-241
  circuit *RLC*
    en courant alternatif, 419-425
    en courant continu, 394-396
  constante de phase, 414, 415
  cylindrique, 167
  dans un bloc d'alimentation, 433
  dans un circuit à courant alternatif, 414-415
  différence de potentiel, 222
  en parallèle, 174
  en série, 175
  énergie emmagasinée dans, 171-173
  plan, 167
  réactance capacitive, 415
  sphérique, 169
  symbole, 174
Conducteur, 11
  courant dans, 203-205
  en équilibre électrostatique, 102-107, 144-147
  induction électrique, 12-13
Conduction, modèle, 195-199
Conductivité, 198
Constante
  de Coulomb, 16
  de Faraday, 27 (E3)
  de phase, 409
    circuit *RLC*, 422
    pour un condensateur, 414, 415
    pour une bobine d'induction, 417, 418
    pour une résistance, 411, 412
  diélectrique, 108, 169
    tableau, 108, 170
  électrique, 16, 167
  magnétique, 261, 380
Convention de la main droite, 269
Coulomb
  constante de, 16
  loi de, 15-24
Coulomb (unité), 7, 16
Coulomb, Charles Augustin de, 2, 15, 254
Courant de déplacement, 361
Courant électrique, 190-194
  alternatif, 408-411
  champ magnétique, 258, 259
  dans les conducteurs, 203-205
  de Foucault, 352
  définition, 190, 191
  densité de, 193
  diviseur de, 228
  efficace, 427
  et différence de potentiel, 204, 205
  force magnétique, 311-314
  induit, 340
  loi des nœuds, 192, 220
  sens du, 191
  unité, 191
Création de paires, 9
Curie, température de, 326
Cyclotron, 304, 305

D

Davy, Humphry, 338
Debye (unité), 42
Debye, Peter, 42
Déclinaison, 258
Défibrillateur cardiaque, 172-173
Densité
  d'énergie
    électrique, 173
    électromagnétique, 390
    magnétique, 389
  de charge, 44
  de courant, 193
  de porteurs de charge, 193
    expérimentale, 309
Déphasage, 409
Dérivée, 452
  partielle, 142
Développement en série, 451
Diamagnétisme, 326
  modèle du, 358
Diélectrique, 108
  constante, 108, 169
    tableau, 108, 170, 448
  dans un condensateur, 169-170
  permittivité, 109
  rigidité diélectrique, 170
Différence de potentiel, 125
  d'un condensateur, 222
  d'une charge ponctuelle, 132
  d'une résistance, 222

d'une source de f.é.m., 221
de Hall, 307
efficace, 427
et champ électrique, 126
et courant électrique, 204, 205
Diode, 209, 433
symbole, 433
Dipôle électrique, 15, 41
champ électrique, 43, 159 (P50)
dans un champ, 67-68
énergie potentielle, 152
induit, 41
lignes de champ, 60
moment de force sur, 68
moment dipolaire, 42
permanent, 42
Dipôle magnétique, 256
champ magnétique, 269
dans un champ magnétique, 315-320
non uniforme, 319
uniforme, 315
énergie potentielle, 317
force sur, 319
moment de force sur, 316
Dispositif
bobine d'induction, 379
condensateur, 164
diode, 209
non ohmique, 209
ohmique, 208
résistance, 208
Diviseur
de courant, 228
de tension, 228
Domaine magnétique, 325
Dopage, 202

E

Effet
à distance, 34
couronne, 146
de pointe, 146
Hall, 307-309
Joule, 212
photoélectrique, 127-128
Électron, 7
de conduction, 11
Électron-volt, 127
Électroscope, 13
Électrostatique, 35
Élément infinitésimal, 45
Énergie
cinétique, 121
dans les circuits *LC*, 394
densité
électrique, 173
électromagnétique, 390
magnétique, 389
mécanique, 121
conservation de l', 128
potentielle, 121
d'un atome dans un champ, 323
d'un dipôle électrique dans un champ, 152
d'un dipôle magnétique dans un champ, 317
dans un condensateur, 172
dans une bobine, 388
de charges ponctuelles, 135-136
électrique, 120
et potentiel électrique, 125
gravitationnelle, 122
pour un champ uniforme, 122
Équations de Maxwell, 363-365
Expérience
de Millikan, 77 (E54)

F

F.é.m. (force électromotrice), 150
d'auto-induction, 380-381
efficace, 427
en courant alternatif, 408
induite, 343
dans un conducteur en mouvement, 348-350
puissance, 211
source de, 150
unité de, 150
Facteur de puissance, 428
Facteur *g*, 322
Farad, 164
Faraday
cage de, 83, 104
constante de, 27 (E3)
loi de, 343, 356, 364
Faraday, Michael, 35, 164, 338, 339
Ferromagnétisme, 325
Flux électrique, 87-90
et lignes de champ, 87
Flux magnétique, 273, 340-341
Force
conservative, 121
de Lorentz, 301, 364
électrique, 7, 16, 17
et champ électrique, 36, 62
magnétique, 256
entre deux courants parallèles, 312
sur les fils, 311-314
sur un dipôle magnétique, 319
sur une charge en mouvement, 294-295
Foucault, courants de, 352
Franklin, Benjamin, 6, 254, 338
Frein magnétique, 353
Fréquence angulaire, 408
circuit *LC*, 393
circuit *RLC*, 396
de résonance, 424
Fresnel
représentation de, 410
bobine d'induction, 417
circuit *RLC*, 419
condensateur, 415
résistance, 412
vecteur de, *voir* vecteur tournant
Fresnel, Augustin, 410

G

Gauss
surface de, 92
théorème de, 94, 364
configurations cylindriques, 98
configurations planes, 100
configurations sphériques, 95, 96
dans la matière, 109
en magnétisme, 273, 364
Gauss (unité), 260
Gauss, Carl Friedrich, 83, 94
Geiger-Müller, compteur, 155 (P14)
Générateur, 150, 353-354

Générateur de Van de Graaff, 148-149
Gilbert, William, 254
Gradient, 142

H
Hall
  différence de potentiel, 307
  effet, 307-309
Hall, Edwin Herbert, 307
Heaviside, Oliver, 364
Henry (unité), 377, 379
Henry, Joseph, 340, 377, 379
Hertz, Heinrich, 365

I
Impédance, 420
Inclinaison, 257
Inductance, 379, *voir aussi* bobine d'induction
  d'un solénoïde, 380
  mutuelle, 376-377
Induction électrique, 12-13
Induction électromagnétique, 340
Intégrale, 46, 453
  curviligne, 121
  de surface, 88, 89
Intensité électrique, *voir* Courant électrique
Interaction d'échange, 325
Ion, 8
Ionisation, 8
Isolant, 11, *voir aussi* diélectrique
  polarisation des, 14-15, 68

J
Joule, effet, 212
Joule, John Prescott, 212

K
Kirchhoff, Gustav Robert, 221
Kirchhoff, lois de, 220-222, 234-235

L
Lavoisier, Antoine, 338
Lenz, Heinrich, 345
Lenz, loi de, 345-346
LHC, 306
Lignes
  de champ électrique, 60-62
    et flux électrique, 87
  de champ magnétique, 257
  de force, 34
Loi
  d'Ohm, 208
    microscopique, 199
  de Biot-Savart, 260-264
  de Coulomb, 15-24
  de Faraday, 343, 356, 364
  de Lenz, 345-346
  des mailles, 221
  des nœuds, 192, 220
Lois de Kirchhoff, 220-222, 234-235
Lorentz, force de, 301, 364
Lorentz, Hendrik Antoon, 301
Lumière, 365

M
Magnéton de Bohr, 322
Maille, 221
  loi des, 221
Maxwell
  équations de, 363-365
  théorème d'Ampère-_, 359-362
Maxwell, James Clerck, 338, 359, 364
Mille marin, 445, 447
Millikan, Robert, 77 (E54)
Miroir magnétique, 301
Mise à la terre, 11
Modèle
  de Bohr, 28 (E16), 77 (E53), 157 (P33)
  de l'atome, 7
Moment d'inertie
  tableau, 447
Moment de force
  sur un dipôle électrique, 68
  sur un dipôle magnétique, 316
Moment dipolaire électrique, 42
  unité du, 42
Moment magnétique, 270, 271
  intrinsèque, 322
  orbital, 320
Monopôle magnétique, 256
Moteur électrique, 318, 338
Multimètre, 233

N
Neutron, 7
Nœud, 192
  loi des, 192
Nombre quantique
  magnétique, 321
  orbital, 321

O
Ohm (unité), 205
Ohm, Georg Simon, 205, 208
Ohm, loi d', 208
  microscopique, 199
Ondes électromagnétiques, 365
Onnes, Heike Kamerlingh, 202
Orage solaire, 301
Ørsted, Hans Christian, 254, 258, 338

P
Paramagnétisme, 325
Parsec, 447
Particule alpha, 77 (E52)
Perméabilité du vide, 261
Permittivité, 109
  du vide, 16
Phaseur, *voir* vecteur tournant
Piazzi Giuseppe, 82
Pile, 126, 149
  idéale, 150
  réelle, 224-225
  résistance interne, 224
Plasma, 300
Point de référence, 128
Poisson, Siméon, 82

Polarisation des isolants, 14-15, 68
Pôle d'un aimant, 255, 256
Porteur de charge, 191
  densité de, 193
Positon, *voir* positron
Positron, 9
Potentiel électrique, 125-128
  calcul du champ électrique, 141
  d'un anneau, 139
  d'un conducteur en équilibre électrostatique, 144
  d'un disque, 140
  d'un fil infini, 129
  d'une distribution continue, 137-140
  d'une sphère conductrice, 144
  d'une tige, 139
  de charges ponctuelles, 131-134
  et énergie potentielle électrique, 125
  et champ électrique, 129
  point de référence, 128
  source de, 148-150
  surface équipotentielle, 130
  unité du, 126
Précipitateur électrostatique, 158 (P44)
Principe
  de conservation de la charge, 8
  de superposition, 19, 39, 261
Produit vectoriel, 261, 452
Proton, 7
Puissance
  d'un appareil, 211
  d'une f.é.m., 211
  d'une pile réelle, 225
  dans les circuits, 210-212
  dans les circuits à courant alternatif, 426-428
  dans une résistance, 212
  facteur de, 428
  moyenne dans les circuits à courant alternatif, 427

Q

Quantification
  de la charge, 7
  du moment cinétique, 321
Quarks, 8

R

Rayon gamma, 9
Réactance
  capacitive, 415
  inductive, 418
  unité, 415
Régime
  critique, 397
  surcritique, 397
Règle de la main droite
  champ magnétique
    d'un fil, 259
    d'un solénoïde, 281
    d'une boucle, 269
  dans la loi de Faraday, 356
  dans le théorème d'Ampère, 275
Représentation de Fresnel, 410
  bobine d'induction, 417
  circuit *RLC*, 419
  condensateur, 415
  résistance, 412
Résistance, 207
  amplitude du courant, 412
  association de, 226-231
  circuit *RC*, 237-241
  circuit *RL*, 382-385
  circuit *RLC*
    en courant alternatif, 419-425
    en courant continu, 395-396
  constante de phase, 411, 412
  d'un fil, 205
  dans un circuit à courant alternatif, 411-412
  différence de potentiel, 222
  dispositif, 208
  en parallèle, 229
  en série, 226
  interne
    d'un ampèremètre, 233
    d'un voltmètre, 233
    d'une pile, 224
  loi d'Ohm, 208
  puissance, 212
  unité, 205
Résistivité, 198, 199
  et température, 200-203
  tableau, 199, 448
Résonance, 424
Rigidité diélectrique, 170
  tableau, 170, 448

S

Savart, Félix, 260
Sélecteur de vitesse, 302
Semi-conducteur, 201
Solénoïde, 270, 279
  champ magnétique sur l'axe, 282
  idéal, 280
    champ magnétique, 281
  inductance, 380
  moment magnétique, 270, 271
Source de f.é.m., 150
  différence de potentiel, 221
Spectromètre de masse, 304
Spin, 322
Stimulateur cardiaque, 241, 242
Supraconductivité, 202, 326
Surface
  de Gauss, 92
  équipotentielle, 130-131
  fermée, 90
Symétrie
  cylindrique, 84
  plane, 85
  sphérique, 85
Synchrotron, 304, 305
Syntoniseur, 186 (P39), 425

T

Température de Curie, 326
Tesla (unité), 260, 295
Tesla, Nikola, 260
Théorème
  d'Ampère, 274
  d'Ampère-Maxwell, 359-362, 364
  de Gauss, 94, 364
    configurations cylindriques, 98
    configurations planes, 100
    configurations sphériques, 95, 96
    dans la matière, 109
    en magnétisme, 273, 364

Transformateur, 429-432
abaisseur, 431
élévateur, 431
symbole, 430
Travail, 120-122
Triboélectricité, 10
TRIUMF, 306

U

Unité astronomique, 449

V

Valeur efficace, 427
Van Allen, ceinture de radiation, 301
Van Allen, James Alfred, 301
Van de Graaff, générateur de, 148-149
Van de Graaff, Robert, 148
Vecteur
aire, 87, 88, 269
de Fresnel, *voir* vecteur tournant
produit scalaire, 452
produit vectoriel, 261, 452
tournant, 410
unitaire
normal, 57, 86, 90
radial, 17, 37, 260
Vent solaire, 301
Vitesse
de dérive, 192, 193
de la lumière, 365
Volt, 126, 150
Volta, Alessandro, 126, 254
Voltmètre, 233
Von Guericke, Otto, 254

W

Weber, Eduard Wilhelm, 82

Physique 2

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

Conçu ici pour les étudiants d'aujourd'hui

Les trois tomes de cette **collection originale**, testée et éprouvée en classe, mettent en œuvre une approche intégrée de l'enseignement de la physique au collégial et sont adaptés à la réalité de l'étudiant d'aujourd'hui.

Actuelle, attrayante et efficace, la facture visuelle des ouvrages facilite la compréhension de la matière.

Les concepts abordés dans les chapitres vont du concret vers l'abstrait et les explications s'appuient sur des exemples réalistes. L'étudiant est guidé dans son apprentissage au moyen de notions théoriques rigoureusement présentées et d'une **stratégie de résolution de problèmes** appliquée dans les nombreux exemples résolus. Ces qualités pédagogiques permettront à l'étudiant de réussir ses cours de physique au collégial et de se distinguer à l'université.

De plus, la collection est accompagnée de ressources exceptionnelles et inédites :

- les **solutionnaires détaillés** des questions, exercices et problèmes ;
- des **problèmes synthèse** conceptuels qui facilitent l'intégration de la matière vue dans différents chapitres ;
- des **défis animés** qui relient la matière du manuel à de nombreuses simulations interactives en ligne.

Cette collection marque la véritable entrée des manuels de physique dans l'ère numérique, en bénéficiant des multiples et incomparables avantages offerts par la plateforme i+ Interactif.

René Lafrance détient un doctorat en physique de l'Université McGill. Il est également titulaire d'un baccalauréat et d'une maîtrise en physique de l'Université Laval. Ses recherches ont porté sur la théorie quantique des champs sur réseau et sur la gravité quantique. Elles ont mené à la publication de plusieurs articles scientifiques. René Lafrance a aussi participé à l'édition française du réputé ouvrage d'Halliday, Resnick et Walker, paru chez Chenelière Éducation. Il a été professeur de physique à titre de coopérant à l'Université des sciences et des techniques de Masuku au Gabon. Il enseigne présentement la physique au Collège de Bois-de-Boulogne.

CHENELIÈRE ÉDUCATION

www.cheneliere.ca/lafrance

ISBN 978-2-7650-3546-6

9 782765 035466